НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МУРАДОВ ТОГРУЛ РАФАЭЛЬ ОГЛЫ

НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ И БАЗИСЫ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

1202.01 –Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2017

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научный консультант:
чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. **Билал Билалов**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Низамеддин Искендеров**
(Бакинский Государственный Университет)
- доктор физико-математических наук, проф. **Гамидулла Асланов**
(Институт Математики и Механики НАНА);
- доктор физико-математических наук, проф. **Гейбаткулу Мустафаев**
(Университет "Yüzüncü İl", Турция).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности кафедра «Общая и прикладная математика».

Защита диссертации состоится 06 июля 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии по математике при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 04 июня 2018 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория базисов является сравнительно молодым и самостоятельным направлением аппроксимации. В основе его лежит разложение (причем единственным образом) произвольного элемента линейного топологического пространства по заданной системе. Иначе говоря, с помощью линейных операций и топологии пространство порождается заданной системой. Главной чертой разложения является нахождение коэффициентов разложений определенным образом. Вопрос базисности заданной системы в теории приближений является очень важным и представляет большой научный интерес с точки зрения приложения во многих областях математики, механики и физики. Базисность системы из корневых элементов заданного линейного оператора в соответствующем линейном топологическом пространстве играет исключительную роль при решении операторных уравнений.

Все базисы одного и того же пространства равноправны в отношении этого пространства, так как все они, в определенном смысле, порождают данное пространство. С другой стороны они могут отличаться от пространства коэффициентов. Каждому базису рассматриваемого пространства однозначно соответствует некоторое пространство коэффициентов.

В последнее время (начиная с конца прошлого века) в связи с приложениями в конкретных задачах механики и математической физики интерес к изучению различных вопросов в лебеговых $L_{p(\cdot)}$ и соболевых $W^k_{p(\cdot)}$ пространствах функций с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$ сильно возрос.

Диссертационная работа, в целом, посвящена вопросам базисов в обобщенных пространствах Лебега и Соболева. Следует отметить, что вопросы теории аппроксимации не достаточно хорошо изучены в подобных пространствах. Желание получить аналоги многих классических результатов сталкивается с определенными трудностями. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является очень актуальной и представляет особый научный интерес. Следует отметить, что понятия бесселевы и гильбертовы системы, базисы Рисса были введены Н.К.Бари. На абстрактный банаховый случай пространства эти понятия были обобщены Б.Т.Билаловым.

Базисные свойства в лебеговых пространствах возмущенных тригонометрических систем с линейной фазой начаты изучаться в работах Н.Левинсона, Пэли-Винера. Существенные результаты в этом направлении получены в работах М.Н.Кадеца, А.М.Седлецкого, Е.И.Моисеева, Б.Т.Билалова и др. Базисные свойства классической системы экспонент и ее возмущения в обобщенных пространствах Лебега впервые были начаты изучатся в работах Н.И.Шарапудинова и Б.Т.Билалова. В работах Ю.А.Казьмина изучается базисность Рисса возмущенной системы косинусов и синусов с нецелыми индексами. Также отметим, что идея изучения базисных свойств возмущенных тригонометричсеких систем методами краевых задач для аналитических функций принадлежит А.В.Бицадзе. В последующем эта идея была существенно развита в работах С.М.Пономарева, Е.И.Моисеева и Б.Т.Билалова.

С точки зрения спектральной теории дифференциальных операторов возмущенные тригонометрические системы возникли в работах А.А.Шкаликова. Им изучена базисность Рисса полученных систем в пространстве L_2. В этом направлении нельзя не отметить работы авторов В.А.Диткина, К.Шайдукова, А.Г.Тумаркина, R.P.Feinerman, D.J.Newman, C.J.Tranter, S.Martin, B.Noble, J.K.Whiteman. К этому кругу исследований можно отнести работы Ю.А.Казьмина, А.Н.Барменкова, В.А.Ткаченко, Ю.И.Любарского, Б.Т.Билалова.

Цель работы. Изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность) различных экспоненциальных систем в весовых пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. При этом сперва определяются соответствующие весовые обобщенные классы Харди и изучаются задачи Римана теории аналитических функций в этих классах.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

-рассматриваются пространства Харди $H^{+}_{p(\cdot)}$ и ${}_{m}H^{-}_{p(\cdot)}$ в качестве подпространств пространства $L_{p(\cdot)}$, изучается базисность определенных частей системы экспонент в этих подпространствах;

-доказано, что если двойная система экспонент $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}}; B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$

с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, то она изоморфна в нем классической системе экспонент $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$;

- впервые изучена базисность возмущенной системы экспонент в обобщенном пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}$, а также базисность из возмущенных систем экспонент с единицей в весовом обобщенном пространстве Лебега, когда возмущение имеет определенную асимптотику;

-изучается задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом в обобщенных классах Харди и, применяя эти результаты, устанавливается базисность системы экспонент с кусочно – непрерывной фазой в $L_{p(\cdot)}$;

-рассматриваются базисы из двойных систем с операторными коэффициентами в банаховых пространствах, устанавливаются связи между базисностью этих систем и разрешимостью соответствующих операторных уравнений;

-впервые получено необходимое условие базисности абстрактных двойных систем и этот результат применен к известным системам экспонент;

-рассматривается гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств, вводится понятие t-разложения, порожденное билинейным отображением, определяемым гильбертовым тензорным произведением, доказывается теорема о t-разложении произвольного элемента гильбертова пространства по заданной системе после исключения конечного числа элементов;

-рассматриваются линейные метрические пространства, обладающие определенным свойством, вводится понятие невырожденной системы, доказывается, что такие системы имеют полное метрическое пространство коэффициентов с каноническим базисом; на языке коэффициентного оператора приведен критерий базисности;

-вводятся также аппроксимативные понятия как J-оболочка, J-полнота, J-минимальность и J-базис, J-пространство коэффициентов и J-каноническая система в нем; получен критерий J-базисности операторного семейства на языке J-коэффициентного оператора;

- устанавливаются связи между базисными свойствами двойных систем и соответствующими одинарными системами в пространствах $L_{p(\cdot)}$;

-впервые получен непрерывный аналог классической теоремы Пэли-Винера;

-предложен один метод установления базисов в соболевом пространстве $W^1_{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$;

-доказана базисность близких, в смысле мультипликатора, систем в банаховых пространствах. Эти результаты применены к возмущенной системе экспонент в лебеговом пространстве $L_{p(\cdot)}$. Получены $p(\cdot)$ -аналоги теоремы «$\frac{1}{4}$ – Кадеца» для систем экспонент, косинусов и синусов на языке мультипликатора;

-рассматривается задача Коши со спектральным параметром для оператора Штурма-Лиувилля. Доказано, что последовательность значений для спектрального параметра можно выбирать таким образом, чтобы соответствующая система решений образовывала изоморфный, к классическим тригонометрическим системам, базис в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости.

Методика исследования. В работе применяются методы теории функций действительного и комплексного переменных, теории дифференциальных уравнений, методы функционального анализа, в частности, теории линейных операторов в гильбертовом и банаховом пространствах, методы теории базисов, методы теории аппроксимации.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов при обосновании метода Фурье для решения различных задач математической физики и механики. Результаты также могут быть использованы в теории аппроксимации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах академика М.Г.Гасымова «Функциональный анализ и его приложения», на общеинститутском семинаре ИММ НАНА, на семинарах отделов «Негармонический анализ» (чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), «Функциональный

анализ» (проф. Г.И. Асланов), «Теория функций» (д.н. по математике В.Э.Исмайлов), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию чл.-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005 г.), на 12-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летнему юбилею чл.-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова (Баку, 2006 г.), на 13-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию акад. НАНА А.Д.Гаджиева (Баку, 2007 г.), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009 г.), на Международной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку, 2011 г.), на Международной конференции «Функ. прост. диф. операторы, общая топ. пробл. мат. образов.» посв. 85-летию Л.Д.Кудрявцева (г. Москва, 2008), на Международной конференции МАДЕА-7 (Баку, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 42 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 184 наименования. Объем диссертации 258 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится краткая история исследуемых вопросов, а также краткое содержание диссертационной работы.

Глава I во многих отношениях является очень важной при изложении и получении последующих результатов в диссертационной работе. В ней излагаются основные обозначения, понятия и факты, используемые в диссертационной работе. С целью облегчения чтения и полноты изложения, приводится полное доказательство базисности классической системы экспонент в весовых пространствах Лебега с

переменным показателем суммируемости. Также приводятся некоторые сведения из теории пространств Лебега с переменным показателем суммируемости. Определяются обобщенные весовые классы Харди и доказываются базисности частей системы экспонент в этих классах. Рассматривается двойная система экспонент с комплексными коэффициентами и при определенных условиях на коэффициенты доказывается, что в случае базисности этой системы в обобщенных пространствах Лебега, она изоморфна к классической системе экспонент в этом пространстве. Результаты этой главы существенно используются при последующих исследованиях в диссертационной работе.

В **1.1** приводяться необходимые понятия и факты из теории шаудеровых базисов. Примем следующие стандартные обозначения:

R – действительные числа; C – комплексные числа; N – натуральные числа; Z – целые числа; $Z_+ = \{0\} \bigcup N$;

B – пространство – банахово пространство; H – пространство – гильбертово пространство;

X^* – сопряженное к X пространство; T^* – сопряженный к T оператор;

$L[M]$ – линейная оболочка множества M в соответствующем пространстве; $\overline{M}$ – замыкание M в соответствующем пространстве;

δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \, i = j, \\ 0 \, , \, i \neq j \, ; \end{cases}$

$\exists!$ – существует единственно; $\Rightarrow$ – следует; $\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда.

Пусть X некоторое B – пространство и $M \subset X$. $L(X;Y)$ – B-пространство ограниченных операторов, действующих из X в Y; $L(X;X) \equiv L(X)$.

Определение 1. *Пусть* $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ *некоторая система. Она называется полной в* X, *если* $\overline{L[\{x_n\}_{n \in N}]} \equiv X$.

Хорошо известно следующее

Утверждение 1. *Система* $\{x_n\}_{n \in N}$ *полна в* $X \Leftrightarrow$ *из* $x^*(x_n) = 0, \forall n \in N$, *следует, что* $x^* = 0$.

Определение 2. *Системы* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *и* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ *называются биортогональными, если*

$$x_n^*(x_m) = \begin{cases} \neq 0\,,\ n = m, \\ 0 \quad ,\ n \neq m\,,\ \ \forall n,m \in N. \end{cases}$$

В случае $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$, $\forall n,m \in N$, *их называют биортономированными.*

Определение 3. *Система* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *называется минимальной в* X, *если* $x_r \notin \overline{L[\{x_n\}_{n\neq r}]}$, *при* $\forall r \in N$.

Справедливо

Утверждение 2. *Система* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *минимальна в* $X \Leftrightarrow$ *существует биортогональная к ней система.*

Определение 4. *Система* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *называется базисом в* B*-пространстве* X, *если для* $\forall x \in X$, $\exists!\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset C$ *:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\ .$$

Имеется следующий критерий базисности.

Критерий базисности. *Система* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *образует базис в* X *только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $\{x_n\}_{n\in N}$ *полна в* X *;*

2. $\{x_n\}_{n\in N}$ *минимальна в* X *и пусть* $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ *сопряженная к ней система;*

3. Проекторы $\{P_n\}_{n\in N} \subset L(X)$ *равномерно ограничены, где*

$$P_m x = \sum_{n=1}^{m} x_n^*(x) x_n\ .$$

Будем пользоваться понятием двойного базиса. Пусть X B-пространство и $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\in N} \subset X$ некоторая двойная система.

Определение 5. *Систему* $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\in N}$ *назовем двойным базисом в* X, *если для* $\forall x \in X$, $\exists!\{\lambda_n^+; \lambda_n^-\}_{n\in N} \subset C$ *:*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^+x_n^++\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^-x_n^- .$$

Определение 6. *Систему* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *в* B*-пространстве* X *назовем* ω*-линейно-независимой, если* $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n=0\Rightarrow a_n=0$, $\forall n\in N$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть* X B*-пространство с базисом* $\{x_n\}_{n\in N}$ *и* $F:X\to X$ *фредгольмовый оператор. Тогда следующие свойства системы* $\{y_n=Fx_n\}_{n\in N}$ *в* X *эквивалентны:*

1) $\{y_n\}_{n\in N}$ *полна;*
2) $\{y_n\}_{n\in N}$ *минимальна;*
3) $\{y_n\}_{n\in N}$ ω*-линейно-независима;*
4) $\{y_n\}_{n\in N}$ *изоморфный к* $\{x_n\}_{n\in N}$ *базис.*

Из этой леммы непосредственно следует следующая

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в некотором банаховом пространстве* B. *Тогда если* $M=card\{n:x_n\neq y_n\}<+\infty$, *где* $\{y_n\}-$*некоторая последовательность, следующие утверждения являются эквивалентными:*

1. $\{y_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* B *изоморфный к* $\{x_n\}_{n\in N}$;
2. *система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *полна в* B;
3. *система* $\{y_n\}_{n\in N}$ *минимальна в* B;
4. $\{y_n\}_{n\in N}$ $\omega-$*линейно независима в* B.

Будем пользоваться также следующими понятиями.

Определение 7. *Системы* $\{x_n\}_{n\in N}$ *и* $\{y_n\}_{n\in N}$ *в* B*-пространстве* X *с нормой* $\|\cdot\|$ *называются* p*-близкими, если* $\sum_n\|x_n-y_n\|^p<+\infty$.

Определение 8. *Минимальную в B-пространстве X с сопряженной $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset X^*$ систему $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ назовем p-системой, если для $\forall x \in X : \{x_n^*(x)\}_{n\in N} \in l_p$, где l_p обычное пространство последовательностей $\{a_n\}_{n\in N}$ из скаляров с нормой* $\|\{a_n\}_{n\in N}\|_{l_p} = \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

В случае базиса, такую систему будем называть p-базисом.

Более подробно относительно этих сведений можно посмотреть монографии I.Singer , R.Young , Б.Т.Билалов, С.Г.Велиев.

Приведем некоторые необходимые сведения из теории пространств Лебега с переменным показателем суммируемости.

Пусть $E \subset R$ измеримое по Лебегу множество. Через $P(E)$ обозначаем, семейство всех измеримых (по Лебегу) функций $p : E \to [1,\infty)$. Возьмем $p \in P(E)$ и положим

$$p^+ = \sup_E vrai p(x);\ p^- = \inf_E vrai\, p(x).$$

Линейное пространство над полем C всех измеримых по Лебегу функций на E обозначим через $L_0(E)$ и пусть

$$I_p(f) = \int_{E|E_\infty} |f(t)|^{p(t)} dt + \sup_{E_\infty} vrai |f(t)|.$$

Примем

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}} = \inf\left\{\lambda > 0 : I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

Далее будем предполагать, что $p \in L_+^\infty(E)$, т.е. $1 \le p^- = \inf_E vrai\, p(x) \le p^+ = \sup_E vrai\, p(x) < +\infty$.

Пространство $\left(L^{p(\cdot)}(E); \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(E)}\right)$ является банаховым.

Справедлива также следующая важная

Теорема 1. *Если E - открытое множество, то $C_0^\infty(E)$ плотно в $L^{p(\cdot)}(E)$.*

В вопросах базисов в пространствах $L^{p(\cdot)}$ приходится часто пользоваться следующими теоремами.

Теорема 2. *Если* $p^- > 1, p^+ < +\infty$, *то* $L^{p(\cdot)}(E)$ *является рефлексивным.*

Верны следующие вложения.

Теорема 3. *Пусть* $p_1, p_2 \in L_0(E)$. *Тогда*

$$L^{p_2(\cdot)}(E) \subset L^{p_1(\cdot)}(E) \Leftrightarrow p_1(x) \le p_2(x), \text{ п.в. } x \in E,$$

при этом вложение непрерывно.

Положим

$$q(x): \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. $\left(L^{p(\cdot)}(E)\right)^* = L^{q(\cdot)}(E)$.

Параграф **1.2** посвящен вопросу базисности системы

$$e_n(t) \equiv e^{int}, \qquad n = 0; \pm 1; ..., \tag{1}$$

в весовых обобщенных пространствах Лебега $L_{p(\cdot),\rho}$. Мы не претендуем на новизны этих результатов. Для полноты изложения приводим самостоятельную схему исследования, которая представляет научный интерес.

Рассмотрим весовое пространство $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$.

Пусть $\rho : [-\pi, \pi] \to [0, +\infty)$ измеримая функция. Под $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ понимается, как обычно, банахово пространство измеримых на $[-\pi, \pi]$ функций $f(x)$, с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot),\rho(\cdot)} \overset{def}{\equiv} \|\rho f\|_{p(\cdot)}.$$

В весовом случае имеет место следующее очень важное

Утверждение 3. *Пусть* $1 \le p^- \le p^+ < +\infty$, $\rho(\cdot)$*-весовая функция,* $mes\{x \in [-\pi, \pi] : \rho(x) = 0\} = 0$ *и* $|\rho(x)|^{p(x)} \in L_1$. *Тогда* $C_0^\infty[-\pi, \pi]$, *и заодно* $C[-\pi, \pi]$ *плотно в* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт.

Утверждение 4. *Пусть* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p(\cdot) \in WL_\pi$. *Весовая функция* $\rho(\cdot)$ *имеет вид*

$$\rho(t) \equiv \prod_{k=1}^{l} |t - t_k|^{\alpha_k}, \{t_k\}_{k=1}^{l} \subset [-\pi, \pi]. \tag{2}$$

Если выполнены неравенства

$$-\frac{1}{p(t_k)} < \alpha_k < \frac{1}{q(t_k)}, \quad k = \overline{1,l}; \tag{3}$$

то оператор Γ *ограниченно действует из* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ *в* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$, *где* Γ - *преобразование Гильберта*

$$\Gamma f = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(y)dy}{y - x}.$$

В этом параграфе доказана следующая

Теорема 5. *Пусть* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p(\cdot) \in WL_\pi$. *Если вес* $\rho(\cdot)$, *определенный формулой (2), удовлетворяет неравенствам (3), то система экспонент (1) образует базис в весовом пространстве* $L_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$.

В **1.3** рассматривается пространства Харди $H^+_{p(\cdot)}$ и ${}_mH^-_{p(\cdot)}$ в качестве подпространств пространства $L_{p(\cdot)}$. Будем изучать базисность определенных частей системы экспонент в этих подпространствах.

Сужения функций из $H^+_{p(\cdot)}$ на единичной окружности обозначим через $L^+_{p(\cdot)}$, т.е.

$$L^+_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f : \exists g \in H^+_{p(\cdot)}, \ f \equiv g/_{\partial\omega} \right\}.$$

Отметим, что если $f \in H^+_{p(\cdot)}$, то $\|f\|_{H^+_{p(\cdot)}} = \|f^+\|_{p(\cdot)}$, где $f^+ = f/_{\partial\omega}$. Из этих соотношений непосредственно следует, что пространства $H^+_{p(\cdot)}$ и $L^+_{p(\cdot)}$ можно отождествлять. Справедлива

Теорема 6. *Пусть* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p \in WL_\pi$. *Тогда система* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z_+}$ *образует базис в подпространстве* $L^+_{p(\cdot)}$ *(или же в* $H^+_{p(\cdot)}$*).*

Аналогичное утверждение справедливо относительно пространства ${}_m H^-_{p(\cdot)}$. Положим

$$ {}_m L^-_{p(\cdot)} \equiv \left\{ f : \exists g \in {}_m H^-_{p(\cdot)} \ , \ f = g/_{\partial\omega} \right\}. $$

Справедлива

Теорема 7. *Пусть* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p \in WL_\pi$. *Тогда система* $\left\{e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\ge m}$ *образует базис в подпространстве* ${}_m L^-_{p(\cdot)}$.

Аналогичные результаты получены в весовом случае.

Пусть $\nu^{\pm}(\cdot) \ge 0$ весовые функции. Рассмотрим следующие весовые классы

$$ L^+_{p(\cdot),\nu^+} \equiv \left\{ f \in L^+_1 : \| f \|_{p(\cdot),\nu^+(\cdot)} < +\infty \right\}, $$

$$ {}_m L^-_{p(\cdot),\nu^-} \equiv \left\{ f \in {}_m L^-_1 : \| f \|_{p(\cdot),\nu^-(\cdot)} < +\infty \right\}. $$

Справедлива следующая

Теорема 8. *Пусть* $p \in WL_\pi$, $1 < p^- \le p^+ + \infty$, *и вес* $\rho(\cdot)$ *определен выражением (2). Если выполнены неравенства (3), то система* $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z_+}$ $\left(\left\{e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\ge m}\right)$ *образует базис в подпространстве* $L^+_{p(\cdot),\rho(\cdot)}$ $\left({}_m L^-_{p(\cdot),\rho(\cdot)}\right)$, $1 < p < +\infty$.

В параграфе **1.4** доказано, что если двойная система экспонент $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};\ B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_0^\infty$ образует базис в пространстве $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$, то она изоморфна в нем классической системе экспонент $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$.

В параграфе **1.5** изучается базисность возмущенной системы экспонент в обобщенном пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}$.

В связи с приложением к конкретной задаче механики изучение базисных свойств следующей системы косинусов и синусов

$$ \left\{\cos\sqrt{n^2+\alpha}\, x\right\}_{n\ge 0} \cup \left\{\sin\sqrt{n^2+\alpha}\, x\right\}_{n\ge 0}, \qquad (4) $$

где $\alpha \in C -$комплексный параметр, в различных функциональных пространствах представляет особый интерес.

Будем рассматривать следующее обобщение системы (12):

$$1 \cup \left\{ e^{\pm i \sqrt[m]{P_m(n)} x} \right\}_{n \in N}, \tag{5}$$

в пространстве $L_{p(\cdot)}$, где $P_m(n) -$полином m -й степени

$$P_m(n) \equiv a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_0, \; a_m \neq 0, a_m > 0,$$

с комплексными $\alpha_i \in C, \; i = \overline{0, m-1}$, коэффициенты. Под $\sqrt[m]{z}$ понимаем ту ветвь, для которой $\sqrt[m]{1} = 1$.

Всегда будем предполагать, что имеет место следующее условие

$$P_m(k) \neq P_m(l) \text{ при } k \neq l \text{ и } P_m(k) \neq 0, \; \forall k \in N. \tag{6}$$

Отметим, что базисные свойства системы (5) в L_p были ранее нами изучены в работах Т.Р.Мурадова.

Теорема 9. *Пусть* $p^- > 1, p \in WL_\pi, a_m = 1$ *, и выполнено неравенство*

$$-\frac{1}{p(\pi)} < a_{m-1} < \frac{1}{q(\pi)}.$$

Если имеет место условие (6), то система (5) образует базис в пространстве Лебега $L_{p(\cdot)}(-\pi, \pi)$ *с переменным показателем суммируемости* $p(\cdot)$.

Наиболее общий случай. Рассмотрим систему экспонент

$$\left\{ e^{i \lambda_n t} \right\}_{n \in Z}, \tag{7}$$

где $\{\lambda_n\} \subset R -$последовательность действительных чисел, $Z -$ целые числа. Будем изучать базисные свойства (базисность, полнота, минимальность) системы (7) в случае, когда последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет асимптотику

$$\lambda_n = n - \alpha \, sign \, n + O\left(|n|^{-\beta}\right), \; |n| \to \infty, \tag{8}$$

где $\lambda, \beta \in R -$некоторые действительные параметры. Установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 10. *Пусть имеет место асимптотика (8) и выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{2p(\pi)} < \alpha < \frac{1}{2q(\pi)},\ \beta > \frac{1}{\tilde{p}},$$

где $\tilde{p} = \min\{p^-;2\}$. *Тогда следующие свойства системы (7) эквивалентны в* $L_{p(\cdot)}$*:*

1. *система (7) полна;*
2. *система (7) минимальна;*
3. *система (7)* ω *-линейно-независима;*
4. *система (7) изоморфный к* $\{e^{int}\}_{n\in N}$ *базис;*
5. $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$.

В параграфе **1.6** изучается базисность из возмущенных систем экспонент с единицей в весовом обобщенном пространстве Лебега.

Линейный случай. Рассмотрим следующую систему экспонент с единицей

$$1 \cup \{e^{i\omega_n(t)}\}_{n\neq 0}, \tag{9}$$

где $\omega_n(t)$ имеет асимптотику

$$\omega_n(t) = \gamma_n(t) + \underline{\underline{O}}\left(|n|^{-\nu}\right),\ |n| \to \infty,$$

в которой главная часть $\gamma_n(\cdot)$ определена выражением

$$\gamma_n(t) \equiv (n - \alpha\, signn)t - \beta\, signn\, sign t,$$

$\alpha, \beta \in R -$ действительные параметры.

В настоящем параграфе мы предлагаем два способа установления базисности системы (9) в весовом обобщенном пространстве Лебега $L_{p(\cdot),\rho}$ с весом $\rho : [-\pi,\pi] \to R_+ \equiv (0,+\infty)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие включения

$$\rho(\cdot) \in L_{p(\cdot)}\ \ и\ \ \rho^{-1}(\cdot) \in L_{q(\cdot)}.$$

I способ. Установление аналога утверждения Левинсона относительно системы

$$\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in Z}, \tag{10}$$

а в последующем применение Леммы 2 §1.1.

II способ. Построение биортогональной к $\left\{e^{i\omega_n(t)}\right\}_{n\in Z}$ системы и доказательство сходимости биортогонального разложения каждой функции из $L_{p(\cdot),\rho}$.

Следует отметить, что I способ приспособлен только к системам вида (10), а II способ более общий. Поэтому мы приведем оба способа установления базисности системы (9) в $L_{p(\cdot),\rho}$.

Доказана следующая

Теорема 11. *Пусть* $p\in WL_{\pi}$, $p^{-}>1$ *и вес (2) удовлетворяет условию (3). Система* $1\bigcup\left\{e^{i(n-\alpha signn)t}\right\}_{n\neq 0}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot),\rho}$ *тогда, когда выполнено неравенство*

$$-\frac{1}{2p(\pi)}<\alpha<\frac{1}{2q(\pi)}.$$

При этом она полна в $L_{p(\cdot),\rho}$ *тогда, когда* $\alpha\geq-\frac{1}{2p(\pi)}$ *и минимальна в нем тогда, когда* $\alpha<\frac{1}{2q(\pi)}$.

Кусочно-линейный случай. В этом пункте рассмотрим более сложный случай, а именно систему экспонент вида

$$1\bigcup\left\{e^{i(nt+\lambda_n(t))}\right\}_{n\neq 0}, \qquad (11)$$

где $\lambda_n(t)\equiv-signn(\alpha t+\beta signt)$, кусочно-линейное возмущение.

Итак, справедлива

Теорема 12. *Пусть* $p\in WL_{\pi}$, $p^{-}>1$ *и вес (2) удовлетворяет условиям (3) и* $\{t_k\}_{k=\overline{1,e}}\subset\{(-\pi,0)\cup(0,\pi)\}$. *Если*

$$-\frac{1}{2q(0)}<\frac{\beta}{\pi}<\frac{1}{2p(0)},$$

то система (11) образует базис в $L_{p(\cdot),\rho}$ *тогда, когда* $-\frac{1}{2p(\pi)}<\alpha+\frac{\beta}{\pi}<\frac{1}{2q(\pi)}$.

В **Главе II** рассматривается система экспонент с кусочно-непрерывной фазой, которая может являться множеством из

собственных функций разрывных дифференциальных операторов. При определенных условиях устанавливается базисность этой системы в лебеговых пространствах с переменным показателем суммируемости.

В **2.1** приводятся основные предположения и вспомогательные факты.

Рассматривается следующая система экспонент

$$\left\{e^{i(nt-\alpha(t)signn)}\right\}_{n\in Z},$$

где $\alpha(t)-$ кусочно непрерывная функция на сегменте $[-\pi;\pi]$.

В **2.2** изучается однородная задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом в обобщенных классах Харди.

В **2.3** изучается неоднородная задача Римана с кусочно-непрерывным коэффициентом.

Используя полученные в предыдущих параграфах результаты, в **2.4** устанавливается базисность системы экспонент с кусочно – непрерывной фазой в $L_{p(\cdot)}$.

Рассмотрим следующую систему

$$\left\{e^{i(nt-\alpha(t)signn)}\right\}_{n\in Z}, \tag{12}$$

где $\alpha:[-\pi,\pi]\to C-$ некоторая кусочно-непрерывная функция. Доказана следующая

Теорема 13. *Пусть* $p\in WL_{\pi}$, $p^{-}>1$, *функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет условиям*

(a) $\alpha(t)-$ *кусочно-гельдерева на* $[-\pi,\pi]$, $\{s_k\}_1^r:-\pi=s_0<s_1<...<s_r<s_{r+1}=\pi-$ *ее точки разрыва на* $(-\pi,\pi)$. *Пусть* $\{h_k\}_1^r$:

$$h_k=\alpha(s_k+0)-\alpha(s_k-0),\ k=\overline{1,r};$$

скачки функции $\alpha(t)$ *в точках* s_k *и* $h_0=\dfrac{\alpha(-\pi)-\alpha(\pi)}{\pi}$.

(b) $$\left\{\frac{h_k}{\pi}-\frac{1}{p(s_k)}:k=\overline{0,r}\right\}\bigcap Z=\varnothing.$$

Определим $\{n_k\}_1^r\subset Z$ *из следующих соотношений:*

$$-\frac{1}{q(s_k)} < \frac{h_k}{\pi} + n_{k-1} - n_k < \frac{1}{p(s_k)},\ n_0 = 0, k = \overline{1,r}.$$

Положим $\omega_\pi = h_0 + n_r$.

Если выполнены неравенства $-\frac{1}{q(s_k)} < \frac{h_k}{\pi} < \frac{1}{p(s_k)},\ k = \overline{0,r}$, *то система экспонент (12) образует базис в* $L_{p(\cdot)}$.

В **2.5** рассматривается возмущенная система из экспонент, когда фаза имеет определенную асимптотику.

Рассмотрим следующую систему экспонент

$$\left\{e^{i\lambda_n(t)}\right\}_{n\in Z}, \tag{13}$$

где $\lambda_n(t)$ имеет асимптотику

$$\lambda_n(t) = \mu_n(t) + \beta_n(t), \text{ при } n \to \infty,$$

где $\mu_n(t) = (n - \alpha(t) signn)t,\ n \in Z$.

Предполагаем выполнении условия.

(c) функции $\beta_n(\cdot)$ *удовлетворяют соотношению*

$$\beta_n(t) = O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{0,r};\ \{\gamma_k\}_1^r \subset (0,+\infty).$$

Доказана следующая

Теорема 14. *Пусть* $p \in WL_\pi$, $p^{-1} > 1$, *и имеет место асимптотическая формула* $\lambda_n(t) = \mu_n(t) + \beta_n(t)$, при $n \to \infty$, где $\mu_n(t) = (n - \alpha(t) signn)t,\ n \in Z$, *в которой функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет всем условиям Теоремы 13 §2.4 и относительно функций* $\beta_n(t)$ *справедливо соотношение*

$$\beta_n(t) = O\left(\frac{1}{n^{\gamma_k}}\right),\ t \in (t_k, t_{k+1}),\ k = \overline{0,r};\ \{\gamma_k\}_1^r \subset (0,+\infty).$$

Предположим, что имеют место неравенства

$$-\frac{1}{q(\pi)} < \omega_\pi < \frac{1}{p(\pi)},\ \gamma > \frac{1}{\tilde{p}},$$

где $\gamma = \min_k \gamma_k$, $\tilde{p} = \min\{p^-; 2\}$ *и величина* ω_π *определена из соотношений (b). Тогда относительно системы (13) следующие свойства в* $L_{p(\cdot)}$ *эквивалентны:*

1) *полна;*
2) *минимальна;*
3) ω *-линейно независима;*
4) *образует изоморфный к* $\{e^{\text{int}}\}_{n\in Z}$ *базис;*
5) $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$.

В параграфе **2.6** рассматриваются базисы из двойных систем с операторными коэффициентами в банаховых пространствах. Устанавливаются связи между базисностью этих систем и разрешимостью соответствующих операторных уравнений. Получается необходимое условие базисности. Полученные результаты применяются к конкретным примерам.

Итак, пусть $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\in N} \subset X$ некоторая двойная система. Эту систему будем называть базисом в X, если для $\forall x \in X,\ \exists!\{\lambda_n^\pm\}_{n\in N} \subset C:\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+ x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^- x_n^-$.

Замыкание линейной оболочки $\{x_n^\pm\}_{n\in N}$ в X обозначим через $X^\pm$. Иначе говоря это определение означает, что система $\{x_n^\pm\}_{n\in N}$ образует базис в $X^\pm$, подпространства X^+ и X^- дополняемы в X и имеет место прямое разложение

$$X = X^+ \dot{+} X^- . \tag{14}$$

Пусть X банахово пространство с базисом $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\in N}$ и $T^\pm \in L(X)$ некоторые автоморфизмы. Предположим, что система $\{T^+ x_n^+; T^- x_n^-\}_{n\in N}$ тоже образует базис в X . Таким образом, для $\forall y \in X$ уравнение

$$T^+ x^+ + T^- x^- = y \quad , \tag{15}$$

разрешимо в $X^+ \times X^-$, т.е. $\exists(x^+; x^-) \in X^+ \times X^-$, которые удовлетворяют соотношению (23). Пусть $X_0 \subset X$ некоторое

многообразие. Предположим, что существуют автоморфизмы $A^{\pm}; B^{\pm} \in L(X)$ и линейный оператор $S: X_0 \to X$, такие, что для $\forall y \in X_0$, решение уравнения (15) выражается формулой

$$x^{\pm} = A^{\pm} y + B^{\pm} S y. \qquad (16)$$

Итак, в этом параграфе доказана

Теорема 15. *Пусть банахово пространство X имеет прямое разложение (14), система $\{x_n^{\pm}\}_{n \in N}$ образует базис в $X^{\pm}$, $T^{\pm}; A^{\pm}; B^{\pm} \in L(X)$ автоморфизмы и $S: X_0 \to X$ линейный оператор, для которого относительно решений уравнения (15) справедлива формула (16), где $X_0 \subset X -$ некоторое многообразие. Тогда, если система $\{T^{+} x_n^{+}; T^{-} x_n^{-}\}_{n \in N}$ образует базис в X, то оператор S ограничен на X_0.*

Глава III посвящена в целом понятию пространства коэффициентов, порожденного невырожденной системой в разных математических структурах.

Рассматриваются линейные метрические пространства, обладающие определенным свойством. Вводится понятие невырожденной системы. Доказывается, что такие системы имеют полное метрическое пространство коэффициентов с каноническим базисом. На языке коэффициентного оператора приведен критерий базисности .

В ней приведена одна конкретная реализация обобщенного понятия b-базиса, порожденного некоторым билинейным отображением. Также приведен один важный результат разложимости элементов в гильбертовом тензорном произведении в $t-$ряд по полной системе.

В **3.1** приводятся необходимые обозначения и понятия, а также аппроксимативные понятия, порожденные билинейным отображением.

3.1.1. ***b-отображение. b-оболочка. b-полнота. b-минимальность. b-инвариантность.*** Пусть $X, Y, Z -$ линейные пространства над полем K.

Отображение $b: X \times Y \to Z$ *называют билинейным, если для* $\forall x \in X$ *и* $\forall y \in Y$ *отображения* $b(x,\cdot): Y \to Z$ *и* $b(\cdot, y): X \times Y \to Z$ *линейны на* Y *и на* X *, соответственно.*

Пусть X, Y, Z – B-пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_x$, $\|\cdot\|_y$ и $\|\cdot\|_z$. Билинейное отображение $b: X \times Y \to Z$ назовем b-*отображением*, если

$$m\|x\|_x \|y\|_y \le \|b(x,y)\|_z \le M\|x\|_x \|y\|_y, \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y,$$

где $m, M > 0$ – постоянные.

В случаях недоразумения, b-*отображение* $b(x,y)$ будем обозначать как $xy \equiv b(x,y)$. Пусть $M \subset Y$ некоторое множество. Все возможные конечные линейные комбинации вида $\sum x_i m_i$, где $x_i \in X$, $m_i \in M$, назовем b-*оболочкой* M и обозначим $L^b[M]$. Замыкание $L^b[M]$ в Z будем обозначать $\overline{L^b[M]}$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* b-*полной, если* $\overline{L^b[\{y_n\}_{n\in N}]} = Z$. *Систему* $\{y_n\}_{n\in N}$ *назовем* b-*минимальной, если для* $\forall x \in X$, $x \ne 0$, *имеет место* $xy_k \notin \overline{L^b[\{y_n\}_{n\ne k}]}$, $\forall k \in N$.

Тройку $(X;Y;Z)$ *назовем* b_Y-*инвариантной, если из* $\sum_n x_n y_n = 0$ *следует, что* $\sum_n f(y_n)x_n = 0$, $\forall f \in Y^*$.

Совершенно аналогично определяется понятие b-*независимости. А именно, система* $\{y_n\} \subset Y$ *называется* b-*независимой, если для любого конечного набора* $\{x_n\}$ *равенство* $\sum_n x_n y_n = 0$ *возможно только при* $x_n = 0, \forall n$.

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* b-*биортогональной к системе* $\{T_n\}_{n\in N} \subset L(Z;X)$, *если имеет место* $T_n(xy_k) = \delta_{nk}x$, $\forall x \in X$, $\forall n, k \in N$.

Наконец, определим понятие b-*базиса.*

Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ *назовем* b*-базисом для тройки* $(X;Y;Z)$*, если для* $\forall z \in Z$ *существует единственная последовательность* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$: $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. *Пусть задана тройка* $(X;Y;Z)$ *и* b*-отображение* $b: X \times Y \to Z : b(x,y) = xy \in Z$.

Эту тройку будем называть b*-плотным, если конечные линейные комбинации вида* $\sum_k x_k y_k$ *с* $x_k \in X$ *и* $y_k \in Y$ *плотны в* Z .

В параграфе **3.2** рассматривается гильбертово тензорное произведение гильбертовых пространств. Вводится понятие t-разложения, порожденное билинейным отображением, определяемым гильбертовым тензорным произведением. Доказывается, что если произвольный элемент пространства имеет t-разложение по заданной системе и после исключения некоторого члена эта система остается t-полной в этом пространстве, то произвольный элемент также имеет t-разложение по оставшейся системе.

Приведем также некоторые понятия и факты, касающиеся гильбертового тензорного произведения. Пусть $X;Y$ H-пространства и $Z = X \otimes Y$ их гильбертово тензорное произведение. Тензорное произведение $x \otimes y$ элементов $x \in X$ и $y \in Y$, для простоты обозначим через $xy = x \otimes y$. Пусть $M \subset Y$ некоторое множество. Положим

$$L_t[M] \equiv \left\{ z \in Z : \exists \{x_k; y_k\}_1^m \subset X \times M \Rightarrow z = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k \right\}.$$

$L_t[M]$ назовем t*-оболочкой* множества M . Пусть $\vec{y} \subset Y$ некоторая система. Определим

$$\Lambda^{(t)} \equiv \left\{ \vec{x} \subset X : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k < +\infty \right\},$$

($\sum(\cdot) < +\infty -$ означает сходимость ряда в пространстве Z).

Систему $\vec{y} \subset Y$ *назовем* t*-полной в* Z*, если для* $\forall z \in Z, \exists \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{m_n} \subset X$, $\forall n \in N$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n} x_k^{(n)} y_k = z\ .$$

Систему $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y$ *назовем* t*-базисом относительно тройки* $X;Y;Z$, *если для* $\forall z\in Z$ *существует единственная* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X : z=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Систему $\{y_n\}\subset Y$ *назовем* t*-независимой, если для любого конечного набора* $\{x_n\}$ *равенство* $\sum_n x_n y_n = 0$ *возможно только при* $x_n = 0, \forall n$.

Итак,

$$(x_1\otimes y_1; x_2\otimes y_2)_Z = (x_1;x_2)_X (y_1;y_2)_Y,\ \ \forall x_k\in X,\ \forall y_k\in Y, k=1,2,$$

где $(\cdot;\cdot)_Z$ скалярное произведение в Z и $\|\cdot\|_Z^2 = (\cdot;\cdot)_Z$.

Введем понятие t*-скалярного* произведения пары $(y;z)\in Y\times Z$. Возьмем $\forall x\in X$ и рассмотрим линейный функционал $\vartheta_{(y;z)}(x) = (x\otimes y; z)_Z$. Имеем

$$\left|\vartheta_{(y;z)}(x)\right| \le \|x\otimes y\|_Z \|z\|_Z = \|y\|_Y \|z\|_Z \|x\|_X\ .$$

Следовательно, $\vartheta_{(y;z)}\in X^*\equiv X$. В результате, $\exists!\ \tilde{x}\in X$: $\vartheta_{(y;z)}(x) = (x;\tilde{x})_X$, $\forall x\in X$. $\tilde{x}$ назовем t*-скалярным* произведением элементов y и z и обозначим через $\tilde{x} =< y;z >_X$.

Пусть $X;Y$ H-пространства и $Z = X\otimes Y$ их гильбертово тензорное произведение. Пусть $\vec{y}\subset Y$ некоторая система. Будем говорить, что элемент $z\in Z$ t-разлагается по системе $\vec{y}$, если

$$\exists \vec{x}\subset X : z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\otimes y_k \ \text{ в } Z\ .$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 16. *Пусть произвольный элемент* z t*-разлагается по системе* $\{y_n\}_{n\in Z_+} \subset Y$ *и* $\vec{y}$ t*-полна в* Z. *Тогда произвольный элемент* z *тоже* t*-разлагается по системе* $\vec{y}$.

В **3.3** рассматриваются линейные метрические пространства, обладающие определенным свойством. Вводится понятие невырожденной системы. Доказывается, что такие системы имеют полное метрическое пространство коэффициентов с каноническим базисом. На языке коэффициентного оператора приведен критерий базисности .

3.3.1.Основные предположения и понятия. Будем пользоваться следующим понятием.

Определение 9. *Систему* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *назовем невырожденной, если* $x_n \neq 0$, $\forall n \in N$.

Будем предполагать, что линейное метрическое пространство $(X;\rho)$ обладает следующими свойствами.

α*) Линейные операции сложения и умножения на скаляр в* $(X;\rho)$ *непрерывны в* X *, т.е. из* $\lambda_n \to \lambda, n \to \infty$*, в* $\mathbb{C}$ *и из* $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$ *в* X *следует, что* $\lambda_n x_n \to \lambda x$, $x_n + y_n \to x + y, n \to \infty$ *в* X .

β*) Пусть* τ_ρ *топология в* X *, порожденная метрикой* ρ. *Будем считать, что ограниченность множества в* X *относительно топологии* τ_ρ *и метрики* ρ *эквивалентны, т.е. эти понятия в пространствах* $(X;\tau_\rho)$ *и* $(X;\rho)$ *одинаковы.*

Пусть $(X;\rho)$ некоторое линейное, метрическое, полное пространство, обладающее свойствами $\alpha), \beta)$ и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая невырожденная система. Положим

$$\mathscr{K}_{\bar{x}} \equiv \left\{\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset K : \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ сходится в } X\right\}.$$

Итак, доказана следующая

Теорема 17. *Пусть* $(X;\rho)$ *метрическое пространство обладающее свойствами* α*),* β*),* ρ *инвариантна относительно*

сдвига и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *невырожденная система. Тогда соответствующее ей пространство коэффициентов* $\left(\mathscr{K}_{\bar{x}}; \rho_{\mathscr{K}_{\bar{x}}}\right)$ *является полным, каноническая система* $\{e_n\}_{n\in N}$ *образует базис в нем. Более того, метрика* $\rho_{\mathscr{K}_{\bar{x}}}$ *инвариантна относительно сдвига и линейные операции непрерывны в* $\mathscr{K}_{\bar{x}}$.

Справедлива также следующая

Теорема 18. *Пусть* $(X;\rho)$ *метрическое пространство, обладающее свойствами* α *),* β *),* ρ *инвариантна относительно сдвига и* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *невырожденная, полная в* X *система. Тогда она образует базис в нем только тогда, когда соответствующий коэффициентный оператор* $T : \mathscr{K}_{\bar{x}} \to X$ *является изоморфизмом в* $L\left(\mathscr{K}_{\bar{x}}; X\right)$.

В **3.4** вводим такие аппроксимативные понятия, как J-оболочка, J-полнота, J-минимальность и J-базис, порожденные некоторым семейством ограниченных операторов.

Пусть $X;Y$ некоторые банаховы пространства. Пусть $\Gamma \subset C$ кусочно-гладкая кривая. Через $L_p(\Gamma; L(X))$, $\left(L_p(\Gamma; X)\right)$ $p \geq 1$, обозначим лебегово пространство $L(X)(X)-$значных функций на Γ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_\Gamma \|f(t)\|^p |dt|\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$f : \Gamma \to L(X) \ \ (f : \Gamma \to X).$$

Пусть $M \subset L_p(\Gamma; L(X))$. Следуя работам Б.Т.Билалова, аппроксимативные обобщенные понятия будем ассоциировать буквой « J ».

J*-оболочкой множества* M *в* $L_p(\Gamma; L(X))$ *назовем*

$$L_J[M] \equiv \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\cdot) x_k, \{T_k(\cdot)\} \subset M, \{x_k\} \subset X \right\}.$$

Обычная полнота систем в банаховых пространствах приобретает следующий вид.

Определение 10. *Систему* $\{T_n\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$ *назовем* J*-полной в* $L_p(\Gamma; X)$*, если*

$$\overline{L_J\left[\{T_n\}_{n\in N}\right]} \equiv L_p(\Gamma; X),$$

где $\left(\overset{-}{\cdot}\right)$ *– замыкание в* $L_p(\Gamma; X)$.

Нам понадобится также обобщенное понятие независимости.

Определение 11. *Систему*

$$\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),$$

назовем ωJ*-независимой, если из*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(\cdot) f_n = 0 \text{ в } L_p(\Gamma; X),$$

следует $\bar{f} = 0$*, где* $\bar{f} \equiv \{f_n\}_{n\in N} \subset X$.

Заменой биортогональной системы в нашем случае является

Определение 12. *Систему*

$$\{T_n^*(\cdot)\}_{n\in N} \subset L(L_p(\Gamma; X); X),$$

назовем J*-биортогональной к системе*

$$\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),$$

если

$$T_n^*(T_k(\cdot)x) = \delta_{nk} x, \quad \forall x \in X, \ \forall n, k \in N,$$

где δ_{nk} *– символ Кронекера.*

А теперь примем основное понятие обобщенной базисности.

Определение 13. *Систему* $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$ *назовем* J*-базисом в* $L_p(\Gamma; X)$*, если для* $\forall f \in L_p(\Gamma; X)$, $\exists! \{f_n\}_{n\in N} \subset X$:

$f = \sum_{n=1}^{\infty} T_n f_n$ *, в* $L_p(\Gamma; X)$*, т.е.*

$$\int_{\Gamma} \left\| f(\tau) - \sum_{n=1}^{m} T_n(\tau) f_n \right\|^p |d\tau| \to 0, \text{ при } m \to \infty.$$

$\{f_n\}_{n\in N}$ *назовем координатными коэффициентами.*

При получении основных результатов будем пользоваться следующим основным свойством.

Свойство (А). *Система* $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$ *удовлетворяет условию:* $\exists T_n^{-1}(t)$, *п.в.* $t \in \Gamma$, $\forall n \in N$ *и* $\{T_n^{-1}(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_q(\Gamma; L(X))$, *где* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

В **3.5** определяются понятия J-пространства коэффициентов и J-канонической системы в нем. При определенных условиях на операторное семейство доказано, что это пространство банахово и J-каноническая система образует в нем J-базис. Получен критерий J-базисности операторного семейства на языке J-коэффициентного оператора.

Рассматриваются пространства

$$L_p(\Gamma; L(X)),\ L_p(\Gamma; X),\ p \ge 1.$$

Пусть

$$S_{\bar{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X)),$$

некоторая система. Определим

$$K_{\bar{T}} \equiv \left\{ \{f_n\}_{n\in N} \subset X:\ \textit{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\cdot) f_n \quad \textit{сходится в} \quad L_p(\Gamma; X) \right\}.$$

Доказана следующая

Теорема 19. *Пусть система* $S_{\bar{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \ge 1$, *обладает Свойством (А). Тогда ей соответствует банахово пространство коэффициентов* $K_{\bar{T}}$ *и коэффициентный оператор* $K \in L(K_{\bar{T}}; L_p(\Gamma; X))$, $\|K\| = 1$. *Если при этом система* $S_{\bar{T}}$ ωJ*-линейно независима или имеет* J*-биортогональную систему, то* $\exists K^{-1}$. *Кроме того, если* $\operatorname{Im} K$ *замкнуто, то* $K^{-1} \in L(\operatorname{Im} K; K_{\bar{T}})$.

В дальнейшем нам понадобится также понятие J*-базиса* в пространстве $K_{\bar{T}}$.

Определение 14. *Систему* $\{A_n\}_{n\in N} \subset L(X;K_{\bar{T}})$ *назовем* J*-базисом в* $K_{\bar{T}}$*, если для* $\forall \bar{f} \in K_{\bar{T}}$, $\exists!\{f_n\}_{n\in N} \subset X : \bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n$ *(сходимость понимается в* $K_{\bar{T}}$*).*

Доказана следующая

Теорема 20. *Пусть система* $S_{\bar{T}} \equiv \{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \geq 1$, *обладает Свойством (А). Тогда* J*-каноническая система* $\{E_n\}_{n\in N} \subset L(X;K_{\bar{T}})$ *образует* J*-базис в пространстве коэффициентов* $K_{\bar{T}}$.

Справедлив также следующий критерий $J-$базисности.

Теорема 21. *Пусть система* $\{T_n(\cdot)\}_{n\in N} \subset L_p(\Gamma; L(X))$, $p \geq 1$, *обладает Свойством (А) и* K *соответствующий коэффициентный оператор* $K : K_{\bar{T}} \to L_p(\Gamma; X)$. *Тогда она образует* J*-базис в* $L_p(\Gamma; X)$ *только тогда, когда* K *является изоморфизмом в* $L(K_{\bar{T}}; L_p(\Gamma; X))$.

В **3.6** доказан критерий J-базисности семейства ограниченных операторов. При определенных условиях установлен аналог критерия базисности в данном случае.

В **Главе IV** устанавливаются связи между базисными свойствами (полнота, минимальность, базисность) одинарных систем и ассоциированных им двойных систем в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. Схема исследования ранее применялась Б.Т.Билаловым относительно одинарных систем экспонент

$$\{a(t)e^{\mathrm{int}} \pm b(t)e^{-\mathrm{int}}\}_{n\in N}, \tag{17}$$

и двойных систем экспонент

$$\{A(t)e^{\mathrm{int}}; B(t)e^{-\mathrm{int}}\}_{n\in N}, \tag{18}$$

в пространствах $L_p(0,\pi)$ и $L_p(-\pi,\pi)$, соответственно, где все входящие в эти системы функции являются комплексно-значными на областях определений.

В этой главе вышеупомянутая схема установления базисных свойств систем (17), (18) Б.Т.Билалова обобщается на более общие одинарные и двойные системы, рассмотренные в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. Полученные результаты демонстрируются на возмущенных системах экспонент.

В **4.1** рассматривается одинарная система функций в обобщенном лебеговом пространстве функций $L_{p(\cdot)}(0,a)$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$. Определяется двойная система функций в $L_{p(\cdot)}(-a,a)$, ассоциированная с этой системой. Устанавливаются связи между полнотой и минимальностью этих систем в пространстве $L_{p(\cdot)}$.

Рассмотрим одинарные системы вида

$$\vartheta_n^{\pm}(t) \equiv a(t)\omega_n^{+}(t) \pm b(t)\omega_n^{-}(t), \quad n \in N. \tag{19}$$

Не ограничивая общности будем считать, что $\{\vartheta_n^{\pm}(t)\}_{n\in N}$ определена на сегменте $[0,a]$. Положим

$$A(t) \equiv \begin{cases} a(t), & t \in [0,a], \\ b(-t), & t \in [-a,0). \end{cases}$$

Введем следующую двойную систему

$$V_{n;m} \equiv (A(t)W_n(t); A(-t)W_m(-t)), \quad n,m \in N.$$

Справедлива следующая

Теорема 22. *Пусть* $1 \le p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in [-a,a]$. *Система* $\{V_{n;m}\}_{n;m\in N}$ *полна (минимальна) в* $L_{p(\cdot)}(-a,a)$ *только тогда, когда системы* $\{\vartheta_n^{+}\}_{n\in N}$ *и* $\{\vartheta_n^{-}\}_{n\in N}$ *полны (минимальны) в* $L_{p(\cdot)}(0,a)$.

В **4.2** рассматривается полнота и минимальность дефектных одинарных систем в обобщенных пространствах Лебега в несимметричном случае.

Рассмотрим следующие одинарные системы

$$\vartheta_n^{\pm}(t) \equiv a(t)\varphi^n(t) \pm b(t)\overline{\varphi}^n(t), \quad n \in Z, \tag{20}$$

$a(t), b(t)$ и $\varphi(t)$, вообще говоря, комплексно-значные функции, заданные на сегменте $[0,a]$. Вводим следующие функции

$$A(t) \equiv \begin{cases} a(t), & t \in (0,a), \\ b(-t), & t \in (-a,0), \end{cases} \qquad W(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & t \in (0,a), \\ \overline{\varphi}(-t), & t \in (-a,0). \end{cases}$$

Наряду с одинарных систем (20) рассматриваем следующую двойную систему

$$W_{n,k} \equiv \{A(t)W^n(t); A(-t)W^k(-t)\}, \ n,k \in Z. \qquad (21)$$

Теорема 23. *Пусть* $p(-x) = p(x), \ \forall x \in [-\pi,\pi] \wedge$ $1 < p^- \le p^+ < +\infty$, *и система* $\{W_{n,k}\}_{n\ge 0, k\ge 1}$, *определенная выражением (21) полна и минимальна в* $L_{p(\cdot)}(-a,a)$. *Тогда имеет место одно из следующих возможностей:*

1. *Система* $\{\vartheta_n^-\}_{n\ge 1}$ *полна и минимальна в* $L_{p(\cdot)}(0,a)$.
2. *Система* $\{\vartheta_n^+\}_{n\ge 1}$ *полна и минимальна в* $L_{p(\cdot)}(0,a)$.

В **4.3** устанавливается аналогичная связь относительно базисности одинарных и двойных систем в $L_{p(\cdot)}$.

Справедлива следующая

Теорема 24. *Пусть* $1 < p^- \le p^+ < +\infty$ *и* $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in [-a,a]$. *Двойная система* $\{V_{n;n}\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot)}(-a,a)$ *только тогда, когда каждая из одинарных систем* $\{\vartheta_n^+\}_{n\in N}$ *и* $\{\vartheta_n^-\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot)}(0,a)$.

Аналогичный результат имеет место относительно систем с единицей.

Теорема 25. *Двойная система* $1 \bigcup \{V_{n;n}\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot)}(-a,a)$ *только тогда, когда каждая из систем* $\{\vartheta_n^-\}_{n\in N}$ *и* $1 \bigcup \{\vartheta_n^+\}_{n\in N}$ *образует базис в* $L_{p(\cdot)}(0,a)$.

В частности, взяв в качестве $\vartheta_n^{\pm}$ следующие функции

$$\omega_n^+(t) \equiv e^{i(\lambda_n t + \mu_n)}; \ \omega_n^-(t) \equiv e^{-i(\lambda_n t + \mu_n)},$$

на $[0,\pi]$, из этих теорем получаем следующие результаты.

Следствие 1. *Пусть* $\{\lambda_n;\mu_n\}_{n\in N}$ *некоторые последовательности комплексных чисел. Система экспонент* $\left\{e^{\pm i(\lambda_n t+\mu_n sign t)}\right\}_{n\in N}$ *полна, минимальна, образует базис в* $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$, *, только тогда, когда каждая из систем косинусов* $\{\cos(\lambda_n t+\mu_n)\}_{n\in N}$ *и синусов* $\{\sin(\lambda_n t+\mu_n)\}_{n\in N}$ *полна, минимальна, образует базис в* $L_{p(\cdot)}(0,\pi)$, *соответственно.*

Глава **V** в целом посвящена некоторым смежным вопросам базисов в банаховых пространствах, и в частности, в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости. В ней приводится один непрерывный аналог классической теоремы Пэли-Винера о базисности Рисса возмущенной системы экспонент. Предлагается один метод установления базисности возмущенных систем синусов и косинусов в соболевом пространстве с переменным показателем суммируемости. Ранее подобные результаты были получены в работах таких авторов, как А.М.Седлецкий, A.M.Mallat в обычном соболевом пространстве. На языке мультипликаторов, также приводится один $p(\cdot)$-аналог известной теоремы «$\frac{1}{4}$-Кадеца». Предложено одно достаточное условие базисности возмущенных систем косинусов в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Полученные результаты применяются к установлению базисности системы из решений задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля, зависящее от спектрального параметра, в обобщенном пространстве Лебега.

В **5.1** получен один непрерывный аналог классической теоремы Пэли-Винера.

Хорошо известна классическая теорема Пэли-Винера о базисности Рисса близких систем в гильбертовом пространстве. В дальнейшем эта теорема была обобщена во многих направлениях. Возникает вопрос о существовании аналога этого результата в непрерывном случае. Что подразумевается под непрерывным аналогом, поясним в последующем изложении.

Имеет место следующий непрерывный аналог теоремы Пэли-Винера.

Теорема 26. *Пусть функция* $\varphi(\lambda;x)$ *близка к* $e^{i\lambda x}$ *в том смысле , что* $\exists\theta\in[0,1)$, *для которого имеет место неравенство*

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int_{A}^{B}a(\lambda)\left[\varphi(\lambda;x)-e^{i\lambda x}\right]d\lambda\right|^{2}dx\le 2\pi\theta^{2}\int_{A}^{B}\left|a(\lambda)\right|^{2}d\lambda\,,$$

$\forall A,B\in(-\infty,+\infty)$, $A<B$ *и* $\forall a(\lambda)\in L_2^{loc}(-\infty,+\infty)$.

Тогда существует автоморфизм

$K:L_2(-\sigma,+\sigma)\leftrightarrow L_2(-\sigma,+\sigma)$, *для которого* $\forall f\in L_2(-\sigma,+\sigma)$ *имеет следующее «разложение»*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[FKf](\lambda)\varphi(\lambda;x)d\lambda\ .$$

Таким образом справедливо

Следствие 2. *Пусть* $|\alpha|<\dfrac{\ln 2}{\sigma}$. *Тогда существует автоморфизм*

$$K_\alpha:L_2(-\sigma,\sigma)\leftrightarrow L_2(-\sigma,\sigma),$$

для которого $\forall f\in L_2(-\sigma,\sigma)$ *имеет следующее «разложение», причем единственное*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[FK_\alpha f](\lambda)\varphi_\alpha(\lambda,x)d\lambda\,,$$

где $\varphi_\alpha(\lambda;x)\equiv e^{i(\lambda+\alpha\ sign\lambda)x}$, $(\lambda;x)\in(-\infty,+\infty)\times(-\sigma,+\sigma)$.

В **5.2** предлагается один метод установления базисов в соболевом пространстве $W^1_{p(\cdot)}$ с переменным показателем суммируемости $p(\cdot)$. В случае когда $p(\cdot)\equiv const$ постоянная функция, результаты данного параграфа принадлежат авторам работы Шайдуков К.. Для полноты изложения приводятся полные доказательства соответствующих фактов в нашем случае.

В **5.3** доказана базисность близких в смысле мультипликатора систем в банаховых пространствах. Эти результаты применены к возмущенной системе экспонент в лебеговом пространстве $L_{p(\cdot)}$.

Получены $p(\cdot)$ -аналоги теоремы «$\frac{1}{4}$ – Кадеца» для систем экспонент, косинусов и синусов на языке мультипликатора**.**

В **5.4** рассматривается задача Коши со спектральным параметром для оператора Штурма-Лиувилля. Доказано, что последовательность значений для спектрального параметра можно выбирать таким образом, чтобы соответствующая система решений образовывала изоморфный к классическим тригонометрическим системам базис в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Этот подход можно трактовать в смысле В.А. Ильина.

Автор выражает свою глубокую благодарность своему научному консультанту чл.-корр. НАН Азерб., профессору Б.Т.Билалову за постоянное внимание к работе и за поддержку.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. T.R.Muradov. On approximation properties of systems of exponents, cosines and sine's in L_p. Reports National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2007, №3, p.26-32
2. T.R.Muradov. Bases from unitary systems of cosines &sines. Sakarya Univ. Türk Dünyasi, Mathematic symposium 4-7 Temmuz 2007, p.246
3. Т.Р.Мурадов. Об аппроксимативных свойствах систем экспонент в L_p. Тезисы симп. «Совр. проблемы мат., мех. и информ.», Нахичеван, 2007, с.71
4. Т.Р.Мурадов. О непрерывном аналоге теоремы из Пэли-Винера. Тезисы межд.конф.по физическим, матем.и техн.наукам, Нахичеван, 2008, с.124.
5. Т.Р.Мурадов. О непрерывном аналоге теоремы Пэли-Винера. «Дифф. уравнения и смежные пробл.» Труды межд. науч. конф. Стерлитамак, 2008, т.II, с.60-63.
6. Т.Р.Мурадов. О базисности некоторых одинарных систем косинусов и синусов. Тез. конф. «Функ. прост. диф. операторы, общая топ.

пробл. мат. образов.» посв. 85- летию Л.Д.Куд-рявцева, М., 2008, с.159-160.
7. T.R.Muradov. On continuous analogue of Paley-Wiener theorem. “Math. An., diff. equat. and their appl.” Famaguste, North Cyprus 2008, p.41-42.
8. T.R.Muradov. On basicity of perturbed system of exponents in Lebesque spaces with variable summability index. Abstr. of the 3-rd Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries. Almaty, 2009, v.I, p.118.
9. T.R.Muradov. On basicity of perturbed system of exponents in Lebesque spaces with variable summability index. Trans. of NASA, 2009, v.XXIX, №4, p.107-112.
10. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент с переменным показателем суммируемости. Тезисы межд. конф. по мат. и мех. посв. 50-летию ИММ НАНА, 2009, с.222.
11. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент с переменным показателем суммируемости. Матер. межд. конф. по астрономии, физ. и мат. посв. Межд. Году Астрон. Нахчиван, 2009, с.129.
12. Т.Р.Мурадов. Базисы из возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. ДАН Азерб. 2009, №6, т. LXV, с.15-19
13. Т.Р.Мурадов, Гараев Т.З.О мультипликаторах и P-аналоге теоремы «$\frac{1}{4}$-Кадеца». Естественные и технические науки. Математика. Москва 2010, №4, с.16-23.
14. T.R.Muradov. Space with variable summability index. Abst. of Intern. conf. Devoted to the 80-th anniver.of academician F.G.Magsudov, Baku 2010, p.241.
15. T.R.Muradov. Bases from ekponent in Lebesque. Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific conf. “Math. Analysis Differential Equations and their applications” September 15-20 2010, p.33-34
16. T.R.Muradov, Farahani S. On basisty of some perturbed system of exponents in L_p. Trans. of NASA, 2010, №4, v.XXX, p.129-134
17. Т.Р.Мурадов, Садыгова С.Р. О банаховом обобщении теоремы Като о базисности близких систем. Proceedings of IMM of NASA, 2010, v.XXXIII, p.137-140.
18. Т.Р.Мурадов. О базисных свойствах некоторой возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем

суммируемости. Материалы конф., посв. 100-летнему юбилею акад. З.И.Халилова Баку 2011, с.256-260
19. T.R.Muradov. Basicity of systems discontinuous phase exponents in generalized Lebesque spaces. Int. conf. “Continuum mechanics and related problems of analysis” dedicated to the 70-th anniv. of the Georgian NAS and 120 birth of N.Muskhlishvili Tbilisi, 2011, p.122-123.
20. Т.Р.Мурадов. О базисности возмущенной системы экспонент в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Доклады РАН, 2012, т.443, №3, с.290-292.
21. T.R.Muradov. On Riemann boundary value problem in Hardy classes with variable summability exponent. Intern. Journal of Math. Analysis, 2012, v.6, №15. p.743-751.
22. Т.Р.Мурадов. Базисность возмущенной системы экспонент в обобщенных пространствах Лебега. Матер. межд. конф. «Теория функций и проблемы гармоничес-кого анализа», посв. 100-летнему юбилею акад. И.И.Ибрагимова. Баку, 2012, с.175.
23. T.R.Muradov, S.R.Sadigova On basicity of double systems in Banach spaces. Journal of Contemporary Applied Mathematics. 2012, v.2, №1. p.8-14.
24. T.R.Muradov. Basicity of a perturbed system of exponents in generalized Lebesgue spaces. Mathematica Aeterna, v.2, 2012, №5, p.459-472.
25. T.R.Muradov. Frame properties of a part of the system of exponents in Hardy weighted classes. American journal of Mathematical Analysis, 2013, v.1, №1, p.1-7
26. Т.Р.Мурадов. Фреймовые свойства части системы экспонент в весовых классах Харди. Тезисы IV межд. конф. «Функцион. прост. Дифф. операторы. Проблемы мат. образов.», посв. 90-летию со дня рожд.чл.-корр. РАН Л.Д.Кудрявцева. Москва, 25-29 марта 2013, с.97-98
27. Т.Р.Мурадов. Базисность возмущенной системы экспонент в обобщенных пространствах Лебега. Тезисы межд. конф. «Актуальные проблемы матем. и информ.» посв. 90 летию Г.Алиева, 2013, стр.179-180
28. T.R.Muradov, Mamedova Z.V.On basis properties of degenerate exponential system. RMİ-nın 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı beyn. konfransın tezisləri, 2014, 15-16 may c.275

29. T.R.Muradov. On bases from perturbed system of exponents in Lebesgue spaces with variable summability exponent. Journal of Inequalities and Applications 2014,2014:495 pp.1-8
30. Т.Р.Мурадов, Салманов В.Ф.О базисности тригонометрических систем с линейной фазой в весовом пространстве Соболева. Доклады РАН, 2014, т.458, №5, с.523-525
31. T.R.Muradov. Topological properties of the space of coefficients genera-ted by the non-degenerate system in metric spaces. Proceedings of IMM of NASA, v.40, special issue, 2014, p.308-314
32. T.R.Muradov, V.F.Salmanov Basicity of the system of exponents with a linear phase in Sobolev weight space. Journal of Mathematics Hindawi Publishing Corporation, v.2014 (2014), Article ID 481425, p.1-4
33. T.R.Muradov. On basicity of the system of solutions of the Cauchy problem for the Sturm-Liouville equation in the generalized Lebesque spaces. International Journal of Mathematical Analysis, 2015, №30, 1489-1498 HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
34. T.R.Muradov. On basicity of the system of solutions of the Cauchy problem for the Sturm-Liouville equation in the generalized Lebesque spaces. 7-th Intern. conf. of "Mathematical analysis. Differential equation and Their application" MADEA 7, 8-13 september 2015, p.117
35. Т.Р.Мурадов. Свойства базисности систем в банаховых пространствах и их применения. LAMBERT Academik Publishing 2015, 86 p.
36. T.R.Muradov. On completeness and minimality of double and unitary systems in generalized Lebesgue spaces. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics,2015, v.3, №1, pp.82-90
37. T.R.Muradov. On basicity of double and unitary systems in generalized Lebesgue spaces. Mathematica Aeterna 2015, v.5, №4, pp.657-666
38. T.R.Muradov. Basicity of system of exponents with complex coefficients in generalized Lebesque spaces. General Mathem. Notes 2015, v.30, №1, İSSN2219-7184, pp.12-20
39. T.R.Muradov, Hashimov Ch.M.On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index. Journal of Inequalities and Applications, (2016), 2016:3, DOI.10.1 186/s 13660-015-0951-6 7pp.
40. T.R.Muradov, On Basicity of the Systems of Cosines and Sines in the Generalized Lebesgue Space. International conference on mathematical advances and its applications. May, 11-13, 2018, Istanbul, Turkey

41. T.R.Muradov, Bases from sines and cosines in the generalized Sobolev space $W^1_{p(\cdot)}(0,\pi)$. Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения-XXIX. Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. Москва, 2018, с. 257
42. T.R.Muradov, On bases from cosines in Lebesgue spaces with variable summability index. "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference", Khazar University, Baku, Azerbaijan, 21-24 may, 2018

TOĞRUL RAFAEL oğlu MURADOV

APPROKSİMASİYANIN BƏZİ QARIŞIQ MƏSƏLƏLƏRİ VƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ LEBEQ FƏZALARINDA BAZİSLƏR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi ümumilikdə ümumiləşmiş Lebeq və Sobolev fəzalarında bazislik məsələlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- $H^{+}_{p(\cdot)}$ və ${}_{m}H^{-}_{p(\cdot)}$ Hardi siniflərinə baxılmış, bu fəzalarda eksponent sisteminin müəyyən hissələrinin bazisliyi öyrənilmişdir;
- $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ sistemi $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ $p(\cdot)$ dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında bazis təşkil edirsə, isbat olunmuşdur ki, bu fəzada o, $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ klassik eksponent sisteminə izomorfdur;
- ümumiləşmiş $L_{p(\cdot)}$ Lebeq fəzasında həyəcanlanmış eksponent sistemin, eləcə də vahidə malik həyəcanlanmış eksponent sistemin çəkili Lebeq fəzasında bazisliyi öyrənilmişdir;
- ümumiləşmiş Hardi siniflərində hissə-hissə kəsilməz əmsala malik Riman məsələsi öyrənilmiş, bu nəticələr tətbiq olunaraq $L_{p(\cdot)}$ fəzasında hissə-hissə kəsilməz fazaya malik eksponent sistemin bazisliyi isbat edilmişdir.;
- Banax fəzalarında operator əmsallı ikiqat sistemin bazisliyi öyrənilmiş, bu sistemlərin bazisliyi və uyğun operator tənliyin həll olunanlığı arasında əlaqə qurulmuş, zəruri bazislik şərtləri alınmışdır;
- Hilbert fəzalarında Hilbert tenzor hasilinə baxılmış, bixətti inikasın doğurduğu t-ayrılış anlayışı daxil edilmiş, Hilbert fəzasının ixtiyari elementinin sonlu sayda element ixtisar olunduqdan sonra alınan sistem üzrə t-ayrılışı haqqında teorem isbat olunmuşdur;
- müəyyən xassələrə malik xətti metrik fəzaya baxılmış, cırlaşan sistem anlayışı daxil edilmiş, bu sistemlərin kanonik bazisə malik tam metrik əmsallar fəzasından olduğu isbat olunmuş, əmsal operatoru dilində bazislik kriteriyası verilmişdir;

- $L_{p(\cdot)}$ fəzalarında ikiqat və uyğun birqat sistemlərin bazislik xassələri arasında əlaqə qurulmuşdur;
- Klassik Peli-Viner teoreminin bir kəsilməz analoqu alınmışdır;
- spektral parametrə malik Şturm-Liuvill operatoru üçün Koşi məsələsinə baxılmış, isbat olunmuşdur ki, spektral parametr üçün qiymətlər ardıcıllığını elə seçmək olar ki, uyğun həllər sistemi dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasında klassik triqonometrik sistemə izomorf bazis təşkil etsin.

TOGRUL RAFAEL oglu MURADOV

SOME RELATED QUESTIONS OF APPROXIMATION AND BASES IN GENERALIZED LEBESGUE SPACES

SUMMARY

The dissertation is devoted to the study of basis problems in Lebesgue and Sobolev spaces.

The following main results are obtained in dissertation:

$H^{+}_{p(\cdot)}$ and ${}_{m}H^{-}_{p(\cdot)}$ Hardy spaces are considered and the basis property of definite parts of the system of exponentials in these subspaces are studied;

It is proved that if a double system of exponents $\left\{A(t)e^{\mathrm{int}};B(t)e^{-i(n+1)t}\right\}_{n=0}^{\infty}$ forms a basis in a space $L_{p(\cdot)}(-\pi,\pi)$ with a variable exponent of summability $p(\cdot)$, then it is isomorphic in it to the classical system of exponentials $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$;

- the basis property of the perturbed system of exponentials in the generalized Lebesgue space $L_{p(\cdot)}$ is studied, as well as the basis property of the perturbed systems of exponentials with unit in the weighted generalized Lebesgue space;

-the Riemann problem with piecewise-continuous coefficient in generalized Hardy classes is studied and applying these results establishes the basis property of the system of exponentis with piecewise-continuous phase in $L_{p(\cdot)}$;

Bases are considered for binary systems with operator coefficients in Banach spaces, relations are established between the bases of these systems and the solvability of the corresponding operator equations, the necessary condition for the basis property is obtained;

the Hilbert tensor product of Hilbert spaces is considered, introduce the concept of t-decomposition generated by a bilinear mapping defined by a Hilbert tensor product, prove a theorem on the t-decomposition of an

arbitrary element of a Hilbert space with respect to a given system after eliminating a finite number of elements;

linear metric spaces with a certain property is considered, the notion of a non-degenerate system is introduced, prove that such systems have a complete metric space of coefficients with a canonical basis; In the term of the coefficient operator, the basis property criterion is given;

- Relations are established between the basis properties of binary systems and the corresponding single systems in spaces $L_{p(\cdot)}$;

-One continuous analogue of the classical Paley-Wiener theorem is obtained;

-the Cauchy problem with the spectral parameter for the Sturm-Liouville operator is considered. It is proved that a sequence of values for a spectral parameter can be chosen in such a way that the corresponding system of solutions forms a basis isomorphic to classical trigonometric systems in the Lebesgue space with variable exponent of summability.