НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МУБАРИЗ КАФАРШАХ оглы ГАДЖИБЕКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ

1202.01-Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку- 2017

Работа выполнена в отделе «Математический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант: Академик $\boxed{\text{Акиф Д. Гаджиев}}$

Официальные оппоненты:

- член-корреспондент НАН Азербайджана, проф. **Билал Билалов** (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана).
- доктор физико-математических наук, проф. **Садиг Абдуллаев** (Бакинский Государственный Университет).
- доктор физико-математических наук, проф. **Ильхам Алиев** (Университет Акдениз, Турция).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
кафедра «Математический анализ»

Защита диссертации состоится 08 декабря 2017 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии по математике при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 23 октября 2017 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Классический гармонический анализ приобрел свое начало как один из способов решения задач механики, физики и теории вероятности. Начальным этапом его развития явились теория рядов и интегралов Фурье, задачи спектрального анализа. В результате достижений в области теории топологических групп была выявлено, что некоторые задачи и теоремы классического гармонического анализа можно формулировать и на случай произвольной топологической группы. Так появилось новое направление гармонического анализа - абстрактный гармонический анализ. В конструкции абстрактного гармонического анализа и его развитии сыграли огромную роль работы математиков - Л. С. Понтрягина, А. И. Мальцева, И. М. Гельфанда, М. Г. Крейна, М. А. Наймарка.

В современном этапе гармонический анализ (абстрактный гармонический анализ) развивается не только в топологических группах, но и в гипергруппах, в однородных и неоднородных пространствах.

Одним из основных операцией гармонического анализа является свертка. Диссертационная работа посвящена исследованиям интегральных операторов типа свертки. Эти интегральные операторы являются обобщениями классических сверточных интегральных операторов. Причем областью интегрирования каждого из этих интегральных операторов является не евклидово пространство и не его подпространстранство, а абстрактные пространства как гипергруппы, однородные и неоднородные пространства. И ясно, что в этих интегралах интегрирование идет не по мере Лебега, а по более по абстрактной мере. Поэтому здесь более подходит словосочетание "интегральные операторы типа свертки" чем словосочетания "интегральные операторы свертки".

Основная часть интегральных операторов рассматриваемых в диссертационной работе, является обобщением классических потенциалов Рисса, логарифмического потенциала, максимального оператора Харди-Литтвулда, дробно-максимальных операторов. Как известно, все эти операторы или являются сверточными операторами или могут быть получены из сверточных операторов. Кроме того, каждый из этих операторов является важным аппаратом теории потенциала.

В течение долгого времени теория потенциала рассматривалась как одна из глав математической физики. Однако, в результате длительного почти двух векового развития эта теория стала обширной самостоятельной областью исследований, обогатилась целым рядом новых направлений. Идеи и методы теории потенциала в настоящее время применяются не только в математической физике, но и в теории функций, в функциональном анализе, в теории вероятностей, в задачах теории приближений и в гармоническом анализе.

Наиболее важные применения в теории функций и гармоническом анализе имеют классические потенциалы Рисса. Эти потенциалы возникли как модификация интеграла дробного порядка предложенного Риманом и Лиувиллем. Как известно, Риман и Лиувилл назвали дробным интегралом порядка α ($\alpha > 0$) функции f интеграл $L_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u)du,$ где $x > a$ и a может быть как конечным числом, так и равняться $-\infty$ (при условии существования интеграла).

В своей классической работе 1949 года М.Рисс предложил другое определение интеграла дробного порядка α. А именно, определение интеграла дробного порядка α функции f дано Риссом в виде интеграла

$$T_\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u}{|x-u|^{1-\alpha}} du, 0 < \alpha < 1.$$

Именно этот интеграл и послужил моделью для определения n-мерных (классических) потенциалов Рисса

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \ 0 < \alpha < n$$

которые были изучены в многочисленных статьях, даже простой перечень которых не представляется возможным. Детальный анализ и исследование классических потенциалов Рисса рассмотрены в монографиях Адамса и Хедберга, Ландкова, Мизуты, Самко, Килбас и Марычева. Представители из школы азербайджанских математиков - А.Гаджиев, С.Абдуллаев, В.Гулиев, Р.Рзаев, И.Алиев и др. в своих работах также изучали свойства потенциалов Рисса.

Общие направления исследований потенциалов I_α в теории функций и гармоническом анализе охватывают такие вопросы как: а) действие $I_\alpha f$, как линейного интегрального оператора, из одного функционального пространства в другое, в том числе и в весовых пространствах; б) изучение $I_\alpha f(x)$ как функции от x, а именно, непрерывность в R^n, дифференцируемость, поведение на бесконечности и др. с) исследование обобщенных потенциалов: рассмотрение интегралов с более общими ядрами, замена обычного сдвига обобщенными сдвигами, замена евклидового расстояния с метрикой или квазиметрикой, рассмотрение области интегрирования интегралов в абстрактных пространствах и т.д.

В диссертации главным объектом исследования является интегральные операторы которые обобщают классические потенциалы Рисса. Следуя литературе по этой теме, мы будем их называть обобщенными потенциалами (Рисса) или интегральными операторами потенциального типа.

Некоторые результаты диссертации тесно связаны с пространством Лебега с переменным показателем и с пространством Мусиелака-Орлича.

Пространство Лебега с переменным показателем является частным случаем пространства Мусиелака-Орлича. Это пространство в литературе впервые появилось в 1931 году в работе Орлича. В своей работе Орлич рассмотрел класс Лебега с переменным показателем на R и в этом классе доказал неравенство Гельдера.

Дальнейшее развитие теории пространств Лебега с переменным показателем (также пространств Мусиелака-Орлича) связано с работами Накано через двух декад. В своих работах Накано ввел и изучал модулярные пространства, которые являются более общими, чем пространства Мусиелака-Орлича. Позже пространство Мусиелака-Орлича систематически изучено польскими математиками - Орличом, Мусиелаком, Хюдзиком, Каминской и др.

Исследование топологии пространств Лебега с переменным показателем на интервалах вещественной оси было дано Шарапудиновым (Эти результаты обобщены на многомерный случай в работе Ковачика, Ракошника). В работах Шарапудинова, также были рассмотрены разные другие проблемы анализа в пространствах Лебега с переменным показателем. Шарапудинов рассматривал вопросы регулярности экспонентной функции $p(\cdot)$ и впервые ввел условие Дини-Липшица для $p(\cdot)$.

Исследование ограниченности интегральных операторов свертки в пространствах $L^{p(\cdot)}$ представляет интерес и для исследования моделей конкретных физических процессов. Изучение пространств с переменным показателем имеет связи с задачами теории упругости, динамики жидкостей и вариационного исчисления. В 1995 -1999 годах появляется серия работ Рузички по проблемам реологических и электрореологических жидкостей, которые ведут к пространствам с переменным показателем. Оказалось, что математическое моделирование некоторых задач механики жидкостей, теории эластичности приводят к дифференциальным уравнениям с нестандартными условиями роста. Следует отметить и работы Жикова, в которых пространства с переменным показателем применяются к различным задачам вариационного исчисления.

После работ С.Самко и Дининга начинается внедрение пространств с переменным показателем в гармонический анализ и теорию потенциала. В работах С.Самко изучена ограниченность некоторых сверточных операторов (в том числе потенциала Рисса) в пространстве Лебега с переменным показателем, а в работе Дининга доказана ограниченность максимального оператора Харди-Литтвулда в пространстве $L^{p(\cdot)}$. После этих работ начинается и сильное развитие теории пространств с переменным показателем. Следует отметить, что некоторые исследования азербайджанских математиков В.Гулиева, Б.Билалова, Ф.Мамедова, Р.Бандалиева и др. посвящены изучению пространств с переменным показателем.

В теории локально компактных групп возникают некоторые пространства, которые не являются группами, но имеют определенную структуру групп. Часто эта структура может выразится в терминах абстрактных сверток мер этих пространств. Гипергруппа является алгеброй мер, которая имеет некоторые полезные свойства, ассоциированные с алгеброй свертки мер в группах. Понятие гипергруппы в анализе является обобщением понятия Хаусдорфовых локально-компактных групп.

В диссертационной работы также рассматриваются операторы типа свертки в гипергруппах.

Определение локальной компактности особенно важно при изучении топологических групп, так как в любой хаусдорфовой локально компактной группе можно ввести меру Хаара, позволяющую интегрировать функции в этой группе. Мера Лебега на R^n является частным случаем меры Хаара. С помощью меры Хаара вводится понятие оператора свертки(свертки двух функций) в хаусдорфовой локально компактной группе.

Локально компактные группы применяются в гармоническом анализе, причем один из современных разделов гармонического анализа основывается на их изучении. Групповые методы играют важную роль в анализе и его приложениях, в частности в приложениях к квантовой механике. В групповых терминах формулируются некоторые основные математические понятия, такие как оператор сдвига, свертка, периодическая функция, почти периодическая функция, положительно определенная функция и др. Существенные фрагменты этой теории получили известность, как теория Дельсарта-Левитана операторов обобщенного сдвига, теория Ю. М. Березанского - С. Г. Крейна гиперкомплексных систем с непрерывным базисом, теория сверточных алгебр и др. Гипергруппа представляет собой топологическое пространство с дополнительной структурой, позволяющей построить банахову или топологическую алгебру типа групповой алгебры - гипергрупповую алгебру. С помощью гипергрупп удается построить аналог преобразования Фурье, получить теорему Планшереля и формулу обращения. Справедлив и обратный результат: наличие преобразования типа преобразования Фурье, для которого справедливы теорема Планшереля и формула обращения, обязательно связано с существованием некоторой гипергруппы. Этот результат объясняет появление гипергрупповых структур в разнообразных задачах гармонического анализа.

Цель работы. 1. Исследование ограниченности обобщенных потенциалов из пространства Лебега с переменным показателем в пространство Мусиелака-Орлича.

2. Изучение ограниченности обобщенных потенциалов из весового пространства Лебега с переменным показателем в весовое пространство Мусиелака-Орлича.

3. Исследование свойства непрерывности как функции обобщенных потенциалов на однородных пространствах.

4. Изучение предела на бесконечности обобщенных потенциалов на однородных пространствах.

5. Получение обобщенного неравенства Юнга для свертки двух функций в коммутативных гипергруппах.

6. Изучение обобщенных потенциалов Рисса, максимального оператора Харди-Литтвулда, дробно-максимальных операторов в коммутативных гипергруппах.

7. Исследование ограниченности в пространствах Лебега обобщенных потенциалов на неоднородных пространствах.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

- доказана теорема об ограниченности из пространства Лебега с переменным показателем в определенное пространство Мусиелака-Орлича обобщенных потенциалов на однородных пространствах;
- доказана ограниченность из весового пространства Лебега с переменным показателем в определенное весовое пространство Мусиелака-Орлича обобщенных потенциалов на однородных пространствах;
- доказаны теоремы о существовании и непрерывности как функции, обобщенных потенциалов Рисса на однородных пространствах;
- изучено поведение конечных разностей потенциалов Рисса на однородных пространствах, в близких друг к другу точках по квазиметрики;
- получено необходимое и достаточное условие для поведения на бесконечности обобщенных потенциалов Рисса;
- найдено достаточное условие в терминах функции перестановки для ограниченности в весовых пространствах Лебега потенциалов Рисса в коммутативных гипергруппах;
- доказан аналог теоремы Накаи-Сумитомо для обобщенных потенциалов Рисса в коммутативных гипергруппах;
- доказаны неравенство О"Нейла и обобшенное неравенство Юнга для свертки двух функций в коммутативных гипергруппах;
- найдены некоторые точечные оценки между потенциалов Рисса, максимального оператора Харди-Литтвулда, дробно-максимальных операторов в гипергруппах;
- доказаны теоремы о существовании и непрерывности как функции, логарифмических потенциалов на неоднородных пространствах;
- исследована ограниченность в пространствах Лебега с разными мерами, обобщенных потенциалов на неоднородных пространствах.

Общая методика исследований. В диссертации применяются методы теории функций и функционального анализа, теории интегральных операторов гармонического анализа, теории потенциала.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут найти приложения в теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также в некоторых задачах математической физики и механики. Результаты диссертации являются новыми.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела "Математического анализа" ИММ НАНА (бывш. рук. академик А.Д.Гаджиев, нынешний рук. д.ф.-м.н., чл. корр. НАНА В.С.Гулиев) ; на семинарах отдела "Негармонический анализ" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., чл. корр. НАНА Б.Т.Билалов); на семинарах отдела "Математическая физика" ИММ НАНА (рук. д.ф.-м.н., чл. корр. НАНА Р.Гусейнов); на общеинститутских семинарах ИММ НАНА; на Международной конференции, посвященной 100-летию акад. РАН С.М. Никольского (Москва, 2005); на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию чл. корр. НАНА проф. И. Мамедова (Баку, 2005); в Международном центре по теоретической физике им. Абдуссалам (Триест, Италия, 2006) на Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию чл. корр. НАНА проф. Б. Искендерова (Баку, 2006); на тринадцатой Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию акад. НАНА А.Д. Гаджиева (Баку, 2007); на третьей Международной конференции, посвященной 85-летию член-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2008); на Международной конференции посвященной 70-летию проф. В.Г. Мазьи (Рим, Италия, 2008); на рабочем семинаре, проведенном совместно с Институтом Математики им. А. Размадзе и Грузинским Техническим Университетом (Тбилиси, 2008); на 7-м Международном конгрессе ISAAC (Лондон, Великобритания, 2008), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009); на Международном семинаре, приуроченном к 70-летию проф. С.Г. Самко (Ростов, 2011); на Международной конференции, посвященной 70-летию проф. А. Степанца (Киев, Каменец-Подольский, 2012); на Международной конференции по математике и механике, посвященной 100-летию акад. И. Ибрагимова (Баку, 2012); на Международной конференции, посвященной 75-летию акад. НАНУ А.М. Самойленко (Киев, Севастополь, 2013); на Международной конференции MADEA-7 (Баку, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 39 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Объем диссертации состоит из 266 страниц. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 253 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе исследованы вопросы ограниченности в пространствах с переменным показателем обобщенных потенциалов на однородных пространствах.

В 1.1 этой главы введены некоторые известные понятия, которые используются в диссертационной работе. Среди этих понятий есть понятия как однородного пространства, пространство Мусиелака-Орлича, а также пространства Лебега с переменным показателем.

Определение 1 Пусть (X,ρ,μ) пространство с квазиметрикой ρ и положительной Борелевской регулярной мерой μ и $0<\mu B(x,r)<\infty$, для любых $x\in X$ и $r>0$, где $\mu B(x,r)=\{y\in X:\ \rho(x,y)<r\}$. Мера μ удовлетворяет условию удвоения, если существует постоянное число $C_\mu>0$ такое, что для всех $x\in X$ и $r>0$ выполняется неравенство

$$\mu B(x,2r)\le C_\mu \mu B(x,r). \qquad (1)$$

Пространство (X,ρ,μ) с условием (1) называется однородным пространством. Однородные пространства введены Койфманом и Вэйсом в 1971 году.

Пусть $N\in(0,\infty)$ и (X,ρ,μ) пространство с квазиметрикой ρ и положительной Борелевской регульярной мерой μ. Мера μ (или пространство X) называется Алфорс N-регулярной сверху, если существует постоянное число $K>0$ такое, что для всех $x\in X$ и $r>0$ выполняется неравенство $\mu B(x,r)\le Kr^N$.

Определение 2 Пусть (X,μ) пространство с положительной Борелевской регулярной мерой μ и функция $\Phi: X\times[0,\infty)\to[0,+\infty)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) для любой фиксированной точки $x\in X$, функция $\Phi(x,t)$ выпуклая, монотонно возрастающая и непрерывная по $t\in[0,\infty)$; 2) $\Phi(x,0)=0$ и для любой точки $t>0$ выполняется неравенство $\Phi(x,t)>0$; 3) для любой фиксированной точки $t\ge 0$ функция $\Phi(x,t)$ μ-измерима по *x*. Тогда $\Phi(x,t)$ называется N-функцией.

Пусть (X,μ) пространство с положительной Борелевской регулярной мерой μ и $\Phi(x,t)$ является N-функцией. Тогда интеграл $\mathrm{M}_{\Phi}(f)=\int\limits_X \Phi(x,|f(x)|)d\mu(x)$ называется модуляром.

Определение 3 Пусть $\Phi(x,t)$ является N-функцией. Классом Мусиелака-Орлича $L^{\Phi}(X)$ называется множество всех действительных μ-измеримых и μ-почти всюду конечных в X функций f, для которых $\mathrm{M}_{\Phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right)<\infty$, для некоторого $\lambda>0$. Если в этом классе определить норму $\|f\|_{\Phi}=\inf\left\{\lambda>0:\mathrm{M}_{\Phi}\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\}$, то оно превратится в пространство Мусиелака-Орлича.

Для μ-измеримой в X функции $p: X\to[1,+\infty)$ рассмотрим функцию $\Phi(x,t)=t^{p(x)}$. Можно проверить, что эта функция является N-функцией. При $\Phi(x,t)=t^{p(x)}$ пространство Мусиелака-Орлича называется пространством Лебега с переменным показателем и обозначается через $L^{p(\cdot)}(X)$. Норму пространства Лебега с переменным показателем мы обозначим через

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\inf\left\{\lambda>0:\int\limits_X\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}d\mu(x)\le 1\right\}.$$

Примем обозначения $p_-=essinf_{x\in X}\,p(x),\quad p_+=esssup_{x\in X}\,p(x).$ Мы будем предполагать, что функция $p(x)$ удовлетворяет условиям

$$1<p_-\le p(x)\le p_+<+\infty, \qquad (2)$$

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{\mathrm{A}}{-\ln\rho(x,y)},\quad \rho(x,y)\le\frac{1}{2}, \qquad (3)$$

где $\mathrm{A}>0$ не зависит от x,y. Условие (3) называется слабым условием Липшица.

Мы также будем использовать обозначение $p'(x)=\frac{p(x)}{p(x)-1}.$

В 1.2 введены некоторые классы функций одного переменного.

Определение 4 Пусть $0<d<\infty.$ Через $W_0=W_0([0,d])$ обозначим класс функций $a=a(r)$ со следующими тремя свойствами: 1) каждая функция $a = a(r)$ из W_0 неотрицательна и непрерывна на $[0, d]$; 2) каждая функция $a = a(r)$ из W_0 почти возрастает; 3) $\lim_{r\to 0} a(r) = 0$, для каждой $a = a(r)$ из W_0.

В 1.3 и 1.4 доказаны некоторые леммы. В 1.5 и 1.6 оценивается норма

$$\beta_p = \beta_p(x,r) := \left\| \frac{a[\rho(x,\cdot)]}{[\rho(x,\cdot)]^N} \chi_{X \setminus B(x,r)}(\cdot) \right\|_{p(\cdot)} .$$

Теорема 1 Пусть (X, ρ, μ) ограниченное пространство, с Алфорс N-регулярной сверху мерой, $d = diamX$, функция $p: X \to [0, \infty)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Допустим также, что $a(t)$ неотрицательная, непрерывная, почти возрастающая и $\frac{a(r)}{r^N}$ почти убывающая функции на $(0, d]$. Тогда существует постоянное число $C > 0,$ не зависящее от $x \in X$ и $r \in (0, d)$, такое, что

$$\beta_p(x,r) \le C \left(\int_r^d \left[\frac{a(t)}{t^{\frac{N}{p'(x)}}} \right]^{p(x)} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p(x)}} + C\chi_{\left[\frac{d}{2}, d\right]}(r).$$

В 1.7 вводится функция специального типа. Доказывается, что обратная функция введенной функции является N-функция. Находится ее эквивалентные формы.

В 1.8 доказывается основной результат главы. Там изучается ограниченность обобщенных Риссовых потенциалов из пространства Лебега с переменным показателем в пространство Мусиелака-Орлича.

Пусть (X, ρ, μ) ограниченное пространство, с Алфорс N-регулярной сверху мерой μ. Формально определим оператор вида

$$I_a f(x) = \int_X \frac{a[\rho(x,y)]}{[\rho(x,y)]^N} f(y) d\mu(y). \qquad (4)$$

При определенных условиях на функцию $a = a(r)$ (например, эти условия указаны в теореме 2), мы назовем оператор I_a обобщенным Риссовым потенциалом. Также, мы будем рассматривать функцию $A(r) = \int_0^r \frac{a(t)}{t} dt.$

Теорема 2 Пусть (X,ρ,μ) ограниченное однородное пространство, с Алфорс N-регулярной сверху мерой, $d = diamX$, функция $p: X \to [0,\infty)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Допустим, что функция $a \in W_0([0,d])$ удовлетворяет условию $\int_0^d \frac{a(t)}{t}dt < \infty$ и при определенном $0 < \lambda < \frac{N}{p_+}$, функция $\frac{a(r)}{r^\lambda}$ почти убывает на [0,d]. Тогда оператор I_a ограниченно действует из пространства $L^{p(\cdot)}(X)$ в пространство Мусиелака-Орлича $L^\Phi(X)$, где N-функция определена с помощью ее обратной (для каждой фиксированной точки $x \in X$)

$$\Phi^{-1}(x,u) = \int_0^u A\left(t^{-\frac{1}{N}}\right)t^{-\frac{1}{p'(x)}}dt \qquad (5)$$

и $a(t)$ считается продолженным как $a(t) \equiv a(d),$ для $r > d.$

В 1.9, условия на функцию $a(r)$ в теореме 2, переформулируются и даются в терминах ее верхнего индекса Матучевска-Орлича. Для функции $a \in W_0$, число

$$M(a) = \sup_{x>1} \frac{\ln\left(\limsup\limits_{h\to 0} \frac{a(hx)}{a(h)}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\limsup\limits_{h\to 0} \frac{a(hx)}{a(h)}\right)}{\ln x}$$

называется верхним индексом Матучевска-Орлича функции $a(r)$.

Теорема 3 Пусть (X,ρ,μ) ограниченное однородное пространство, с Алфорс N-регулярной сверху мерой, $d = diamX$ и функция $p: X \to [0,\infty)$ удовлетворяет условиям (2) и (3). Если функция $a \in W_0([0,d])$ удовлетворяет условию $\int_0^d \frac{a(t)}{t}dt < \infty$ и $M(a) < \frac{N}{p_+}$, то оператор I_a ограниченно действует из пространства $L^{p(\cdot)}(X)$ в пространство Мусиелака-Орлича $L^\Phi(X)$, где N-функция определена с помощью ее обратной функции (5) (для каждой фиксированной точки $x \in X$) и $a(t)$ считается продолженным как $a(t) \equiv a(d),$ для $r > d.$

Во второй главе получены весовые оценки для обобщенных потенциалов в пространствах с переменным показателем. В 2.1 вводится известные понятия весового пространства Мусиелака-Орлича и нижней размерности $\underline{\dim}(X)$ пространства X и некоторые факты.

Весом в (X,μ) называется положительная и μ-локально интегрируемая в X функция.

Определение 5 Пусть (X,μ) пространство с положительной Борелевской регулярной мерой (X,μ), $\Phi(x,t)$ является N-функцией и w является весом в X. Весовым классом Мусиелака-Орлича $L^{\Phi}(X,w)$ называется множество всех действительных μ-измеримых и μ-почти всюду конечных в X функций f, для которых $\int_X \Phi\left(x, \frac{w(x)f(x)}{\lambda}\right) d\mu(x) < \infty$, для некоторого $\lambda > 0$. Если в этом классе определить норму $\| f \|_{\Phi,w} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi\left(x, \frac{w(x)f(x)}{\lambda}\right) d\mu(x) \le 1\right\}$, то он превратится в весовое пространство Мусиелака-Орлича.

В частности, если $\Phi(x,t) = t^{p(x)}$, где $1 \le p(x) < \infty$, то весовое пространство Мусиелака-Орлича называется весовым пространством Лебега с переменным показателем и обозначается через $L^{p(\cdot)}(X,w)$.

Пусть (X,ρ,μ) пространство с квазиметрикой ρ и положительной Борелевской регулярной мерой μ. Нижняя размерность $\underline{\dim}(X)$ пространства X определяется, как

$$\underline{\dim}(X) = \sup_{t>1} \frac{\ln\left(\liminf\limits_{r\to 0} \inf\limits_{x\in X} \frac{\mu B(x,rt)}{\mu B(x,r)}\right)}{\ln t}.$$

Для фиксированной точки $x_0 \in X$ обозначим $w^{\nu} = [\rho(x,x_0)]^{\nu}$.

В 2.2 оценивается интеграл

$$\mathrm{J}(x,r) = \int_{X\setminus B(x,r)} \left(\frac{a(\rho(x,y))}{\rho(x,y)^N}\right)^{p(x)} \rho(y,x_0)^b \, d\mu(y), \quad x_0 \in X.$$

В 2.3 изучается весовые оценки усеченных обобщенных потенциалов, т.е. при соответствующих условиях на функцию $a(t)$

оценивается норма $\eta_{p,\gamma}(x,r)=\left\| \frac{a(\rho(x,y))}{\rho(x,y)^N} \right\|_{L^{p(\cdot)}\left(X\setminus B(x,r), w^{\frac{\gamma-N}{p(y)}}\right)}$, где $w^{\frac{\gamma-N}{p(y)}}(y)=\rho(x_0,y)^{\frac{\gamma-N}{p(y)}}$ и $\gamma>0$.

В 2.4 изучается ограниченность обобщенных Риссовых потенциалов на однородных пространствах из весового пространства Лебега с переменным показателем в весовое пространство Мусиелака-Орлича. Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Теорема 4 Пусть (X,ρ,μ) ограниченное квазиметрическое пространство с мерой с условием удвоения и с конечной положительной нижней размерностью $\underline{\dim}(X)$, $d=diamX$, $x_0\in X$, функция $p:X\to[0,\infty)$ удовлетворяет условиям (2) и (3) и $0\le\nu<\frac{\underline{\underline{\dim}}(X)}{p'(x_0)}$. Допустим также, что функция $a(r):(0,d)\to(0,+\infty)$ непрерывна, почти возрастает, удовлетворяет условию $\int\limits_0^d \frac{a(t)}{t}dt<\infty$ и существует число $\beta\in\left(0,\frac{\underline{\underline{\dim}}(X)}{p_+}\right)$ такое, что функция $\frac{a(r)}{r^\beta}$ почти убывает на $(0,d]$. Тогда для любого числа N с условием

$$\max\left(\nu p'(x_0),\beta p_+\right)<N<\underline{\dim}(X),$$

оператор (4) ограниченно действует из весового пространства Лебега с переменным показателем $L^{p(\cdot)}\left(X,\rho(\cdot,x_0)^\nu\right)$ в весовое пространство Мусиелака-Орлича $L^\Phi(X,\rho(\cdot,x_0)^{\nu_1})$, где $\nu_1=\frac{\nu}{p(x_0)}$, N-функция Φ определена с помощью ее обратной функции (5) (для каждой фиксированной точки $x\in X$) и $a(t)$ считается продолженным как $a(t)\equiv a(d)$, для $r>d$.

Теорема 5 Пусть (X,ρ,μ) ограниченное квазиметрическое пространство с условием

$$c_1 r^N\le\mu B(x,r)\le c_2 r^N,$$

для любых точки $x \in X$ и радиуса $0 < r < d$, где $d = diamX$. Допустим, что функция $p: X \to [0,\infty)$ удовлетворяет условиям (2) и (3) и $0 \le \nu < \frac{N}{p'(x_0)}, x_0 \in X$ а функция $a(r):(0,d) \to (0,+\infty)$ непрерывна, почти возрастает, удовлетворяет условию $\int_0^d \frac{a(t)}{t} dt < \infty$

и существует число $\beta \in \left(0, \frac{N}{p_+}\right)$ такое, что функция $\frac{a(r)}{r^\beta}$ почти убывает на $(0,d]$. Тогда оператор (4) ограниченно действует из весового пространства Лебега с переменным показателем $L^{p(\cdot)}\left(X, \rho(\cdot,x_0)^\nu\right)$ в весовое пространство Мусиелака-Орлича $L^\Phi(X, \rho(\cdot,x_0)^{\nu_1})$, где $\nu_1 = \frac{\nu}{p(x_0)}$, N-функция Φ определена с помощью ее обратной функции (5) (для каждой фиксированной точки $x \in X$) и $a(t)$ считается продолженным как $a(t) \equiv a(d)$, для $r > d$.

В третей главе изучаются тонкие свойства обобщенных потенциалов. Точнее, изучаются некоторые пределы, в том числе свойства непрерывности обобщенных потенциалов, как функции от x.

Непрерывность классического потенциала Рисса $I_\alpha f(x)$, как функции от x, изучены в работах Мизуты В работе Гаджиева и Догру результаты о существовании и непрерывности классических потенциалов Рисса обобщены для потенциалов Рисса с анизотропными ядрами, зависящими от λ - расстояния.

По теореме вложения Соболева, если $I_\alpha f(x)$ конечен почти всюду и если $p > \frac{n}{\alpha}$, то оператор $I_\alpha f$ ограниченно действует из пространства $L_p(R^n)$ в пространство $C(R^n)$. Но этот факт не верен при $p \le \frac{n}{\alpha}$. Поэтому Й. Мизута нашел подкласс пространства $L_p(R^n)$ при $p = \frac{n}{\alpha}$, который не принадлежит ни одному из пространств $L_q(R^n)$, отличного от $L_p\left(R^n\right)$, и потенциал $I_\alpha f$ ограниченно действует из этого подкласса в пространство $C\left(R^n\right)$.

Используя модифицированные методы Мизуты о свойствах непрерывности потенциалов, мы исследуем свойства непрерывности обобщенных потенциалов Рисса на абстрактных пространствах.

В 3.1 указываются некоторые исторические факты о свойствах непрерывности потенциалов. В 3.2 доказывается теорема о существовании интегральных операторов, которые являются обобщениями потенциалов Рисса.

Теорема 6 Пусть (X,ρ,μ) пространство с квазиметрикой ρ и положительной Борелевски мерой μ, где $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ и f функция μ-локально интегрируемая функция на X. Допустим, что функция $K:(0,\infty)\to[0,\infty)$ удовлетворяет следующие условия:

(K_1) $K(t)$ почти убывающая функция;

(K_2) существует постоянное число $M \geq 1$ такое, что $K(r) \leq MK(2r)$, для любого $r>0$;

(K_3) существует число $A>0$ такое, что для любого $x \in X$

$$\int\limits_{B(x,r)} K(\rho(x,y))d\mu(y) < A.$$

Тогда для существования интеграла

$$U_K f(x) = \int\limits_X K(\rho(x,y))f(y)d\mu(y)$$

μ -почти всюду на X необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

(i) Существует точка $x_0 \in X$ такая, что

$$\int\limits_{X\setminus B(x_0,1)} K(\rho(x_0,y))f(y)d\mu(y) < \infty;$$

(ii) Для любой точки $x \in X$

$$\int\limits_{X\setminus B(x,1)} K(\rho(x,y))f(y)d\mu(y) < \infty;$$

(iii) Существует точка $x^0 \in X$ такая, что $\int\limits_X K\left(1+\rho\left(x^0,y\right)\right)f(y)d\mu(y) < \infty$.

В 3.3 доказывается лемма, которая является основной леммой для непрерывности обобщенных потенциалов на однородных пространствах. В 3.4 доказывается теорема о непрерывности обобщенных потенциалов.

Пусть $\phi(r)$ строго возрастающая функция на $(0,\infty)$ и $\lim\limits_{r\downarrow 0}\phi(r)=0.$ Через пространство $(X,\rho,\mu)_\phi$ обозначим множество X с квазиметрикой ρ и неотрицательной Бореловской мерой μ в X, $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ и существует постоянное число $C \geq 1$ такое, что для всех чисел $r>0$ и всех точек $x \in X$

$$C^{-1}\phi(r) \leq \mu(B(x,r)) \leq C\phi(r).$$

Теорема 7 Пусть дано пространство $(X,\rho,\mu)_\phi$, $K:(0,\infty)\to[0,\infty)$ непрерывная функция, удовлетворяющая условиям (K_1), (K_2) и (K_4), существует постоянное число $F>0$ и $0<\sigma<1$ такое, что $\int\limits_{B(x,r)} K(\rho(x,y))d\mu(y) < F\phi(r)^\sigma$, для любого $r>0$. Допустим, что $p=\dfrac{1}{\sigma}$, f функция μ -локально интегрируемая на X и выполняется условия (iii) и

$$\int\limits_X |f(y)|^p w(|f(y)|)d\mu(y) < \infty, \qquad (6)$$

где

(w_1) w положительная, строго возрастающая функция на интервале $(0,\infty)$;

(w_2) $\displaystyle\int\limits_1^\infty w(r)^{-\frac{1}{p-1}}\frac{dr}{r} < \infty$;

(w_3) существует постоянное число $A>0$ такое, что

$$w(2r) < Aw(r), \quad \text{для любого} \quad r>0.$$

Тогда $U_K f(x)$ непрерывен в X.

Замечание 1 Примерами $w(r)$ с условиями (w_1), (w_2), (w_3) могут служить $w(r)=\log(2+r)^\delta$; $w(r)=\log(2+r)^{p-1}\log(2+\log(2+r))^\delta$ и т.д., где $\delta > p-1>0$.

Замечание 2 Пусть $\phi(r)=r^d$. Тогда, при $0<\alpha<d$, функции $K(t)=t^{\alpha-d}$ и $K(t)=t^{\alpha-d}\log(1+t^{-1})$, удовлетворяет условиям (K_1), (K_2),

(K_4). Если $K(r)=r^{\alpha-d}$, то легко видеть, что $\sigma=\dfrac{\alpha}{d}$. Если $K(t)=t^{\alpha-d}\log\left(1+t^{-1}\right)$, то $\sigma=\dfrac{\alpha-\beta}{d}$.

В 3.5 доказывается теорема о поведении конечных разностей потенциалов Рисса на однородных пространствах, в близких друг к другу точках по квазиметрики.

Пусть $d>0$ и $0<\theta\le 1$. Через пространство $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ обозначим множество X с квазиметрикой ρ и неотрицательной Бореловской мерой μ в X, $supp\mu=X$, $diamX=\infty$, где существует постоянное число $C\ge 1$ такое, что для всех чисел $r>0$ и всех точек $x,y,z\in X$

$$C^{-1}r^{d}<\mu(B(x,r))<Cr^{d},$$

$$|\rho(x,y)-\rho(z,y)|\le C_0\rho(x,z)^{\theta}\left[\rho(x,y)+\rho(z,y)\right]^{1-\theta}.$$

Пусть дано пространство $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ и $0<\alpha<d$. Рассмотрим потенциал Рисса

$$R_\alpha f(x)=\int_X\rho(x,y)^{\alpha-d}f(y)d\mu(y).$$

Теорема 8 Пусть $(X,\rho,\mu)_{d,\theta}$ пространство однородного типа $p=\dfrac{d}{\alpha}>0$, функция $w(r)$ удовлетворяет условиям (w_1), (w_2),

(w_4) существует $A_1>0$ такое, что

$$A_1^{-1}w(r)\le w\left(r^2\right)\le A_1w(r).$$

Допустим, что $f(x)$ функция μ -локально интегрируемая в X с условием (6) и существует точка x^0 такая, что

$$\int_X\left(1+\rho\left(x^0,y\right)\right)^{\alpha-d}|f(y)|d\mu(y)<\infty.$$

Тогда $|R_\alpha f(x)-R_\alpha f(z)|=o\left(w^*(\rho(x,z))\right)$, при $\rho(x,z)\to 0$,

где $w^*(r)=\left(\int_0^r w\left(t^{-1}\right)^{-\frac{1}{p-1}}t^{-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}$.

В 3.6 находится необходимое и достаточное условие для поведения на бесконечности интегралов потенциального типа.

Известно, что если f неотрицательная функция с компактным носителем, то $I_\alpha f(x)$ имеет порядок $|x|^{\alpha-n}$ на бесконечности. Д.Сиегел и Э. Талвила нашли необходимое и достаточное условие на функцию f для поведения $I_\alpha f(x)=O\left(|x|^{\alpha-n}\right)$, при $|x|\to\infty$, где функция f не обязательно должна иметь компактный носитель.

Теорема 9 (Сиегел, Талвила) Если $f\geq 0$, то следующие условия эквивалентны: а) для всех $x\in R^n$ сходится интеграл $\int\limits_{R^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)dy$ и $I_\alpha f(x)$ имеет поведение $O\left(|x|^{\alpha-n}\right)$, при $|x|\to\infty$;

б) для всех $x\in R^n$ сходится интеграл $\int\limits_{R^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)(1+|y|)^{n-\alpha}dy$

В 3.6 мы обобщаем этот факт для интегралов типа свертки с монотонно убывающим ядром, удовлетворяющим условию удвоения.

Формально рассмотрим интеграл $K_\mu(x)=\int\limits_X K(\rho(x,y))d\mu(y)$.

Теорема 10 Пусть (X,ρ,μ) пространство с квазиметрикой ρ и положительной мерой μ, $diam X=\infty$, $\xi\in X$, функция $K:(0,\infty)\to[0,\infty)$ монотонно убывает и существует постоянное число $C\geq 1$ такое, что $K(r)\leq CK(2r)$ для $r>0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) для всех $x\in X$ сходится интеграл $\int\limits_X K(\rho(x,y))d\mu(y)$ и $K_\mu(x)$ имеет поведение $O(K(\rho(\xi,x)))$, при $\rho(\xi,x)\to\infty$;

б) для всех $x\in X$ сходится интеграл $\int\limits_X \frac{K(\rho(x,y))}{K(1+\rho(\xi,y))}d\mu(y)$.

В 3.7 изучаются предельные свойства на бесконечности обобщенных потенциалов.

Определение 6 Пусть $\beta>0$. Через пространство $(X,\rho,\mu)_\beta$ обозначим множество X с квазиметрикой ρ и неотрицательной Бореловской мерой μ в X, $supp\mu=X$, $diam X=\infty$ и существует постоянное число $C \geq 1$ такое, что для всех чисел $r > 0$ и всех точек $x \in X$

$$C^{-1} r^{\beta} \leq \mu(B(x,r)) \leq C r^{\beta}$$

Теорема 11 Пусть дано пространство $(X, \rho, \mu)_{\beta}$, $K:(0,\infty) \to [0,\infty)$ непрерывная функция и удовлетворяет условиям (K_1), (K_2),

(K_5) существует постоянное $F > 0$ и $0 < \sigma < \beta$ такое, что

$$\int_{B(x,r)} K(\rho(x,y)) d\mu(y) < F r^{\sigma} \text{ для любого } r > 0.$$

(K_6) $\lim\limits_{r \to \infty} K(r) = 0,$

Допустим, что f неотрицательная μ-локально интегрируемая функция в X, с условиями (iii) и

$$\int_X f(y)^p w(f(y)) d\mu(y) < \infty,$$

где $p = \dfrac{\beta}{\sigma}$ и функция w удовлетворяет условиям (w_1), (w_2), (w_3) и

(w_5) $w(r^2) \leq A_1 w(r)$, для $r \in (1,\infty)$. Тогда

$$w^*\left(\rho(\xi,x)^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} U_K f(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho(\xi,x) \to \infty,$$

где $w^*(r) = \left(\int_r^{\infty} w(t)^{-\frac{1}{p-1}} t^{-1} dt \right)^{1-p}$.

Четвертая глава посвящена изучению свойств сверток двух функций в гипергруппе. В 4.1, находит свое место понятия гипергруппы, некоторые определения, факты и обозначения, леммы.

Определение 7 Гипергруппа $(K,*)$-это Хаусдорфово локально компактное пространство K вместе с билинейной, ассоциативной, слабо непрерывной сверткой на Банаховом пространстве всех ограниченных Бореловских регулярных мер на K со следующими свойствами:

1. Для всех $x, y \in K$, свертка мер Дирака $\delta_x * \delta_y$ является вероятностной мерой с компактным носителем.
2. Отображение $(x,y) \mapsto supp(\delta_x * \delta_y)$ из $K \times K$ в $\mathrm{C}(K)$ непрерывно, где $\mathrm{C}(K)$ пространство компактных подмножеств пространства K, снабженное топологией Майкля (Топология Майкля-топология, порожденная подбазисом всех множеств

$$U_{V,W} = \{L \in \mathrm{C}(K) : L \cap V \neq \varnothing, L \subset W\},$$

где V,W открытые подмножества K).

3. Существует нейтральный элемент(единица) $e \in K$ такой, что $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$, для всех $x \in K$.

4. Существует топологическая инволюция $\vee$ из K на K такая, что для всех $x, y \in K$

$$\left(x^{\vee}\right)^{\vee} = x \quad \text{и} \quad \left(\delta_x * \delta_y\right)^{\vee} = \delta_{y^{\vee}} * \delta_{x^{\vee}},$$

где $\mu^{\vee}(B) = \mu(\{x^{\vee} : x \in B\})$, для любого Бореловского множества.

5. Для любых $x, y \in K$ включение $e \in supp(\delta_x * \delta_y)$ справедливо тогда и только тогда, когда $x = y^{\vee}$.

Если $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ для всех $x, y \in K$, то гипергруппа K называется коммутативной.

Известно, что в коммутативной гипергруппе K можно задать меру Хаара, которую мы обозначим через λ. Это означает, что для любой измеримой по Борелю функции f в K ,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) \ (x \in K).$$

Определим обобщенный оператор сдвига T^x, $x \in K,$ через $T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$, для всех $y \in K$.

Если гипергруппа K коммутативна, то $T^x f(y) = T^y f(x)$ и свертка двух функций определяется $\left(f *_K g\right)(x) = \int_K T^x f(y) g(y^{\vee}) d\lambda(y).$

Пусть u неотрицательная и локально λ-интегрируемая функция в коммутативной гипергруппе K. Для $1 \leq p \leq \infty$ весовое Лебегово пространство $L_u^p(K, \lambda)$ определяется как

$$L_u^p(K, \lambda) = \{ f : K \to (-\infty, +\infty) : f\ \lambda - \text{измерима} \ \ \textit{в} \ \ K, \| f \|_{K,p,u} < \infty\}$$

где $\| f \|_{K,p,u}$ определяется как

$$\| f \|_{K,p,u} = \begin{cases} \left(\int_K |f(x)|^p u(x) d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in K} \left(f(x) u(x)\right), & \text{если } \ p = \infty. \end{cases}$$

Если $u=1$, то пространство $L_u^p(K,\lambda)$ обозначим через $L^p(K,\lambda)$, а норму функции f в $L^p(K,\lambda)$ обозначим через $\| f \|_{K,p}$ или $\| f \|_{L^p(K,\lambda)}$.

. Пусть $f:K\to(-\infty,+\infty)$ измеримая по Борелю функция. Функция распределения λ_f функции f определяется как

$$\lambda_f(s)=\lambda\{x: x\in K, | f(x)| > s\}, \text{ для } s>0.$$

С функцией распределения ассоциируется неотрицательная функция, которая называется функцией перестановки. Функция перестановки функции f определяется как $f^{*K}(t)=\inf\{s>0:\lambda_f(s)\le t\}$.

Через f^{**K} обозначим максимальную функцию функции f^{*K}, т.е.

$$f^{**K}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^{*K}(u)du, \text{ для } t>0.$$

Для $1\le p<\infty$ и $1\le q\le\infty$, пространство Лоренца $L^{p,q}(K,\lambda)$ определяется как $L^{p,q}(K,\lambda)=\{f: f \ \lambda-\text{ измерима в } K, \| f \|_{K,p,q}<\infty\}$,

где $$\| f \|_{K,p,q}=\begin{cases}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**K}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 1\le p<\infty, 1\le q<\infty\\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^{**K}(t), & \text{если } 1\le p\le\infty,\ q=\infty.\end{cases}$$

Функция $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ называется функцией Юнга, если она может быть представлена в виде $\Phi(r)=\int_0^r\phi(t)dt$, где $\phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ неотрицательная непрерывная слева функция такая, что $\phi(0)=0$ и $\lim_{t\to\infty}\phi(t)=\infty$.

Пусть Φ является функцией Юнга. Класс Орлича $L^\Phi(K,\lambda)$ -это множество всех локально интегрируемых функций f в K для которых $\int_K\Phi\left(\frac{| f(x)|}{\eta}\right)d\lambda(x)<\infty$ для некоторого $\eta>0$. Если в этом классе задать норму $\| f \|_{\Phi} = \inf \{\eta > 0 : \int_K \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\eta}\right) d\lambda(x) \le 1\}$, то $L^{\Phi}(K,\lambda)$ называется пространством Орлича.

Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикой ρ и мерой Хаара λ, Алфорс N-регулярной сверху на единице. Определим потенциал Рисса

$$I_{\alpha}^{K} f(x) = \left(\rho(e,\cdot)^{\alpha-N} *_K f\right)(x), 0 < \alpha < N \qquad (7)$$

в $(K,*)$.

Определим функцию $\Lambda_x(y) = T^x \chi_{B(e,r)}(y^{\vee})$.

Мы будем предполагать, что существуют постоянные числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$ такие, что для каждых $x, y \in K$ и $r > 0$

$$supp\Lambda_x(\cdot) \subset B(x, c_1 r), \qquad (8)$$

$$\lambda B(x,r) T^x \chi_{B(e,r)}(y^{\vee}) \le c_2 \lambda B(e,r) \le c_3 r^N, \qquad (9)$$

где $B(x,r) = \{y \in K : \rho(x,y) < r\}$ шар с центром x и радиусом r.

В 4.2 мы получаем двухвесовые оценки для Риссовых потенциалов в коммутативных гипергруппах. Полученный результат обобщает классического результата Хеинига.

Теорема 12 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикой ρ, мерой Хаара λ с условием удвоения, выполняются условия (8), (9) и $0 < \alpha < N$, $1 < r < \frac{N}{\alpha}$, $1 < p \le q < +\infty$. Допустим, что u, v положительные λ-локально интегрируемые функции в K с условиями

$$\sup_{s>0} \left(\int_s^{+\infty} u^{*_K}(t) t^{-q(1-\frac{\alpha}{N})} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^s \left((\frac{1}{v})^{*_K}(t) \right)^{p'-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

$$\sup_{s>0} \left(\int_0^s u^{*_K}(t) t^{-q(\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{N})} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^{+\infty} \left((\frac{1}{v})^{*_K}(t) \right)^{p'-1} t^{p'(\frac{1}{r}-1)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty.$$

Тогда I_{α}^{K} ограниченно действует из весового пространства $L_{K,p,v}(K)$ в весовое пространство $L_{K,q,u}(K)$.

В 4.3 определяется обобщенный Риссовый потенциал в коммутативных гипергруппах и доказывается аналог теоремы Накаи-

Сумитомо в коммутативных гипергруппах. Напомним, что теорема Накаи-Сумитомо является обобщением теоремы Харди-Литтлвуда-Соболева для классических потециалов Рисса, и утверждает факт об ограниченности обобщенных потенциалов Рисса на однородных пространствах из пространства Лебега в пространство Орлича.

Для неубывающей функции $a:(0,\infty)\to(0,\infty)$, определим оператор

$$I_a^K f(x)=\left(\frac{a(\rho(e,\cdot))}{\rho(e,\cdot)^N}*_K f\right)(x)$$

на коммутативной гипергруппе $(K,*)$ снабженный квазиметрикой ρ.

Теорема 13 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикой ρ и мерой Хаара λ с условием удвоения и выполняются условия (8) и (9). Допустим, что $1<p<\infty$, функция $a=a(r)$ неотрицательна, почти возрастает на $[0,\infty)$, для некоторого $0<\beta<\frac{N}{p}$, функция $\frac{a(r)}{r^\beta}$ почти убывает и $\int_0^1\frac{a(t)}{t}dt<\infty.$ Тогда оператор I_a^K ограничен из пространства $L^p(K,\lambda)$ в пространство Орлича $L^\Phi(K,\lambda)$, где функция Юнга определена с помощью обратной функции $\Phi^{-1}(r)=\int_0^r A\left(t^{-\frac{1}{N}}\right)t^{-\frac{1}{p'}}dt,$ где $A(r)=\int_0^r\frac{a(t)}{t}dt$.

В 4.4 доказываются неравенства для свертки двух функций в коммутативных гипергруппах, которые являются точными аналогами неравенств О"Нейла.

Теорема 14 Пусть f и φ измеримые по Борелю функции в коммутативной гипергруппе K. Тогда для любой точки $t>0$ справедливо неравенство

$$\left(f*_K\varphi\right)^{**K}(t)\le tf^{**K}(t)\varphi^{**K}(t)+\int_t^\infty f^{*K}(s)\varphi^{*K}(s)ds$$

Теорема 15 Пусть f и φ измеримые по Борелю функции в коммутативной гипергруппе K. Тогда для любого $t>0$ справедливо неравенство $\left(f*_K\phi\right)^{**K}(t)\le\int_t^\infty f^{**K}(s)\phi^{**K}(s)ds.$

В 4.5 доказывается обобщенное неравенство Юнга для свертки двух функций в коммутативных гипергруппах.

Теорема 16 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа, с мерой Хаара λ, $f \in L^{p_1,q_1}(K,\lambda)$, $\varphi \in L^{p_2,q_2}(K,\lambda)$ и $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$. Тогда $(f *_K \varphi) \in L^{p_0,q_0}(K,\lambda)$, где $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1=\frac{1}{p_0}$ и $q_0 \geq 1$ такое число, что $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geq\frac{1}{q_0}$. Более того, $\|(f *_K \varphi)\|_{K,p_0,q_0} \leq p_0 e^{\frac{2}{e}} \| f \|_{K,p_1,q_1} \|\varphi\|_{K,p_2,q_2}$.

В 4.6 мы даем некоторые применения обобщенного неравенства Юнга в коммутативных гипергруппах.

Теорема 17 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикрй ρ и мерой Хаара λ, со свойством $\lambda B(e,r)=Ar^N$, где A положительное постоянное число. Допустим, что $1\leq q\leq\infty$, $1\leq p<\infty$, $0<\alpha<\frac{N}{p}$. Если $f\in L^{p,q}(K,\lambda)$, то $I_\alpha f\in L^{r,q}(K,\lambda)$ и

$$\| I_\alpha^K f \|_{K,r,q} \leq C \| f \|_{K,p,q}, \text{ где } \frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{N},\ C=\frac{re^{\frac{2}{e}}N}{\alpha}A^{\frac{N-\alpha}{N}}.$$

Теорема 18 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с мерой Хаара λ. Если $f\in L^{\frac{N}{N-\alpha},\infty}(K,\lambda)$, $\varphi\in L^p(K,\lambda)$, где $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{N}{p}$, то $(f *_K \varphi)\in L^r(K,\lambda)$ и

$$\|(f *_K \phi)\|_{K,r} \leq 3r\frac{p}{p-1}\left(\frac{p}{r}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \| f \|_{K,\frac{N}{N-\alpha},\infty} \|\phi\|_{K,p}, \text{ где } \frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{N}.$$

Следующий результат дает нам теорему Харди-Литтлвуда-Соболева на коммутативных гипергруппах.

Теорема 19 Пусть $(K,*)$ коммутативная гипергруппа с квазиметрикрй ρ и мерой Хаара λ, со свойством $\lambda B(e,r)=Ar^N$, где A положительное постоянное число. Допустим, что $1<p<\infty$,

$0<\alpha<\dfrac{N}{p}$. Если $f\in L^p(K,\lambda)$, то $I_\alpha^K f\in L^r(K,\lambda)$ и

$\| I_\alpha^K f\|_{K,r}\le C\| f\|_{K,p}$, где $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{N}$, $C=\dfrac{pre^{\frac{2}{e}}}{p-1}\left(\dfrac{p}{r}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\dfrac{N}{\alpha}A^{\frac{N-\alpha}{N}}$.

В 4.7 доказывается неравенство Велланда в гипергруппах с мерой Хаара, удовлетворяющей обратному условию удвоения на единице гипергруппы.

Пусть $(K,*)$ гипергруппа, с квазиметрикой ρ и мерой Хаара λ. Если существует постоянное число $D_\lambda>0$ такое, что для любого $r>0$ выполняется неравенство $\lambda B(e,2r)\le D_\lambda \lambda B(e,r),$ то мы скажем, что мера Хаара λ удовлетворяет условию удвоения на единице(гипергруппы), а тройка $(K,*,\lambda)$ является однородным пространством на единице.

Пусть $(K,*,\lambda)$ однородное пространство на единице. Если существует постоянное число $0<\gamma<1$ такое, что для любого $r>0$ с условием $B(e,r)\ne K$, выполняется неравенство $\lambda B(e,\frac{r}{2})\le\gamma\lambda B(e,r),$ то мы скажем, что λ удовлетворяет обратному условию удвоения на единице(гипергруппы), а тройка $(K,*,\lambda)$ является пространством с обратным условием удвоения на единице.

Для $0<\beta<1$ определим операторы

$$\mathrm{M}_\beta f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\lambda B(e,r)^{1-\beta}}\int_K T^x\,|\,f(y^\vee)\,|\,\chi_{B(e,r)}(y)d\lambda(y),$$

$$\mathrm{I}_\beta f(x)=\int_K T^x f(y^\vee)\lambda B(e,\rho(e,y))^{\beta-1}d\lambda(y).$$

В следующей теореме указано неравенство Велланда в гипергруппах с мерой Хаара, удовлетворяющей обратному условию удвоения на единице гипергруппы

Теорема 20 Пусть $(K,*)$ гипергруппа, с квазиметрикой ρ и мерой Хаара λ, и $(K,*,\lambda)$ является пространством с обратным условием удвоения на единице, ε положительное число с условием $\varepsilon<min\{\beta,1-\beta\}$. Допустим, что $\lambda(K)=+\infty$ или $\mathrm{diam(K)}<+\infty$. Тогда существует положительное число C такое, что для любого $f\in L^1_{loc}(K)$ и и для любой $x\in K,$ справедливо неравенство

$$|\mathrm{I}_\beta f(x)| \le C\sqrt{\mathrm{M}_{\beta-\varepsilon} f(x) \mathrm{M}_{\beta+\varepsilon} f(x)}.$$

В пятой главе изучены свойства обобщенных потенциалов на неоднородных пространствах. В 5.1 исследованы существование и непрерывность, как функции от x, логарифмических потенциалов на неоднородных пространствах.

Определение 8 Пусть $d > 0$. Через пространство $(X, \rho, \mu)^d$ обозначим множество X с квазиметрикой ρ и неотрицательной Бореловской мерой μ в X, $supp\mu = X$, $diam X = \infty$ и существует постоянное число $C \ge 1$ такое, что для всех чисел $r > 0$ и всех точек $x \in X$

$$\mu(B(x,r)) \le Cr^d,$$

где $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$.

В $(X, \rho, \mu)^d$ рассмотрим логарифмический потенциал

$$Lf(x) = \int_X \ln \frac{1}{\rho(x,y)} f(y) d\mu(y).$$

Теорема 21 Пусть $(X, \rho, \mu)^d$ неоднородное пространство и f неотрицательная μ-локально интегрируемая функция в X. Тогда следующие условия эквивалентны:

$(log1)$ $Lf(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и $Lf < +\infty$ μ-почти всюду в X.

$(log2)$ существует $x_0 \in X$ такое, что $\int_{X \setminus B(x_0,1)} \ln(\rho(x_0, y)) f(y) d\mu(y) < +\infty;$

$(log3)$ для любого $x \in X$

$$\int_{X \setminus B(x,1)} \ln(\rho(x,y)) f(y) d\mu(y) < +\infty;$$

$(log4)$ существует $a \in X$ такое, что

$$\int_X \ln(2 + \rho(a,y)) f(y) d\mu(y) < \infty. \qquad (10)$$

Теорема 22 Пусть $(X, \rho, \mu)^d$ неоднородное пространство и f неотрицательная μ-локально интегрируемая функция в X и выполняются условия (10) и $\int_X \ln(2 + f(y)) f(y) d\mu(y) < +\infty$. Тогда $Lf(x)$ непрерывен в X.

В параграфе 5.2 доказана теорема об ограниченности в Лебеговых пространствах с разными мерами интегралов типа обобщенного потенциала на неоднородных пространствах.

Пусть (X,μ) пространство с положительной мерой μ. Через $L^p(X,d\mu)$ обозначим класс всех μ-измеримых функций $f: X \to (-\infty,+\infty)$ с нормой $\|f\|_{p,\mu} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$.

Пусть μ и ν две положительные меры в X и T линейный оператор из $L^p(X,d\mu)$ в $L^q(X,d\nu)$, где $p,q \in (0,\infty)$. Если существует положительное постоянное число C такое, что для любого $f \in L^p(X,d\mu)$ выполняется неравенство $\|Tf\|_{q,\nu} \le C\|f\|_{p,\mu}$, то T называется оператором строгого типа $\left(L^p(X,d\mu), L^q(X,d\nu)\right)$.

Если существует положительное постоянное число C такое, что для любых $\beta > 0$ и $f \in L^p(X,d\mu)$ выполняется неравенство

$\nu\{x : |Tf(x)| > \beta\} \le \left(\frac{C\|f\|_{p,\mu}}{\beta} \right)^q$, то T называется оператором слабого типа $\left(L^p(X,d\mu), L^q(X,d\nu)\right)$.

Пусть μ и ν две положительные Бореловские меры в X, λ положительная функция в $X \times X$ и для любых $x \in X$, $r > 0$ шары $B(x,r) = \{y \in X, \lambda(x,y) < r\}$ μ и ν измеримы. Допустим, что существуют положительные постоянные числа M_1, M_2, и числа d и m такие, что для любых $x \in X$, $r > 0$ выполняются неравенства

$$\mu(B(x,r)) \le M_1 r^d, \qquad (11)$$

$$\nu(B(x,r)) \le M_2 r^m. \qquad (12)$$

Рассмотрим оператор

$$\Gamma f(x) = \int_X K(\lambda(x,y)) f(y) d\mu(y), \qquad (13)$$

где $K(\cdot)$ ядро.

В 5.2 доказана следующая теорема.

Теорема 23 Пусть $1 \le p < \infty$, μ и ν две положительные Бореловские меры в X, с условиями (11), (12) соответственно, и функция $K(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям

(K_1) $K:(0,\infty) \to (0,\infty)$ убывающая, взаимно однозначная функция и $\int\limits_0^h K(t)\, t^{d-1} < \infty$, для любого $h > 0$;

(K_2) Существуют положительная константа A_1 и положительное число σ такое, что для любого $h > 0$

$$-\int\limits_0^h \frac{dK(t)}{dt} t^{d+\frac{m-d}{p}}\, dt \le A_1 h^{\sigma};$$

(K_3) Существуют положительная константа A_2 и положительное число $\gamma(p) = \gamma(p,d)$ такое, что для любого $h > 0$

$$-\int\limits_h^\infty \frac{dK(t)}{dt} t^{\frac{d}{p'}}\, dt \le A_2 h^{-\gamma(p)}.$$

Тогда

$i)$ Если $f \in L^p(X, d\mu)$, то интеграл (13) сходится для ν -почти всех x.

$ii)$ Если $l = \left(1 + \dfrac{\sigma}{\gamma(p)}\right) p$, то Γ оператор слабого типа $\left(L^p(X, d\mu), L^l(X, d\nu)\right)$.

$iii)$ Если $1 < p < r$ и $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}\left[\dfrac{r-p}{r-1}\dfrac{\gamma(1)}{\sigma+\gamma(1)} + \dfrac{p-1}{r-1}\dfrac{\gamma(r)}{\sigma+\gamma(r)}\right]$, то Γ оператор строгого типа $\left(L^p(X, d\mu), L^q(X, d\nu)\right)$.

В 5.3 получены некоторые оценки для потенциалов Рисса и максимальных операторов дробного порядка в коммутативных гипергруппах.

В 5.4 даны теоремы об ограниченности в пространствах с переменным показателем обобщенных потенциалов без условия удвоения на меру.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Hajibayov M. On finite difference of Riesz potentials on the spaces of homogeneous type / Abstracts of International conference on math. and mech. Devoted to the anniversary from birthday of member of the corr. of NASA, prof I.T. Mamedov, Baku, 2005, p.83
2. Hajibayov M. On continuity of potential type integrals / Intern. Conference and workshop dedicated to the centennial of S.M. Nikolskii, Russian Acad. Of Scien. V.A.Steklov Math.Inst., Moscow, 2005, p.290
3. Гаджибеков М.К. Двухвесовые неравенства для анизотропных Риссовых потенциалов// Научные и Педагогические Известия Университета Одлар Юрду, 2005, N13, с.73-81
4. Гаджибеков М.К. Оценки конечных разностей Риссовых потенциалов // Современные методы физико-математических наук, Труды международной конференции, Россия, Орловский Государственный Университет, Орел, 2006, т.1, с.154-158
5. Hajibayov M. The potential - type operators on homogeneous groups // Trans. of NAS of Azerbaijan, Series of physical-tech. and math. Sci. 2006, v.26, No 1, pp.81-88
6. Hajibayov M. Behavior at infinity of convolution type integrals / Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 70-th anniversary of the corr. member of NAS of Azerbaijan, Prof. B.A.Isgenderov, Baku, 2006, p.56
7. Hajibayov M. $(L_p; L_q)$ properties of the potential-type integrals associated to non-doubling measures // Sarajevo J. Math., 2006, v.15, No 2, pp.173-180
8. Hajibayov M. Continuity properties of potentials on spaces of homogeneous type // The Abdus Salam ICTP, 2006, IC/2006/076, pp.1-13
9. Hajibayov M. Continuity of logarithmic potentials // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006, v.XXV(XXXII), pp.41-46
10. Hajibayov M. Boundedness of the generalized potential-type integral operators // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2006, v.XXIV(XXXII), pp.87-92
11. Hajibayov M. Boundedness of generalized Riesz potentials from Lebesque spaces with variable exponent into Orlics-Musielak spaces / Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 70-th anniversary of the academician of NAS of Azerbaijan, honoured scientist, Prof. A.D.Gadjiev, Baku, 2007, p.146
12. Hajibayov M. Convolution type integral operators at infinity, Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, Embedding theorems. Harmonic

Analysis // Collection of papers devoted to the 70-th anniversary of the academician A.D.Gadjiev, 2007, v.XIII, pp.212-222

13. Hajibayov M. Continuity properties of potentials on spaces of homogeneous type // Int. Journal of Math. Analysis, 2008, v.2, No 7, p.315 - 328

14. Hajibayov M. The boundedness of generalized Riesz potentials from variable Lebesgue spaces into Musielak-Orlicz spaces /Workshop "Variable exponent analysis and related topics", 2-5 September, 2008, Tbilisi, Georgia, p.8

15. Hajibayov M. Weighted estimates of generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces / Abstracts of 7-th International ISAAC Congress, London, 2008, p.53

16. Hajibayov M., Samko S. Generalized Riesz potentials in variable exponent Lebesgue spaces / Третья Международная конф. посв. 85-летию чл. корр. РАН, проф. Л.Д.Кудррявцева, 2008, Москва, с.95-96

17. Hajibayov M. Behavior at infinity of convolution type integrals // Acta Math. Univ. Comenian.(N.S.), 2009, v.78, No1, pp.75-85

18. Hajibayov M. Generalized Riesz potentials in weighted variable exponent Lebesgue spaces/ Abstracts of International conference on mathematics and mechanics devoted to the 50-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS os Azerbaijan, Baku, 2009, pp.303-304

19. Hajibayov M., Samko S. Generalized potentials in weighted variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces / International Conference on Mathematical Sciences, Istanbul, Turkey, 2009, p.282-283

20. Hajibayov M., Samko S. Weighted estimates of generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces // Operator Theory: Adv. and Appl., (2010), v.210, pp.107-122

21. Gadjiev A., Hajibayov M. Inequalities for B-convolution operators // TWMS J. Pure Appl. Math., 2010, v.1, No 1, pp.41-52

22. Hajibayov M., Samko S. Generalized potentials in variable exponent Lebesgue spaces on homogeneous spaces // Math. Nachr., 2011, v.284, No 1, pp.53-66

23. Hajibayov M. Boundedness of the Dunkl convolution operators //An. Univ. Vest Timis,. Ser. Mat.-Inform., 2011, v.49, No.1, pp.49-67

24. Гаджибеков М.К. Ограниченность обобщенных потенциалов в гипергруппах / Международный семинар

"Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения" посв. к 70 летию проф. С.Г.Самко, Ростов-на-Дону, 2011, с.23

25. Гаджибеков М.К., Шафиев М. Обобщенные потенциалы Рисса в гипергруппах / Теория функций и проблемы гармонического анализа Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею акад. И.И.Ибрагимова, Баку-2012, с.57-59

26. Hajibayov M. Riesz potentials on commutative hypergroups / Scientific conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 70-th anniversary of corr. memb. of NAS of Ukraine, Professor A.I. Stepanets, Kamianets-Podilsky, Ukraine, 2012, pp.129-130

27. Hajibayov M. Boundedness on Lorentz spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups / International mathematical conference "Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications" Sevastopol, 2013, pp.205-206

28. Hajibayov M. Estimates for fractional integrals and fractional maximal operators on commutative hypergroups // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2014, v.40, No 2, pp.88-96

29. Hajibayov M. Inequalities for convolutions of functions on commutative hypergroups // Azerb. J. Math., 2014, v.4, No 1, pp.92-107

30. Гаджибеков М.К. Предел на бесконечности обобщенных потенциалов в квазиметрических пространствах с мерой // Journal of Qafqaz University - Mathematics and computer science, 2014, v.2, No 2 p.204-210

31. Hajibayov M. Boundedness of generalized Riesz potentials on commutative hypergroups // International Mathematical Forum, 2015, v.10, No 7, pp.333 - 338

32. Hajibayov M. Limit at infinity of potential type integrals on abstract spaces / Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference Mathematical analysis, differential equations and their applications, MADEA-7, Baku, 2015, pp.60-61

33. Hajibayov M. Boundedness in Lebesgue spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups // Global Journal of Mathematical Analysis, 2015, v.3, No.1, pp.18-25

34. Hajibayov M. Limit at infinity of potential type integrals on abstract spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, 2015, v.5, No 1, pp.14-23

35. Hajibayov M. Generalized potentials on commutative hypergroups // Azerb. J. Math., 2015, v. 5, No 2, pp.37-46

36. Eroglu A., Hajibayov M. Two weighted inequalities for fractional integrals associated with the Laplace-Bessel differential operator / Intern. conf. on anal. and its appl., Kirshehir, Turkey, 2016, p.49

37. Eroglu A., Hajibayov M., Serbetci A. Two weighted inequalities for B-fractional integrals // Journal of Inequalities and Applications, 2016, DOI: 10.1186/s13660-016-1104-2, pp. 1-8

38. Hajibayov M., Weighted inequalities for B-fractional integrals / Intern. workshop on non-harmonic anal and differ. oper. Baku, Azerbaijan, 2016, p.41-42

39. Eroglu A., Hajibayov M. Two weighted inequalities for fractional integrals on Laguerre hypergroup // Integral Transforms Spec. Funct., 2017, v.28, No.3, pp.185-194. Online published 2016

MÜBARİZ QAFARŞAH OĞLU HACIBƏYOV

BÜRÜNMƏ TİPLİ İNTEQRAL OPERATORLARIN ARAŞDIRILMASI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi abstrakt fəzalarda – bircins fəzalarda, hiperqruplarda, qeyri-bircins fəzalarda verilmiş bürünmə tipli inteqral operatorların araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Belə ki dissertasiyada harmonik analizin bürünmə tip inteqral operatorlarının müxtəlif fəzalarda məhdudluğu məsələlərini, həmçinin bu operatorların funksiya kimi limit və kəsilməzlik xassələri öyrənilmişdir.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. Bircins fəzalarda ümumiləşmiş potensialların dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarından müəyyən Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri haqqında teorem isbat edilmişdir.
2. Bircins fəzalarda ümumiləşmiş potensialların çəkili dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarından müəyyən çəkili Musielak-Orliç fəzasına məhdud təsiri isbat edilmişdir.
3. Bircins fəzalarda ümumiləşmiş Riss potensialların varlığı və funksiya kimi kəsilməzliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
4. Kvazi metrikaya görə bir-birinə yaxın nöqtələrdə, bircins fəzalarda Riss potensialların sonlu artımının özünü aparması öyrənilmişdir.
5. Ümumiləşmiş Riss potensialların sonsuzluqda özünü aparması haqqında zəruri və kafi şərt alınmışdır.
6. Kommutativ hiperqruplarda Riss potensialların çəkili Lebeq fəzalarında məhdud təsiri üçün yerdəyişmə funksiyası terminlərində kafi şərt təpılmışdır.
7. Kommutativ hiperqruplarda ümumiləşmiş Riss potensialları üçün Nakai-Sumitomo teoreminin analoqu isbat edilmişdir.
8. Kommutativ hiperqruplarda iki funksiyanın bürünməsi üçün ONeil bərabərsizliyi və ümumiləşmiş Yunq bərabərsizliyi isbat edilmişdir.
9. Hiperqruplarda Riss potensialları, Hardi-Littvuld maksimal operatoru və kəsr maksimal operatorlar arasında müəyyən nöqtəvi qiymətləndirmələr tapılmışdır.
10. Qeyrı-bircins fəzalarda loqarifmik potensialların varlığı və funksiya kimi kəsilməzliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
11. Qeyri-bircins fəzalarda ümumiləşmiş Riss potensialların, müxtəlif ölçülərlə təchiz edilmiş Lebeq fəzalərında məhdudluğu araşdırılmışdır.

MUBARIZ GAFARSHAH OGLU HAJIBAYOV

INVESTIGATION OF CONVOLUTION TYPE INTEGRAL OPERATORS

ABSTRACT

The thesis is devoted of investigation of convolution type integral operators on homogeneous spaces, hypergroups and nonhomogeneous spaces. The boundedness problems in different spaces, and the limit and the continuity properties of convolution type integral operators of harmonic analysis are studied in the thesis.

The following main results have been obtained in the thesis.

1. The theorem on the boundedness from Lebesgue spaces of variable exponent to the sertain Musielak-Orlicz spaces has been proved for generalized potentials on homogeneous spaces.
2. The boundedness from variable Lebesgue spaces of variable exponent to the sertain variable Musielak-Orlicz spaces has been proved for generalized potentials on homogeneous spaces.
3. The theorems about the existense and the continuity as a function, have been proved for generalized Riesz potentials on homogeneous spaces.
4. The behavior of finite differences of Riesz potentials on homogeneous spaces has been studied in the points close each other.
5. A necessary and sufficient condition has been obtained for the behavior of generalized Riesz potentials.
6. A sufficient condition has been found in the terms of permutation functions, for the boundedness in weighted Lebesgue spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups.
7. An analogue of Nakai-Sumitomo’s Theorem has been proved for the generalized Riesz potentials on commutative hypergroups.
8. The O’Neil inequality and the generalized Young inequality have been proved for a convolution of two functions on commutative hypergroups.
9. Pointwise estimates between Riesz potentials, the Hardy-Litlewood maximal operator and fractional maximal operators on hypergroups have been received.
10. The theorems about the existense and the continuity as a function, have been proved for logarithmic potentials on nonhomogeneous spaces.
11. The boundedness in Lebesgue spaces, provided with different measures, has been investigated for generalized Riesz potentials on nonhomogeneous spaces.

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

Əlyazması hüququnda

MÜBARİZ QAFARŞAH OĞLU HACIBƏYOV

BÜRÜNMƏ TİPLİ İNTEQRAL OPERATORLARIN ARAŞDIRILMASI

1202.01-Analiz və funksional analiz

riyaziyyat üzrə elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı-2017