НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙСЕЛЬ БЕЙБАЛА кызы ИМАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В ТЕРМИНАХ СРЕДНЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2018

Работа выполнена на кафедре «**Математический анализ**» **Бакинского Государственного Университета**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Рагим Рзаев**

Официальные оппоненты:
- доктор физико-математических наук, проф. **Фарман Мамедов** (SOCAR "Научно-Исследовательский Проектный Институт Нефти и Газа");
- профессор НАН Азербайджана, д.м.н. **Ровшан Бандалиев** (Института Математики и Механики НАНА).

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 06 апреля 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 16 февраля 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из мощных конструктивных методов в теории аналитических функций является метод интегральных представлений. Интегральное представление выражает значения любой функции, аналитической в области, через ее значения на границе или на части границы области.

В ряде статей, начиная с середины 1800-х годов, Коши разрабатывал то, что сейчас называют интегральной формулой Коши, которая справедлива для функций аналитических в замкнутой области.

После Коши другие учёные такие, как Сохоцкий, Племель и Привалов исследовали интеграл типа Коши, где граничная функция в формуле Коши заменяется соответствующей функцией, определённой только на единичной окружности. Для точек, лежащих на границе, интеграл Коши становится особым (сингулярным) и расходящимся в обычном смысле. Так как для аналитической функции, определяемой интегралом типа Коши, сам контур интегрирования является особой линией, то возникает вопрос исследования поведения интеграла типа Коши на самом контуре интегрирования. Кроме того, Сохоцкий, Племель и Привалов исследовали связь между плотностью и предельными значениями интеграла типа Коши, в смысле главного значения интеграла Коши.

Хорошо известно, что интеграл типа Коши тесно связан с сингулярными интегралами. Эта связь выражается формулами Сохоцкого. Так, исследование граничных значений интеграла типа Коши требует изучения соответствующих свойств сингулярных интегралов. Исследования сингулярных интегральных операторов начались в работах таких авторов, как А.Пуанкаре, Д.Гильберт, Н.Н.Лузин, И.И.Привалов и др. Эти исследования развивались в работах Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гахова, С.Г.Михлина, Т.Г.Гегелиа, З.И.Халилова, А.И.Гусейнова, А.Кальдерона, А.Зигмунда, И.Стейна, Ч.Фефферман, А.А.Бабаева, В.В.Салаева, А.Д.Гаджиева, С.Г.Самко, С.К.Абдуллаева, Е.Г.Гусейнова, Р.К.Сейфуллаева, Т.С.Салимова, В.С.Гулиева, Р.М.Рзаева и многих других.

Структурные свойства сингулярных интегральных операторов (многомерных, в целом) в терминах средней осцилляции функций исследовались многими авторами, такими как S.Spanne, J.Peetre, S.

Janson, Ch.Fefferman, И. Стейн, А.А.Кореновский, Р.М. Рзаев и т.д. В одномерном случае речь идет о преобразовании Гильберта.

Важным и актуальным представляется исследование предельных значений интеграла типа Коши с плотностью, принадлежащей пространствам, определяемым условиями на среднюю осцилляцию функций, а также, когда плотность является существенно ограниченной функцией.

Диссертационная работа посвящена исследованию радиальных предельных значений интеграла типа Коши в случае, когда контур интегрирования является бесконечной прямой. Условия на плотность интеграла даны в терминах пространств Лебега и в терминах средней осцилляции функций.

В работе также изучаются структурные свойства предельных значений интеграла типа Коши, описываемые в терминах средней осцилляции.

Цель работы. Цель диссертации состоит в исследовании граничного поведения интеграла типа Коши на бесконечной прямой в терминах средней осцилляции функций, а также в изучении структурных свойств предельных значений интеграла типа Коши, описываемых в терминах локального и глобального модулей средней осцилляции.

Общая методика исследований. В работе использованы методы теории функций действительного и комплексного переменного, теории интегральных операторов, теории функциональных пространств, гармонического анализа.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Введены нормированные пространства $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$, связанные с локальными свойствами локально суммируемых функций и найдены условия, при которых эти пространства совпадают и эквивалентны их нормы.
- Для преобразования Гильберта (модифицированного преобразования Гильберта) получена оценка типа Зигмунда в терминах локального модуля средней осцилляции. Как следствия оценки получены теоремы об ограниченности преобразования Гильберта в некоторых пространствах средней осцилляции.

- Получены оценки скорости приближения интеграла типа Коши к своим радиальным предельным значениям в случае, когда функция плотности принадлежит пространству $L^p(R)$, $1 \le p < \infty$.
- Получены оценки скорости приближения интеграла типа Коши (модифицированного интеграла типа Коши) к своим радиальным предельным значениям в случае, когда функция плотности является существенно ограниченной в R, а также найдены соответствующие формулы для радиальных граничных значений интеграла типа Коши (модифицированного интеграла типа Коши) по бесконечной прямой.
- Получены оценки скорости приближения интеграла типа Коши (модифицированного интеграла типа Коши) к своим радиальным предельным значениям в случае, когда функция плотности принадлежит пространству BMO_φ (R), а также найдены соответствующие формулы для радиальных граничных значений интеграла типа Коши (модифицированного интеграла типа Коши) по бесконечной прямой.
- Получена оценка скорости приближения интеграла Пуассона к своему угловому предельному значению в терминах локального модуля средней осцилляции.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании граничных свойств интеграла типа Коши, при решении краевых задач теории аналитических функций, а также в теории дифференциальных уравнений с частными производными и в некоторых задачах математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры «Математический анализ» в БГУ, на семинарах отдела «Математический анализ» в Институте Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Теория функций» в АГПУ.

Результаты диссертации докладывались автором также на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.-корр. НАНА, профессора И.Т.Мамедова (Баку, 2005), на Республиканской научной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.Ш.Габибзаде

(Баку, 2016), на Республиканской научной конференции «Актуальные задачи теоретической и прикладной математики», посвященной 100 летнему юбилею академика, заслуженного деятеля науки, профессора М.Л.Расулова (Шеки, 2016).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы содержащий 66 наименований. Объем диссертации 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы, приведен краткий исторический обзор ранее полученных результатов, связанных с темой диссертации, дан их краткий анализ и изложены основные результаты диссертации. Здесь также даны некоторые вспомогательные факты и понятия, связанные с тематикой диссертации.

Глава I посвящена изучению локальных свойств модифицированного преобразования Гильберта, которые описываются в терминах средней осцилляции.

В параграфе 1.1 вводятся понятие средней осцилляции локально суммируемой в R функции, а также метрические характеристики $\omega_f(x_0;\delta,\xi)$, $M_f(x_0;\delta,\xi)$, и рассматриваются некоторые их свойства.

Для функции $f \in L_{loc}(R)$ обозначим

$$f(I(x,r)) := \frac{1}{|I(x,r)|}\int_{I(x,r)} f(t)dt,$$

$$\Omega(f,I(x,r)) := \frac{1}{|I(x,r)|}\int_{I(x,r)} |f(t)-f(I(x,r))|dt.$$

Величина $\Omega(f,I(x,r))$ называется средней осцилляцией функции f на отрезке $I(x,r)=[x-r,x+r]$. Отметим, что равенство $\Omega(f,I(x,r))=0$ выполняется тогда и только тогда, когда функция f есть постоянная почти всюду на отрезке $I(x,r)$.

Далее, пусть $x_0 \in R$ фиксированная точка. Положим

$$\omega_f(x_0;\delta,\xi) = ess\sup\left\{\left|f(x)-f(y)\right| : \left|x-y\right| \le \delta, \quad x,y \in I(x_0,\xi)\right\}, \delta,\xi > 0;$$

$$M_f(x_0;\delta,\xi) = \sup\left\{\Omega(f,I(x,r)) : I(x,r) \subset I(x_0,\xi), r \le \delta\right\};$$

$$M_f(x_0;\delta) \equiv M_f(x_0;\delta,\delta) = \sup\left\{\Omega(f,I(x,r)) : I(x,r) \subset I(x_0,\delta)\right\};$$

$$m_f(x_0;\delta) = \sup\left\{\Omega(f,I(x_0,r)) : r \le \delta\right\}.$$

Положим также

$$\omega_f(\delta) = ess\sup\left\{\left|f(x)-f(y)\right| : \left|x-y\right| \le \delta, \quad x,y \in R\right\},$$

$$M_f(\delta) = \sup\left\{\Omega(f,I(x,r)) : r \le \delta, x \in R\right\} =$$

$$= \sup\left\{m_f(x;\delta) : x \in R\right\}, \ \delta > 0.$$

$\omega_f(\delta)$ – называется модулем непрерывности функции f, а $M_f(\delta)$ – называется модулем средней осцилляции функции f.

Далее в параграфе 1.1 вводятся пространства, определяемые условиями на среднюю осцилляцию. Отметим, что классы функций, определяемые условиями на среднюю осцилляцию, были изучены в работах многих авторов, из которых отметим S.Campanato, N.G.Meyers, F.John, L.Nirenberg, S.Spanne, J.Peetre, Ch.Fefferman, E.M.Stein, R.DeVore, R.Sharpley, S.Janson, Дж.Гарнетт, П.Кусис, А.А.Кореновский, Р.М.Рзаев и др.

Если $f \in L^1_{loc}(R)$ и $\sup\left\{\Omega(f,I) : I \subset R\right\} < \infty$, где точная верхняя грань берется по всем отрезкам $I \subset R$, то говорят, что функция f имеет ограниченную среднюю осцилляцию в R и пишут так: $f \in BMO(R)$ или просто $f \in BMO$. Отметим, что пространство BMO впервые было введено в работе Джона и Ниренберга в 1961 г.

Пусть $\psi(\delta,\xi)$ и $\varphi(\delta)$ положительные монотонно возрастающие по каждому аргументу функции, определенные соответственно при $(\delta,\xi) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ и $\delta \in (0,+\infty)$ и пусть $x_0 \in R$ фиксированная точка.

Через $BMO_\varphi = BMO_\varphi(R)$ обозначим множество всех функций $f \in L_{loc}(R)$, которые удовлетворяют условию

$$\|f\|_{BMO_\varphi} := \sup\left\{\frac{M_f(\delta)}{\varphi(\delta)}:\ \delta>0\right\} < +\infty.$$

Другими словами,

$$BMO_\varphi = \left\{f \in L_{loc}(R):\ M_f(\delta) = O(\varphi(\delta)),\quad \delta>0\right\}.$$

Если $\varphi(t)\equiv 1$, тогда BMO_φ обычное BMO.

Далее, рассмотрим пространства $BMO_\psi^{x_0}$ и $BMO_\varphi(x_0)$, а также пространство VMO.

$$BMO_\psi^{x_0} = \left\{f \in L_{loc}(R):\ M_f(x_0,\delta,\xi) = O(\psi(\delta,\xi)),\ 0<\delta\le\xi\right\},$$

$$BMO_\varphi(x_0) = \left\{f \in L_{loc}(R):\ M_f(x_0,\delta) = O(\varphi(\delta)),\ \delta>0\right\},$$

$$VMO = \left\{f \in BMO: \lim_{\delta\to 0} M_f(\delta) = 0\right\}.$$

Отметим, что в 1.1 введены также некоторые леммы, которые необходимы для дальнейшей работы.

В параграфе 1.2 рассматриваются пространства $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$.

Пусть $\varphi\in\Phi$, $1\le\theta\le\infty$. Через $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ обозначим совокупность всех функций $f\in L_{loc}^\infty(R)$, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}} = \sup_{\xi\ge 0}\left(\int_0^\infty\left(\frac{\omega_f(x_0;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta=\infty$; а через $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$ обозначим совокупность всех функций $f\in L_{loc}(R)$, для которых выполняется условие

$$\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}} = \sup_{\xi\ge 0}\left(\int_0^\infty\left(\frac{M_f(x_0;t,\xi+t)}{\varphi(t,\xi+t)}\right)^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

с соответствующей модификацией в случае $\theta=\infty$.

В этом параграфе изучаются связи между пространствами $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$. Установлены соотношения между нормами этих пространств. А именно, в частности, получен следующий результат.

Теорема 1.2.3. Пусть $\varphi \in \Phi$, $\varphi(2\delta,\xi) \approx \varphi(\delta,\xi)$ равномерно относительно ξ, $\varphi(\delta,2\xi) \approx \varphi(\delta,\xi)$ равномерно относительно δ, $(\xi,\delta) \in (0,+\infty)^2$ и при $1 \le \theta \le \infty$

$$\sup_{\xi \ge 0} \left\| \frac{1}{\varphi(x,\xi+x)} \left\| \frac{\varphi(t,\xi+x+t)}{t} \right\|_{L^{\theta'}_{([0,x],dt)}} \right\|_{L^{\theta}_{([0,+\infty),dx)}} < \infty,$$

где $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$. Тогда $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0} = H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и существуют такие положительные постоянные c_1, c_2, что для любой функции f будет верно неравенство

$$c_1 \|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}} \le \|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}} \le c_2 \|f\|_{H_{\varphi,\theta}^{x_0}} .$$

В параграфе 1.3 рассматривается преобразование Гильберта.

Определение 1.3.1. Пусть $f \in L^p(R)$, $1 \le p < \infty$. Преобразование Гильберта функции f определяется следующим образом:

$$Hf(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt.$$

Рассмотрим преобразование Гильберта существенно ограниченной функции**.**

Определение 1.3.2. Преобразование Гильберта (модифицированное преобразование Гильберта) функции $f \in L^\infty(R)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{H}f(x) = v.p.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t)dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t)dt, \varepsilon > 0, \ x \in R.$$

В этом параграфе исследовано поведение преобразования Гильберта в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций. Были получены следующие результаты.

Теорема 1.3.1. Пусть $f \in L_{loc}(R)$, $x_0 \in R$. Тогда при сходимости интеграла в правой части верно неравенство

$$M_{\tilde{H}f}(x_0;\delta,\xi) \le c \cdot \delta \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(x \int_{x}^{+\infty} \frac{M_f(x_0;x,\xi+t)}{t^2}dt \right)dx,$$

где $c > 0$ абсолютная постоянная.

Как следствия оценки получены теоремы об ограниченности преобразования Гильберта в некоторых пространствах средней осцилляции.

Терема 1.3.2. Если

$$Z(\psi;\delta,\xi) \equiv \delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{x^2}\left(x \int_{x}^{\infty} \frac{\psi(x,\xi+t)}{t^2}dt \right)dx = O(\psi(\delta,\xi)), \delta > 0, \xi > 0,$$

то оператор $\tilde{H}$ ограниченно действует из $BMO_{\psi}^{x_0}$ в $BMO_{\psi}^{x_0}$.

Терема 1.3.3. Если

$$F(\varphi;\delta) \equiv \delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}dt = O(\varphi(\delta)),\ \delta > 0,$$

то оператор $\tilde{H}$ ограниченно действует из BMO_{φ} в BMO_{φ}.

Терема 1.3.4. Если

$$F(\varphi;\delta) = O(\varphi(\delta)),\ \delta > 0,$$

то оператор $\tilde{H}$ ограниченно действует из $BMO_{\varphi}(x_0)$ в $BMO_{\varphi}(x_0)$.

Терема 1.3.5. Оператор $\tilde{H}$ ограниченно действует из BMO в BMO.

Терема 1.3.6. Оператор $\tilde{H}$ ограниченно действует из VMO в VMO.

Глава II посвящена изучению предельных значений интеграла типа Коши с плотностью f принадлежащей пространству $L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$.

В параграфе 2.1 даны основные определения, обозначения и предварительные сведения, которые необходимы для дальнейшей работы.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = Kf(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt,\ z \in C,\ f \in L^p(R),\ 1 \le p < \infty .$$

А также интеграл типа Коши существенно ограниченной функции, т.е. функции $f \in L^\infty(R)$

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right\}f(t)dt,\ z \in C.$$

Выделяя действительную и мнимую части ядер $\dfrac{1}{t-z}$ и $\dfrac{1}{t-z} - \dfrac{t}{1+t^2}$, получим представление интеграла типа Коши через интеграл Пуассона и сопряженный интеграл Пуассона:

$$\Phi(z) = Kf(z) = \frac{1}{2}\left(P_y f(x) + iQ_y f(x)\right),\ z = x+iy,\ y>0,$$

$$\Phi(z) = Kf(z) = \frac{1}{2}\left(-P_y f(x) + iQ_y f(x)\right),\ z = x-iy,\ y>0,$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{K}f(z) = \frac{1}{2}\left(P_y f(x) + i\tilde{Q}_y f(x)\right),\ z = x+iy,\ y>0,$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{K}f(z) = \frac{1}{2}\left(-P_y f(x) + i\tilde{Q}_y f(x)\right),\ z = x-iy,\ y>0.$$

Эти формулы показывают, что вопрос изучения предельных значений интеграла типа Коши сводится к исследованию предельных значений интеграла Пуассона и сопряженного интеграла Пуассона.

Отметим, что интеграл Пуассона функции $f \in L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$ определяется как

$$P_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t)dt\,,$$

а сопряженный интеграл Пуассона определяется как

$$Q_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} f(t)dt$$

в случае $f \in L^p(R),\ 1 \le p < \infty$, и

$$\tilde{Q}_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^2} + \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t)dt$$

в случае $f \in L^\infty(R)$.

В параграфе 2.1. введены также понятия *d, l* и *m* точек для локально интегрируемой функции и понятие локальной метрической характеристики функции $f \in L^p_{loc}(R),\ 1 \le p < \infty$

$$\omega_f(x;\delta)_p := \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \left(\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \left| f(t) - f(x) \right|^p dt \right)^{1/p} \right\},\quad \delta > 0$$

и функции $f \in L^\infty_{loc}(R)$.

$$\omega_f(x;\delta)_\infty := \sup_{|h|\le\delta} \left\| f(\cdot) - f(x) \right\|_{L^\infty_{(x-h,x+h)}},\ \delta > 0\,.$$

Отметим, что при этом имеет место неравенство

$$\omega_f(x;\delta)_1 := \omega_f(x;\delta) \le \omega_f(x;\delta)_p,\ 1 \le p \le \infty,\ \delta > 0\,.$$

Определение 2.1.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(I(x_0,\varepsilon)\right) =: s_f(x_0),$$

тогда точка $x_0 \in R$ называется d -точкой для $f \in L_{loc}(R)$. Множество всех d -точек функции f обозначим через $D(f)$.

Определение 2.1.2. Точка $x_0 \in R$ называется l -точкой для функции $f \in L_{loc}(R)$, если существует конечное число $l_f(x_0)$ такое, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|I(x_0,\varepsilon)|} \int_{I(x_0,\varepsilon)} |f(t) - l_f(x_0)| dt = 0 .$$

Множество всех l -точек функции f обозначим через $L(f)$. Известно, что если $f \in L_{loc}(R)$, тогда почти все точки $x \in R$ являются l -точками функции f и почти всюду имеет место равенство $l_f(x) = f(x)$.

Определение 2.1.3. Если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m_f(x_0;\varepsilon) = 0 ,$$

тогда точка $x_0 \in R$ называется m -точкой для $f \in L_{loc}(R)$. Множество всех m -точек функции f обозначим через $M(f)$.

Определение 2.1.4. Точка $x_0 \in R$ называется точкой Лебега функции $f \in L_{loc}(R)$, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|I(x_0,\varepsilon)|} \int_{I(x_0,\varepsilon)} |f(t) - f(x_0)| dt = 0 .$$

Множество точек Лебега функции f называют его лебеговым множеством. Почти каждая точка $x \in R$ является точкой Лебега функции $f \in L_{loc}(R)$.

В параграфе 2.2 изучены предельные значения интеграла Пуассона в случае $f \in L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$, оценена разность $|P_y f(x) - f(x)|$, а точнее доказана

Теорема 2.2.1. Пусть функция $f \in L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$, x - точка Лебега функции f . Тогда верна следующая оценка

$$|P_y f(x) - f(x)| \le cy \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;t)}{t^2} dt, \quad y > 0 ,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от *x*, *y* и функции *f*. Из этой теоремы с помощью неравенства

$$\omega_f(x;\delta) \le \omega_f(x;\delta)_p, \ 1 \le p \le \infty, \ \delta > 0,$$

доказанного в 2.1 получается следующее утверждение.

Следствие 2.2.1. Пусть $f \in L^p(R)$, $1 \le p \le \infty$, и выполняется условие

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(x;\delta)_p = 0.$$

Тогда верно неравенство

$$\left| P_y f(x) - f(x) \right| \le cy \int_y^{\infty} \frac{\omega_f(x;t)_p}{t^2} dt, \quad y > 0,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от *x, y* и функции *f*.

Из последнего утверждения, в частности, получаем, что если $f \in L^p(R)$ $(1 \le p \le \infty)$, $0 < \alpha < 1$ и

$$\omega_f(x;t)_p = O(t^\alpha) \quad (t > 0),$$

то верно соотношение

$$\left| P_y f(x) - f(x) \right| = O(y^\alpha), \quad y > 0.$$

Параграфы 2.3 и 2.4 посвящены исследованию предельных значений сопряженного интеграла Пуассона. В 2.3 оценивается разность $\left| Q_y f(x) - H_y f(x) \right|$ в случае, когда функция плотности *f(t)* принадлежит пространству $L^p(R)$, где $1 \le p < \infty$, а именно доказана

Теорема 2.3.1. Пусть функция $f \in L^p(R)$, $1 \le p < \infty$, x - точка Лебега функции f. Тогда верна следующая оценка

$$\left| Q_y f(x) - H_y f(x) \right| \le cy^2 \int_y^{+\infty} \frac{\omega_f(x;t)}{t^3} dt, \quad y > 0,$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от *x, y* и функции *f*.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 2.3.1. Пусть $f \in L^p(R)$, $1 \le p < \infty$ и выполняется условие $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(x;\delta)_p = 0$. Тогда верно неравенство

$$\left| Q_y f(x) - H_y f(x) \right| \le cy^2 \int_y^{+\infty} \frac{\omega_f(x;t)_p}{t^3} dt, \quad y > 0$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от *y, x* и функции *f*.

В 2.4 оценивается величина $\left|\widetilde{Q}_y f(x) - \widetilde{H}_y f(x)\right|$ для сопряженного интеграла Пуассона существенно ограниченной функции, т.е. функции $f \in L^\infty(R)$. Получен следующий результат.

Теорема 2.4.1. Пусть f –существенно ограниченная функция, т.е. $f \in L^\infty(R)$, x – точка Лебега функции *f*. Тогда верна следующая оценка

$$\left|\widetilde{Q}_y f(x) - \widetilde{H}_y f(x)\right| \le c y^2 \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;\tau)}{\tau^3} d\tau + \frac{1}{2\pi} |f(x)| \left|\ln \frac{(x-y)^2+1}{(x+y)^2+1}\right|,$$

$$0 < y \le 1,$$

где положительная постоянная *c* не зависит от *y*, *x* и *f*.

В параграфе 2.5 для интеграла типа Коши получены следующие оценки:

$$\left|\Phi(z) - \frac{1}{2}\left(f(x) + iH_y f(x)\right)\right| \le const \cdot y \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;t)}{t^2} dt, \quad z = x+iy, \quad y>0,$$

$$\left|\Phi(z) - \frac{1}{2}\left(-f(x) + iH_y f(x)\right)\right| \le const \cdot y \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;t)}{t^2} dt, \quad z = x-iy, \quad y>0.$$

для почти всех $x \in R$, в случае, когда $f \in L^p(R)$, $1 \le p < \infty$ и

$$\left|\widetilde{\Phi}(z) - \frac{1}{2}\left(f(x) + i\widetilde{H}_y f(x)\right)\right| \le$$

$$\le const \cdot y \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;t)}{t^2} dt + \frac{1}{2\pi} |f(x)| \left|\ln \frac{(x-y)^2+1}{(x+y)^2+1}\right|, \quad z = x+iy, \ 0<y \le 1.$$

$$\left|\widetilde{\Phi}(z) - \frac{1}{2}\left(-f(x) + i\widetilde{H}_y f(x)\right)\right| \le$$

$$\le const \cdot y \int_y^\infty \frac{\omega_f(x;t)}{t^2} dt + \frac{1}{2\pi} |f(x)| \left|\ln \frac{(x-y)^2+1}{(x+y)^2+1}\right|, \quad z = x-iy, 0<y \le 1.$$

для почти всех $x \in R$, в случае, когда функция плотности существенно ограниченная, т.е. $f \in L^\infty(R)$.

Отметим, что в этом параграфе получены также следующие следствия:

Следствие 2.5.1. Пусть функция $f \in L^p(R)$, $1 \le p < \infty$, x - точка Лебега функции f и в точке x существует следующий предел:

$$Hf(x) = \lim_{y \to 0} H_y f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>y} \frac{f(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

тогда

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + iHf(x) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{2} f(x),$$

$$\Phi^-(x) = \frac{1}{2}\left(-f(x) + iHf(x) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt - \frac{1}{2} f(x).$$

Следствие 2.5.2. Пусть функция $f \in L^\infty(R)$, x - точка Лебега функции f и в точке x существует следующий предел:

$$\tilde{H}f(x) = \lim_{y \to 0} \tilde{H}_y f(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>y} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t) dt,$$

тогда

$$\tilde{\Phi}^+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + i\tilde{H}f(x) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{t-x} - \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t) dt + \frac{1}{2} f(x),$$

$$\tilde{\Phi}^-(x) = \frac{1}{2}\left(-f(x) + i\tilde{H}f(x) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{t-x} - \frac{t}{1+t^2} \right\} f(t) dt - \frac{1}{2} f(x).$$

Отметим, что здесь

$$\tilde{\Phi}^+(x) = \lim_{y \to +0} \tilde{\Phi}(x+iy);$$

$$\tilde{\Phi}^-(x) = \lim_{y \to -0} \tilde{\Phi}(x+iy).$$

Глава III посвящена изучению предельных значений модифицированного интеграла типа Коши с плотностью f принадлежащей пространству BMO_{φ}.

В параграфе 3.1 изучаются предельные значения интеграла Пуассона в случае $f \in BMO_{\varphi}$. Получена оценка для величины $\left|P_y f(x) - f(I(x,y))\right|$.

Терема 3.1.1. Пусть $x \in R$ и $f \in L_{loc}(R)$. Тогда имеет место следующая оценка

$$\left|P_y f(x) - f(I(x,y))\right| \le cy\int_y^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^2}dt, \qquad y > 0,$$

где c положительная абсолютная постоянная.

Следствие 3.1.2. Пусть $x \in R$, $f \in L_{loc}(R)$. Если

$$\int_1^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^2}dt < +\infty$$

и $x \in L(f)$, тогда $\lim\limits_{y\to 0} P_y f(x) = l_f(x)$.

В параграфе 3.2 исследуются предельные значения сопряженного интеграла Пуассона. Оценивается величина $\left|\tilde{Q}_y f(x) - \tilde{H}_y f(x)\right|$.

Теорема 3.2.1. Пусть $f \in L_{loc}(R)$. Тогда для $0 < y \le 1$ и $x \in R$ имеет место следующая оценка

$$\left|\tilde{Q}_y f(x) - \tilde{H}_y f(x)\right| \le C\left(y^2\int_y^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^3}dt + \left|f(I(x,y))\right|\left|\ln\frac{1+(x-y)^2}{1+(x+y)^2}\right|\right),$$

где C положительная абсолютная постоянная.

Следствие 3.2.3. Пусть $f \in L_{loc}(R)$, $x \in M(f)$ и

$$\int_1^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^3}dt < +\infty, \ \sup_{0<y\le 1}\frac{1}{\left|I(x,y)\right|}\int_{I(x,y)}\left|f(t)\right|dt < +\infty.$$

Если один из пределов $\lim\limits_{y\to 0}\tilde{Q}_y f(x)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\tilde{H}_y f(x)$ существует, тогда другой также существует, более того они равны.

Следствие 3.2.4. Пусть $f \in BMO_\varphi$ и $\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}dt < +\infty$. Тогда почти всюду существует предел

$$\lim_{y\to 0} \widetilde{Q}_y f(x) = \widetilde{H}f(x).$$

В параграфе 3.3 исследуются радиальные граничные значения интеграла типа Коши с функцией плотности f принадлежащей пространству BMO_φ.

Для $0 < y \le 1,\ z = x + iy$, имеет место неравенство

$$\left|\widetilde{K}f(z) - \frac{1}{2}\left(i\widetilde{H}_y f(x) + f\left(I(x,y)\right)\right)\right| \le$$

$$\le c\left(y\int_y^\infty \frac{m_f(x;t)}{t^2}dt + \left| f(I(x,y))\ln\frac{1+(x-y)^2}{1+(x+y)^2}\right|\right),$$

где c является положительной абсолютной постоянной.

Если $z = x - iy$, $0 < y \le 1$, тогда аналогично получим

$$\left|\widetilde{K}f(z) - \frac{1}{2}\left(i\widetilde{H}_y f(x) - f\left(I(x,y)\right)\right)\right| \le$$

$$\le c'\left(y\int_y^\infty \frac{m_f(x;t)}{t^2}dt + \left| f(I(x,y))\ln\frac{1+(x-y)^2}{1+(x+y)^2}\right|\right),$$

где c' является положительной абсолютной постоянной.

Из этих неравенств вытекает следующая

Теорема 3.3.1. Если $f \in L_{loc}(R)$, $x \in L(f)$, существует сингулярный интеграл $\widetilde{H}f(x)$ и

$$\int_1^\infty \frac{m_f(x;t)}{t^2}dt < +\infty,$$

тогда верны следующие формулы

$$(\widetilde{K}f)^{+}(x) := \lim_{y\to+0} \widetilde{K}f(x+iy) = \frac{1}{2}\left(i\frac{1}{\pi} v.p.\int_{R} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^{2}} \right\} f(t)dt + l_{f}(x) \right),$$

$$(\widetilde{K}f)^{-}(x) := \lim_{y\to+0} \widetilde{K}f(x-iy) = \frac{1}{2}\left(i\frac{1}{\pi} v.p.\int_{R} \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^{2}} \right\} f(t)dt - l_{f}(x) \right).$$

Последние равенства являются аналогами формул Ю. В. Сохоцкого для радиальных граничных значений интеграла типа Коши, когда плотность удовлетворяет условию $\int_{1}^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^2} dt < +\infty$

(если $f \in BMO_{\varphi}$ и $\int_{1}^{\infty} t^{-2}\varphi(t)dt < +\infty$, тогда условие $\int_{1}^{\infty} \frac{m_f(x;t)}{t^2} dt < +\infty$ выполняется в каждой точке $x \in R$ и $\widetilde{H}f(x)$ существует п. в. в R).

Параграфы 3.4 и 3.5 посвящены исследованию угловых граничных значений интеграла Пуассона.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Р.М.Рзаеву за постановку задачи, полезные обсуждения полученных результатов, ценные замечания и поддержку.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в следующих работах:

1. Пашаева А.Б. О предельных значениях сопряженного интеграла Пуассона существенно ограниченной функции / Тезисы Междунар. конф. по мат. и мех., посв. 50-летнему юбилею проф. И.Т.Мамедова. Баку, 2005, с.159.
2. Pashayeva A.B. Some estimates for boundary values of Poisson's conjugate integral // Khazar jour. of Math., 2006, v.2, p.61-70.

3. Rzaev R.M., Imanova A.B. Some boundary properties of Cauchy type integral in terms of mean oscillation // WSEAS Transactions on Mathematics, 2012, v.11, issue 2, p.135-145.
4. Imanova A.B. Angular boundary values of Poisson integral in terms of mean oscillation // Proc. of Inst. of Math. and Mech. of NASA, Baku, 2012, p.51-60.
5. Иманова А.Б. Оператор Hf в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций / Материалы Респ. науч. конф. «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летию со дня рождения засл. деят. науки, проф. А.Ш. Габибзаде. Баку, 2016, с. 150-152.
6. Рзаев Р.М., Иманова А.Б. О некоторых пространствах, связанных с локальными свойствами функций / Материалы Респ. науч. конф. «Актуальные задачи теоретической и прикладной математики», посв. 100- летнему юбилею акад., засл. деят. науки, проф. М.Л.Расулова, Шеки, 2016, с.252-255.
7. Рзаев Р.М., Иманова А.Б. О пространствах $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ и $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$ // Известия педагогического университета, 2016, т.64, №1, с.36-45.
8. Иманова А.Б. Преобразования Гильберта в пространствах, определяемых условиями на среднюю осцилляцию функций // Известия педагогического университета, 2017, т. 65, №1, с. 74-85.

AYSEL BEYBALA qızı İMANOVA

ORTA OSSİLYASİYA TERMİNLƏRİNDƏ KOŞİ TİPLİ İNTEQRALIN SƏRHƏD QİYMƏTLƏRİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi həqiqi ox üzrə verilmiş Koşi tipli inteqralın radial sərhəd qiymətlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Sıxlıq funksiyasının xassələri Lebeq fəzaları terminlərində və orta ossilyasiya terminlərində verilir. Dissertasiya işində həm də Koşi tipli inteqralın sərhəd qiymətlərinin orta ossilyasiya terminləri ilə təsvir olunan struktur xassələri öyrənilir.

Dissertasiya işində aşağıdaki əsas nəticələr alınmışdır:

- Lokal cəmlənən funksiyaların lokal xassələri ilə əlaqədar $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ və $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$ normallaşmış fəzalarının üst-üstə düşməsini və normaların ekvivalentliyini təmin edən şərtlər tapılmışdır;
- Modifikasiya olunmuş Hilbert çevrilməsi üçün lokal orta ossilyasiya modulu terminlərində Ziqmund tipli qiymətləndirmə alınmışdır. Qiymətləndirmənin nəticəsi kimi bəzi orta ossilyasiya fəzalarında Hilbert çevrilməsinin məhdudluğu haqqında teoremlər alınmışdır;
- Sıxlıq funksiyası $L^p(R),\ 1 \leq p < \infty$ fəzasına daxil olan hal üçün Koşi tipli inteqralın öz radial sərhəd qiymətlərinə yaxınlaşma sürətinin qiymətləndirmələri alınmışdır;
- Sıxlıq funksiyası R –də mühüm məhdud olan hal üçün modifikasiya olunmuş Koşi tipli inteqralın öz radial sərhəd qiymətlərinə yaxınlaşma sürətinin qiymətləndirmələri alınmışdır, eləcə də Koşi tipli inteqralın həqiqi ox üzrə radial sərhəd qiymətləri üçün uyğun düsturlar tapılmışdır;
- Sıxlıq funksiyası $BMO_{\varphi}\ (R)$ fəzasına daxil olan hal üçün modifikasiya olunmuş Koşi tipli inteqralın öz radial sərhəd qiymətlərinə yaxınlaşma sürətinin qiymətləndirmələri alınmışdır, eləcə də həqiqi ox üzrə Koşi tipli inteqralın radial sərhəd qiymətləri üçün uyğun düsturlar tapılmışdır;
- Lokal orta ossilyasiya modulu terminlərində Puasson inteqralının öz bucaq limit qiymətlərinə yaxınlaşma sürətinin qiymətləndirməsi alınmışdır.

AYSEL BEYBALA kizi İMANOVA

STUDYİNG LİMİT VALUES OF THE CAUCHY TYPE İNTEQRAL İN THE TERMS OF MEAN OSCİLLATİON

ABSTRACT

The dissertation work is devoted to study of radial limit values of the Cauchy type inteqral in the case when the integration contour is an infinite straightline. The conditions of the density of the integral are given in the terms of Lebesgue spaces in the terms of mean oscillation of functions. In the work, structural properties of limit values of the Cauchy type integral described in the terms of mean oscillation are also studied.

In the work the following main results are obtained:

- The conditions under which the normed $H_{\varphi,\theta}^{x_0}$ and $BMO_{\varphi,\theta}^{x_0}$ spaces connected with local properties of locally summable functions coincide and their norms are eguivalent, are found.
- The Zigmund type estimation in the terms of local modulus of mean oscillation is obtained for modified Hilbert transformation.
- As a corollary, theorems on boundedness of Hilbert transformation in some spaces of mean oscillation, are obtained.
- The estimates of approximation velocity of the Cauchy type integral to its own radial limit values in the case when the density function belongs to the space $L^p(R)$, $1 \leq p < \infty$ are obtained.
- The estimates of approximation velocity of the Cauchy type modified integral of its non radial limit values in the case when the density function is essentially bounded in R, are obtained, corresponding formulas for radial boundary values of the Cauchy type integral along the infinite straight-line, are found.
- The estimates of approximation velocity of the Cauchy type modified integral to its non radial limit values in the case when the density function belongs to the space, are obtained, corresponding formulas for radial boundary values of the Cauchy type integral along the infinite straight-line, are found.
- The estimate of approximation velocity of the Poisson integral to its own angular limit value in the terms of local modulus of mean oscillation, is obtained.