НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

НОВРАСТА СИДКАЛИ кызы БАЙРАМОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА, АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЗВЕШЕННОГО СЛЕДА НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку − 2018

Работа выполнена на кафедре «**Математический анализ**» **Сумгаитского Государственного Университета**.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, проф. **Гамидулла Асланов**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Сабир Мирзоев**

(Института Математики и Механики НАНА);

- доктор наук по математике, доц. **Нигяр Асланова**

(Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 29 июня 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 17 мая 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного
Совета Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Данная диссертационная работа посвящена исследованию функции Грина, дискретности спектра, асимптотического распределения собственных значений, изучению асимптотики взвешенного следа, доказательству принадлежности резольвенты некоторым классам σ_p операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка в гильбертовом пространстве, а также исследованию структуры спектра и ассимптотики собственных значений и собственных функций уравнения типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом, когда спектральный параметр входит в граничное условие.

Отметим, что исследование спектральных свойств операторно-дифференциальных уравнений начато в 60-х годах прошлого столетия. Известный математик Ф.С.Рофе-Бекетов впервые для уравнения Штурма-Лиувилля с ограниченным операторнозначным потенциалом получил формулы разложения по собственным вектор-функциям.

В дальнейшем М.Г.Гасымов, М.Л.Горбачук, Р.З.Халилова, В.В.Жиков, Б.МЛевитан, М.Байрамоглы, Д.Р.Яфаев, Е.Абдукадыров и другие получили существенные результаты в этом направлении.

Впервые в работе А.Г.Костюченко и Б.М.Левитана рассмотрено уравнение Штурма-Лиувилля с неограниченным самосопряжённым операторным коэффициентом с дискретным спектром и найдена асимптотическая формула для числа собственных значений не превосходящих данного числа λ . После этой работы появились работы по исследованию спектральных свойств дифференциальных уравнений с операторными коэффициэнтами.

В этом направлении отметим работы М.Байрамоглы, Е.Абдукадырова, М.Л.Горбачука и В.И.Горбачука, В.И.Михайлеца, Б.М.Левитана, Б.М.Левитана и Г.А.Суворченковой, В.А.Кутовой, В.П.Маслова, Г.А.Мишнаевского, Г.И.Асланова, Г.Д.Оруджева, А.А.Абудова, А.А.Адыгезалова, Н.М.Аслановой, А.В.Байрамова и др.

В работе Б.М.Левитана подробно исследована функция Грина, уравненя Штурма-Лиувилля с самосопряженным операторным коэффициентом на всей оси. Результаты этой работы обобщены и развиты М.Байрамоглы, Г.И.Аслановым, А.А.Абудовым, В.И.Алиевым и другими учениками М.Байрамоглы для операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка. В этих исследованиях получены интегральные уравнения для функции Грина, доказаны теоремы о разрешимости этих уравнений в некоторых Банаховых пространствах операторнозначных функций. Одновременно получены асимптотические формулы для функций распределения собственных значений данных операторов.

Взвешенный след для операторного уравнения Штурма-Лиувилля с самосопряжённым операторным потенциалом, заданным на всей оси, исследован Г.И.Аслановым. В работах М.Байрамоглы рассмотрена аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси, когда в граничное условие входит неограниченный постоянный оператор и для оператора $\Delta^2 + Q(x)$, заданного в трёхмерном евклидовом пространстве. Г.И.Асланов и М.Байрамоглы вычислили главный член асимптотики взвешенного следа для операторного уравнения Шрединга, заданного в R^3. Г.И.Асланов получил асимптотическую формулу для взвешенного следа для операторного уравнения высокого порядка, заданного на всей оси.

В различных случаях асимптотика взвешенного следа операторно-дифференциальных уравнений высого порядка получена Г.И.Аслановым и Г.И.Гасымовой, Г.И.Аслановым и К.Г.Бадаловой.

Одним из важных задач спетральной теории дифференциальных операторов является изучение резольвенты данного оператора. М.Отельбаевым доказаны теоремы о принадлежности резольвенты операторного уравнения Штурма-Лиувилля некоторым классам σ_p Неймана-Шатенна. К.Х.Бойматовым получены условия принадлежности резольвенты операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка классам σ_p.

Для операторного уравнения второго порядка, заданного на конечном отрезке М.Г.Душдуровым, Г.И.Аслановым и Г.И.Гасымовой доказаны теоремы о принадлежности резольвенты к классам Гильберта-Шмидта.

В последние годы бурно развивается изучение спектральных задач для дифференциальных уравнений, когда спектральный параметр входит в граничные условия. Отметим важные работы Д.Волтера, Дж.Т.Фултона, Е.М.Русаковского, А.А.Шкаликова, Н.Ю.Капустина и Е.И.Моисеева, Н.В.Керимова и З.С.Алиева, Н.В.Керимова и В.С.Мирзоева, Н.В.Керимова и Х.Р.Мамедова, И.Албайрак, М.Байрамоглы и А.А.Адыгёзалов, П.А.Биндинга, Р.Л.Браун и К.Сиддиги, М.Байрамоглы и У.Е.Шена, Б.А.Алиева и др.

А.Д.Мышкисым разработаны основы общей теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и даны точные постановки краевых задач для таких уравнений. Г.И.Каменский, С.В.Норкин, Л.Е.Елсгольц и другие исследовали свойства решений уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом с непрерывными и гладкими коэффициентами.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда в граничные условия входит спектральный параметр исследованы многими авторами. Отметим работы А.М.Байрамова, М.Байрамоглы, А.М.Байрамова и Е.Шена, А.Байрамова, С.Озтурк Услуб, С.Кызылбудаг Чалышкан и др.

Настоящая диссертационная работа также посвящена этой тематике. В диссертации построена функция Грина операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси и исследованы её свойства. Доказаны дискретность спектра данного уравнения. Получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений оперторного укравнения высокого порядка на полуоси. Для одного класса операторного уравнения высокого порядка исследована асимптотика взвешенного следа. Доказаны теоремы о принадлежности классу σ Гильберта-Шмидта резольвенты одного класса операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на конечном отрезке. Исследована структура спектра, асимптотика собственных значений и собственных функций краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом в случае, когда спектральный параметр входит в краевые условия.

Цель работы.

1. Построение и исследование основных свойств функции Грина операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси.
2. Доказательство дискретности спектра операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси.
3. Получение асимптотической формулы для функции распределения собственных значений операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси.
4. Исследование взвешенного следа одного класса операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси.
5. Доказательство принадлежности резольвенты к классу Гильберта-Шмидта операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на конечном отрезке.

6. Исследование структуры спектра, асимптотики собственных значений и собственных функций краевой задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка на конечном отрезке.

Общая методика исследований.

В диссертации использованы методы самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве, теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория операторозначных функций в гильбертовом пространстве.

Научная новизна. В работе получены следующие новые научные результаты:

- Построены и изучены основные свойства функции Грина операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси;
- Доказана дискретность спектра операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси;
- Доказана асимптотическая формула для числа собственных значений операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси;
- Для одного класса операторно-дифференциального уравнения высокого порядка исследован взвешенный след;
- Доказана теорема о принадлежности резольвенты операторного уравнения высокого порядка на конечном отрезке к классу σ_2 Гильберта-Шмидта;
- Изучена структура спектра, асимптотика собственных значений и собственных функций краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, когда спектральный параметр входит в граничные условия.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации носит теоретический характер. Они могут быть использованы при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов, а также в исследованиях в области квантовой теории.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах отделов «Функциональный анализ» и «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Математический анализ и теория функций» и «Дифференциальные уравнения и оптимизация»

Сумгаитского Государственного Университета, Международной конференции, посвящённой 55-летию ИММ НАНА (Баку-2014), на III Международной конференции молодых исследователей, проведённой в Кавказском Университете (Баку-2015), МАДЕА-7, Совместной Международной конференции Азербайджан-Турция-Украина "Mathematikal Analysis, Differential equations and their Applications" (Баку-2015), Международной конференции, посвящённой 85-летию член-корр. НАНА, проф. Я.Д.Мамедова (Баку-2015), Республиканской конференции «Функциональный анализ и его применения», посв. 100-летию заслуженного деятеля науки, проф. А.Ш.Габибзаде (Баку-2016), Республиканской конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики», посв. 100-летию академика М.Л.Расулова (Шеки-2016), Международной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики», проведённой совместно ИММ НАНА и Сумгаитским Государственным Университетом (Сумгаит-2017).

Публикации. Полное содержание диссертации опубликовано в 14 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка используемой литературы, включающей 124 наименования. Объём диссертации составляет 143 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обосновывается актуальность темы, приводится краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации и последовательно излагаются основные полученные результаты диссертации.

Первая глава посвящена построению и исследованию основных свойств функции Грина операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси. Построена фунция Грина, доказаны основные свойства и получена равномерная оценка фунции Грина при больших значениях спектрального параметра. Используя эти оценки доказывается, что функция Грина является ядром типа Гильберта-Шмидта. Отсюда следует дискретность спектра данного оператора.

Пусть H- сепарабельное гильбертовое пространство. В пространстве $H_1 = L_2[(0;\infty);H]$ рассмотрим оператор L, порождённый дифференциальным выражением

$$\ell(y) = (-1)^n \left(P(x) y^{(n)}\right) + \sum_{j=1}^{2n} Q_j(x) y^{(2n-j)},\ 0 \le x < \infty \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$y^{(\ell_1)}(0) = y^{(\ell_2)}(0) = \dots = y^{(\ell_n)}(0) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $y(x) \in H_1$ и производные понимаются в сильном смысле,

$$0 \le \ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \dots < \ell_n \le 2n-1$$

Пусть функции $\varphi_k(x)$ $2n-$ раз непрерывно дифференцируемые скалярные функции и $f_k \in D(Q)$ (везде через $Q(x)$ обозначим $Q_{2n}(x)$). Через D' обозначим множество всех функций вида $\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) f_k$.

Оператор, порождённый выражением (1) и граничными условиями (2) с областью определения D' обозначим через L'. При некоторых условиях оператор L' является ограниченным снизу положительным симметрическим оператором в пространстве H_1. Будем предполагать, что замыкание L оператора L' является ограниченным снизу самосопряжённым оператором в пространстве H_1.

Предположим что, операторные функции $P(x)$ и $Q(x)$, $j = 2,3,\dots,2n$ удовлетворяют следующим условиям:

1^0. Операторная функция $P(x)$ $n-$ раз равномерно-дифференцируема и для всех $x \in [0,\infty)$ и для всех $h \in H$ выполняется неравенство

$$m(h,h)_H \le (P(x)h,h)_H \le M(h,h)_H,\ m,M > 0;$$

2^0. Операторы $Q(x)$ для почти всех $x \in [0,\infty)$ самосопряжены в H, причём в H множество $D(Q) = S\{Q(x)\}$, на котором $Q(x)$ определены и самосопряжены, равномерно снизу ограничены, т.е. существует $d > 0$ такое, что для всех $x \in [0,\infty)$ и для всех $f \in D(Q)$ выполняется неравенство

$$(Q(x)f, f)_H \geq d(f, f)_H;$$

3^0. Существуют постоянные числа $C > 0,\ 0 < a < \dfrac{2n+1}{2n}$ такие, что при всех x и $|x - \xi| \leq 1$ справедливо неравенство

$$\left\| [Q(\xi) - Q(x)]Q^{-a}(x) \right\|_H < C|x - \xi|;$$

4^0. Для $|x - \xi| > 1$

$$\left\| K(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{Jm\varepsilon_1}{2} |x - \xi| Q^{\frac{1}{2n}}(x) \right) \right\|_H < C$$

где $K(x) = P^{-\frac{1}{2}}(x)Q(x)P^{-\frac{1}{2}}(x),\ \ \omega = \left\{ K(x) + \mu P^{-1}(x) \right\}^{\frac{1}{2n}}$,
$\mu > 0,\ Jm\varepsilon_1 = \min\limits_i \left\{ Jm\varepsilon_i > 0,\ \varepsilon_i^{2n} = -1 \right\};$

5^0. Для всех x и ξ из $[0, +\infty)$ выполняются неравенства

$$\left\| Q(x)P^{\pm\frac{1}{2}}(x)Q^{-1}(x) \right\|_H < C, \quad \left\| Q(x)P^{-\frac{1}{2}}(x)P^{\frac{1}{2}}(\xi)Q^{-1}(\xi) \right\|_H < C$$

6^0. Оперторы $Q_j(x),\ \ j = 2,3,\ldots,2n-1$ являются самосопряжёнными операторами в H и для всех $x \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\left\| Q_j(x)Q^{\frac{1-j}{2n}+\varepsilon}(x) \right\|_H < C, \ \ j = 2,3,\ldots,2n-1$$

где $\varepsilon > 0$ - постоянное число.

7^0. Предположим, что $Q^{-1}(x)$ для почти всех $x \in [0, +\infty)$ является обратным к вполне непрерывному оператору. Тогда $K^{-1}(x)$ также для почти всех $x \in [0, +\infty)$ является обратным к вполне непрерывному оператору.

Обозначим через $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \ldots \leq \alpha_n(x) \leq \ldots$ собственные значения оператора $K(x)$, относительно которых будем предполагать, что они являются измерительными функциями. Так как по предположению операторы $Q(x)$ (значит и операторы $K(x)$) равномерно ограничены снизу, то не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_1(x) \geq 1$. Далее предположим, что для почти всех $x \in [0, +\infty)$ сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1-4n}{2n}}(x)$ и его сумма $F(x) \in L_1[0, \infty)$.

1.2-1.5 посвящается построению и исследованию неоторых свойств функции Грина $G_0(x, \eta, \mu)$ оператора *L₀*, порождённого выражением

$$\ell_0(y) = (-1)^n \left(P(x) y^{(n)}\right)^{(n)} + Q(x) y + \mu y \tag{3}$$

граничныvми условиями (2).

В 1.2 построена функция Грина $G_1(x, \eta, \xi, \mu)$ оператора L_1, порождённого дифференциальным выражением

$$\ell_1(y) = (-1)^n \left(P(\xi) y^{(n)}\right)^{(n)} + Q(\xi) y + \mu y \tag{4}$$

и граничными условиями (2), где "ξ" - фиксированная точка. Для функции $G_1(x, \eta, \xi, \mu)$ получено следующее выражение:

$$G_1(x, \eta, \xi, \mu) = \frac{1}{2ni} P^{-\frac{1}{2}}(\xi) \omega_\xi^{1-2n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e^{i\varepsilon_k \omega_\xi |x-\eta|} \cdot P^{-\frac{1}{2}}(\xi) -$$

$$- \frac{1}{2ni} P^{-\frac{1}{2}}(\xi) \omega_\xi^{1-2n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e^{i\varepsilon_k \omega_\xi (x+\eta)} \cdot P^{-\frac{1}{2}}(\xi). \tag{5}$$

Отсюда получаем:

$$G_1(x, \eta, \xi, \mu) = g(x, \eta; \xi, \mu)\left[E - r(x, \eta, \xi, \mu)\right], \tag{6}$$

где

$$g(x, \eta, \xi, \mu) = \frac{1}{2\pi i} P^{-\frac{1}{2}}(\xi) \omega_\xi^{1-2n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e^{i\varepsilon_k |x-\eta|} \cdot P^{-\frac{1}{2}}(\xi)$$

Является фундаментальным решением уравнения $\ell_1(y) = 0$ на всей оси. (Здесь $\left\| r(x, \eta, \xi, \mu) \right\|_H = 0(1)$, при $\mu \to \infty$).

В 1.3 пользуясь методом Леви получается интегральное уравнение для функции Грина оператора L_0 и исследуется решение этого уравнения.

Интегральное уравнение фунции Грина $G_0(x, \eta, \mu)$ имеет следующий вид:

$$G_0(x,\eta,\mu)=G_1(x,\eta,\mu)-\int_0^\infty G_1(x,\xi,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]G_0(\xi,\eta,\mu)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2ni}\int_0^\infty P^{-\frac{1}{2}}(x)\omega\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\exp(i\varepsilon_k|x-\xi|\omega)(E-r(x,\xi,\mu))P^{-\frac{1}{2}}(x)\times$$

$$[P(\xi)-P(x)]\times G_0(x,\eta,\mu)d\xi+(-1)^n\sum_{m=1}^{n}C_n\int_0^\infty\left(C_1^{(2n-m)}(x,\xi,\mu)\right)_\xi\cdot$$

$$\cdot P^{(m)}(\xi)G_0(\xi,\eta,\mu)d\xi \qquad (7)$$

Интегральное уравнение (7) исследуется в банаховых пространствах $X_1, X_2, X_3^{(P)}, X_2^{(S)}, X_4^{(S)}$ və X_5 $(P\geq 1,\ S>0)$ введенных Б.М.Левитаном. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

<u>Теорема 1.3.1.</u> Если операторные коэффициенты *P(x)* и *Q(x)* удовлетворяют условиям 1^0-5^0 и 7^0, то при достаточно больших значениях $\mu>0$ интегральный оператор

$$TA(x,\eta)=\int_0^\infty G_1(x,\eta,\mu)[Q(\xi)-Q(x)]A(\xi,\eta)d\xi+\frac{1}{2ni}\times$$

$$\times\int_0^\infty P^{-\frac{1}{2}}(x)\omega\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\exp(i\varepsilon_k|x-\xi|\omega)(E-r(x,\eta,\mu))P^{-\frac{1}{2}}(x)[P(\xi)-P(x)]\times$$

$$\times A(\xi,\eta)d\xi+(-1)^n\sum_{m=1}^{n}C_n^m\int_0^\infty G_{1\xi}^{(2n-m)}(x,\xi,\mu)P^{(m)}(\xi)A_0(\xi,\eta)d\xi \qquad (8)$$

является сжимающим оператором в пространствах X_1 и X_2 .

Из этой теоремы следует, что интегральное уравнение (7) имеет единственное решение в пространствах X_1 и X_2 и может быть решено методом итерации.

Для решения $G_0(x,\eta,\mu)$ получается асимптотическое равенство

$$G_0(x,\eta,\mu)=G_1(x,\eta,\mu)[E+\alpha(x,\eta,\mu)] \qquad (9)$$

где $\|r(x,\eta,\mu)\|_H=0(1)$, при $\mu\to\infty$.

В 1.4 исследуются производные функции Грина $G_0(x,\eta,\mu)$ оператора L_0. Доказывается, что производные

$$\frac{\partial^k G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^k} \quad (k = 0,1,2,\ldots,2n-2)$$

являются сильно непрерывными операторными функциями по переменным (x,η). Производная $\frac{\partial^{2n-1} G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^{2n-1}}$ непрерывна при $\eta \neq x$, а при $\eta = x$ имеет разрыв первого рода, т.е.

$$\frac{\partial^{2n-1} G_0(x,x+0,\mu)}{\partial \eta^{2n-1}} - \frac{\partial^{2n-1} G_0(x,x-0,\mu)}{\partial \eta^{2n-1}} = (-1)^n P^{-1}(x)$$

В 1.5 доказывается, что функция Грина $G_0(x,\eta,\mu)$ при $\eta \neq x$ удовлетворяет уравнению

$$(-1)^n \left(G_{0\eta}^{(n)}(x,\eta,\mu)P(\eta)\right)_\eta^{(n)} + G_0(x,\eta,\mu)[Q(\eta) + \mu E] = 0$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{\ell_1} G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^{\ell_1}}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial^{\ell_2} G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^{\ell_2}}\right|_{\eta=0} = \ldots = \left.\frac{\partial^{\ell_n} G_0(x,\eta,\mu)}{\partial \eta^{\ell_n}}\right|_{\eta=0} = 0$$

В 1.6 построена функция Грина $G(x,\eta,\mu)$ оператора *L*, порождённого выражением (1) и граничными условиями (2) и получена равномерная оценка функции Грина при $\mu \to \infty$ равномерно по переменным (x,η).

Функция Грина $G(x,\eta,\mu)$ ищется в виде

$$G(x,\eta,\mu) = G_0(x,\eta,\mu) + \int_0^\infty G_0(x,\xi,\mu)\rho(\xi,\eta)d\xi \qquad (10)$$

Для функции Грина получена следующая асимптотическая оценка при $\mu \to \infty$:

$$G(x,\eta,\mu) = G_0(x,\eta,\mu)[E + \sigma(x,\eta,\mu)] \qquad (11)$$

где $\|\sigma(x.\eta,\mu)\|_H = 0(1)$.

Из равенств (6), (9) и (11) следует асимптотическая оценка

$$G(x,\eta,\mu) = g(x,\eta,\mu)[E + \beta(x,\eta,\mu)] \qquad (12)$$

($\|\beta(x.\eta,\mu)\|_H = 0(1)$) при $\mu \to \infty$.

Используя (12) доказывается, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \|G_0(x,\eta,\mu)\|_H^2 \, dxd\eta < \infty$$

Так как $G(x,\eta,\mu)$ является ядром интегрального оператора $R_\mu = (L+\mu E)^{-1}$, отсюда следует дискретность спектра оператора L.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n,\ldots}$ собственные значения, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\ldots$ соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции оператора L . Пусть λ - некоторое положительное число. Через $N(\lambda)$ обозначим число собственных значений оператора *L*, меньших данного числа λ , т. $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_n<\lambda} 1$.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию асимптотического распределения собственных значений, получению асимптотической формулы для взвешенного следа операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси, а также доказательству принадлежности резольвенты операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на конечном отрезке к классу операторов типа Гильберта-Шмидта. В конце второй главы изучена структура спектра, асимптотика собственных значений и собственных функций краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, когда спектральный параметр входит в граничные условия.

В 2.1. получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений оператора *L*, порождённого дифференциальным выражением (1) и граничными условиями (2).

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. Если коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условиям 1^0–7^0 и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dxds}{\{\beta_K(x,s)+\mu\}^2}, \tag{13}$$

где $\beta_K(x,s)$ собственные значения оператора $P(x)S^{2n}+Q(x)$ в пространстве *H*, то при $\lambda\to\infty$ верна следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2} \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dxds}{\{\beta_k(x,s)+\mu\}^2}. \tag{14}$$

В частности, из этой теоремы следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_k+\mu)^2}.$$

Предоложим, что собственные значения $\beta_m(x,s)$ удовлетворяют условию:

8*) Существуют постоянные c_1 и c_2, такие, что

$$\frac{c_1}{t^2}\sum_{m=1}^{\infty}\iint\limits_{\beta_m(x,s)<t}dxds\le\sum_{m=1}^{\infty}\iint\limits_{\beta_m(x,s)\ge t}\beta_m^{-2}(x,s)dxds\le\frac{c_2}{t^2}\sum_{m=1}^{\infty}\iint\limits_{\beta_m(x,s)<t}dxds.$$

Пользуясь тауберовой теоремой Титцмарша из соотношения (14) получаем:

Теорема 2.1.2. Если операторные коэффициенты $P(x)$ и $Q_j(x)$ $(j=1,2,...,2n-1)$ удовлетворяют условиям 1^0-7^0 и выполняется условие 8^*), то при $\lambda\to\infty$ верна формула

$$N(\lambda)\sim\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\iint\limits_{\beta_m(x,s)<\lambda}dxds. \tag{15}$$

В 2.2 исследован взвешенный след одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на полуоси.

В пространстве $L_2[H;0\le x<\infty]$ рассмотрим оператор L, порождённый выражением

$$\ell(y)=(-1)^n y^{(2n)}+\sum_{j=2}^{2n}Q_j(x)y^{2n-j} \tag{16}$$

и граничными условиями

$$B_j y\big|_{x=0}=y^{(\ell_j)}(0)+\sum_{m=1}^{\ell_j}\alpha_m^{(j)}y^{(\ell_j-m)}(0)=0. \tag{17}$$

Здесь $0\le\ell_1<\ell_2<\ell_3<\ldots\ell_n\le 2n-1$.

При выполнении некоторых условий 1)-5) оператор L имеет дискретный спектр. Обозначим через $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...,$ собственные значения, а через $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x),...$ соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции оператора L.

Положим $C_n^{(s)}=\int\limits_0^{\infty}\left\|Q^s(x)\varphi_n(x)\right\|_H^2dx,\ N_s(\lambda)=\sum\limits_{\lambda_n<\lambda}C_n^{(s)},\lambda>0$.

Функция $N_s(\lambda)$ называется взвешенным следом оператора

L. В частности, при $s=0$ $N_0(\lambda)=N(\lambda)$, т.е.совпадает с функцией распределения собственных значений оператора L.

Верна следующая теорема:

<u>Теорема 2.2.1.</u> Если коэффициенты дифференциального оператора L удовлетворяют условиям 1)-5), то при $\mu\to\infty$ верно следующее асимптотическое равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^{(s)}}{(\lambda_n+\mu)^2}\sim\gamma_n\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\beta_k^{2s}(x)dx}{\{\beta_k(x)+\mu\}^{\frac{4n-1}{2n}}}\ , \tag{18}$$

где

$$\gamma_n=\frac{i}{8n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j+\sum_{\substack{k_1,k_2=1\\ k_1\neq k_2}}^{n}\frac{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}{\omega_{k_1}+\omega_{k_2}}\right],$$

Из асимптотического равенства (18) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^{(s)}}{(\lambda_n+\mu)^2}$.

Обозначим:

$$\sigma^{(i)}(\lambda)=mes\{\beta_i(x)<\lambda\},\quad \varphi_s(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\lambda}(\lambda-\theta)^{\frac{1}{2n}}\cdot\theta^{2s}d\sigma^{(i)}(\theta)$$

Асимптотическое равенство (18)можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^{\infty}\frac{dN_s(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2}\sim\frac{n^2\gamma_n}{16(2n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\int_0^{\infty}\frac{d\varphi_s(\lambda)}{(\lambda_n+\mu)^2} \tag{19}$$

Предположим, что функция $\varphi_s(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию:

6[*]) Существуют постоянные $c_1>0, c_2>0$ такие, что для достаточно больших значений параметра λ выполняется неравенство:

$$c_1\varphi_s(\lambda)<\lambda\varphi_s'(\lambda)<c_2\varphi_s(\lambda).$$

Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 2.2.2.</u> Если коэффициенты дифференциального оператора L удовлетворяют условиям регулярности и выполняется условие 6[*]), то при $\mu\to\infty$ для взвешенного следа $N_s(\lambda)$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$N_s(\lambda)\sim\frac{n^2\cdot\gamma_n}{16(2n-1)\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{mes\{\beta_i(x)<\lambda}\beta_i^{2s}(x)[\lambda-\beta_i(x)]^{\frac{1}{2n}}dx \tag{20}$$

В 2.3 исследована резольвента оператора *L* и доказана принадлежность резольвенты к классам Гильберта-Шмидта.

В пространстве $L_2[H:[0,\pi]]$ рассматривается оператор *L*, порождённый дифференциальным выражением

$$\ell(y)=(-1)^n y^{(2n)}+Q(x)(y) \tag{21}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0 \\ y(\pi)=y'(\pi)=...=y^{(n-1)}(\pi)=0 \end{cases} \tag{22}$$

При выполнении некоторых условий оператор *L* имеет дискретный спектр. Пусть $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...$ собственные значения оператора *L*. Так как *L*- неограниченный оператор, то при $n\to\infty$ выполняется условие $\lambda_n\to\infty$.

Доказана следующая теорема.

<u>Теорема 2.3.1.</u> Если операторный коэффициент $Q(x)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности, то резольвента оператора *L*, порождённая выражением (21) и граничными условиями (22) является интегральным оператором с ядром типа Гильберта-Шмидта , т.е. сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}$.

В 2.4 второй главы доказана дискретность спектра, получены асимптотические оценки для собственных значений и собственных функций граничной задачи для диференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, когда спектральный параметр входит в граничные условия.

В области $[0,h)\cup[h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ рассмотрим уравнение

$$y''(x)+q(x)y(x-\Delta x)+\lambda y(x)=0 \tag{23}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y(0)\cos\alpha+y'\sin\alpha=0 \\ \sqrt{\lambda}\,y(\pi)\cos\beta+y'(\pi)\sin\beta=0 \end{cases} \tag{24}$$

и условиями разрыва

$$\begin{cases} y(h_1-0)-\delta y(h_1+0)=0 \\ y'(h_1-0)-\delta y'(h_1+0)=0 \\ y(h_2-0)-\gamma y(h_2+0)=0 \\ y'(h_2-0)-\gamma y'(h_2+0)=0. \end{cases} \qquad (25)$$

Здесь функции $q(x)$ и $\Delta x>0$ являются непрерывными функциями в области $[0,h)\cup[h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ и предполагаем существование следующих пределов:

$$q(h_1\pm 0)=\lim_{x\to h_1\pm 0} q(x), \quad q(h_2\pm 0)=\lim_{x\to h_2\pm 0} q(x),$$

$$\Delta(h_1\pm 0)=\lim_{x\to h_1\pm 0} \Delta(x), \quad \Delta(h_2\pm 0)=\lim_{x\to h_2\pm 0} \Delta(x).$$

Предолагается выполнение ещё следующих условий: при $x\in[0,h_1)$ $x-\Delta x\ge 0,$ при $x\in(h_1,h_2)$ $x-\Delta x\ge h_1$, при $x\in(h_2,\pi]$ $x-\Delta x\ge h_2$. Здесь λ – действительный параметр и $0<h_1<h_2<\pi,\ \sin\alpha\cdot\sin\beta\ne 0$.

Пр выполнении этих условий исследуется спектр и асимптотика собственных значений и собственных функций задачи (23)-(25) .

Через $\omega_1(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (23) на отрезке $[0,h_1]$ с начальными условиями

$$\omega_1(0,\lambda)=\sin\alpha, \quad \omega_1'(0,\lambda)=-\cos\alpha\,. \qquad (26)$$

Через $\omega_2(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (23) на отрезке $[h_1,h_2]$ с начальными условиями

$$\omega_2(h_1,\lambda)=\delta^{-1}\omega_1(h_1,\lambda), \omega_2'(h_1,\lambda)=\delta^{-1}\omega_1'(h_1,\lambda). \qquad (27)$$

Через $\omega_3(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (23) на отрезке $[h_2,\pi]$ с начальными условиями

$$\omega_3(h_2,\lambda)=\gamma^{-1}\omega_2(h_2,\lambda), \omega_3'(h_2,\lambda)=\gamma^{-1}\omega_2'(h_2,\lambda). \qquad (28)$$

Тогда функция

$$\omega(x,\lambda)=\begin{cases} \omega_1(x,\lambda), x\in[0,h_1] \\ \omega_2(x,\lambda), x\in[h_1,h_2] \\ \omega_3(x,\lambda), x\in[h_2,\pi], \end{cases}$$

является решением уравнения (23), удовлетворяющим граничным условиям (24) и условиям разрыва (25) в области $[0,h)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$.

Верна следующая лемма.

Относительно собственных значений краевой задачи (23)-(25) верны следующие теоремы:

Теорема 2.4.2. Задача (23), (24), (25) имеет бесконечное множество собственных положительных значений.

Теорема 2.4.3. Путь n – натуральное число. Тогда при достаточно больших значениях n около достаточно близких окресностях точки $\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)^2$ лежит одно собственное число задачи (23), (24), (25) .

В конце 2.4 доказывается теорема об асимптотике собственных значений и собственных функций задачи (23), (24), (25).

Теорема 2.4.4. Для собственных значений $\lambda_n = S_n^2$ и для собственных функций краевой задачи (23) - (25) верно следующее асимптотическое равенство:

$$S_n = n+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{32}$$

$$y_n(x)=\begin{cases} \sin\alpha\cos\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in[0,h_1) \\ \frac{\sin\alpha}{\delta}\cos\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2) \\ \frac{\sin\alpha}{\delta\gamma}\cos\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\pi}\right)x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_2,\pi] \end{cases} \tag{33}$$

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях на функции $q(x)$ и $\Delta(x)$ можно получить более точные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (23) - (25).

В заключении выражаю искренную благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, професору Г.И.Асланову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Асланов Г.И., Абдуллаева Н.С. Об асимптотическом распределении собственных значений операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси. "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" RMİ-nın 55 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları, Bakı-2014, s. 61-62.
2. Асланов Г.И., Абдуллаева Н.С. Исследование резольвенты операторно-дифференциального управления высокого порядка на полуоси. Sumqayıt Dövlət Universiteti, "Elmi Xəbərlər", təbiət və texniki elmlər bölməsi, Sumqayıt-2015, №1, s. 11-19.
3. Abdullayeva N.S. Yarımoxda yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin Qrin funksiyasının tədqiqi. III International scientifice of young Researchers the 92 Anniversary of the National leader of Azerbaijan Haydar Aliyev, Proceedings, Qafqaz University, 17-18 April 2015. Baku, Azerbaijan, p. 114-115.
4. Aslanov G.İ. and Abdullayeva N.S. İnvestigation of Green function of higher order operator-differential equation on a semi-axis. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference "Mathematical Anlysis, Differential Equations and their Applications" Abstracts. September 08-13, 2015, Baku-Azerbaijan, p. 24-25.
5. Aslanov H.I., Abdullayeva N.S. About resolvent of operator-differential equation higher order on finite interval. Əməkdar elm xadimi, prof. Yəhya Məmmədovun 85-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq Elmi Konfransın materialları, 10 dekabr 2015, Bakı, s. 53-54.
6. Абдуллаева Н.С. Асимптотическая формула взвешенного следа для операторно-дифференциального уравнения высокого порядка на полуоси. Əməkdar elm xadimi, prof. Əmir Həbibzadənin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı-2016, s. 62-65.
7. Aslanov G.I., Abdullayeva N.S. About the asymptotik behavior of eigenvalues and eigenfunction of the boundary Sturm-Liouville problem with delayed argument, International Workshop on Non-Harmonik Analysis and Differential Operators, Abstracts. Baku, Azerbaijan, 25-27 may. 2016, p.21.
8. Абдуллаева Н.С. О спектре одной граничной задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздываюшим аргументом. " Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları" III Respublika elmi konfransının materialları, 15-16 dekabr, 2016, Sumqayıt, s. 93-94.

9. Aslanov H.I., Abdullayeva N.S. Discreteness spectrum and asimptotic distribution of eigenvalues of operator-differential equations of higher order on semi-axis. AMEA-nın Xəbərləri, fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, XXXVI, №4, Bakı- 2016, "Elm" s.47-54.

10. Abdullayeva N.S. Asymptotic formula weichted trace of the operator-differential equation higher order on semi-axis. Journal of Qafqaz University, Mathematics and computer science, vol. 4, № 1, 2016, p. 101-108.

11. Hamidulla I. Aslanov and Novrasta S.Abdullayeva. On asimptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville type boundary value problem with retarted arqument. Proseedings of IMM of the NAS of Azerbaijan, vol.42, № 2, 2016, p.230-249.

12. Gamidulla Aslanov, Novrasta Abdullayeva. Investication of the Green function and Discreteness of spectrum of higher order operator-differential equations on semi-axis. International Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017; 4(6), p. 52-58.

13. Асланов Г.И., Байрамова Н.С. О резольвенте операторного уравнения высокого порядка на конечном отрезке. AMEA-nın müxbir üzvü, prof. Qoşqar Əhmədovun 100 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi konfransının Materialları. 02-03 noyabr, Bakı-2017, s. 148-150.

14. Асланов Г.И., Абдуллаева Н.С. О резольвенте операторного уравнения высокого порядка на конечном отрезке. Lənkəran Dövlət Universitetinin Xəbərləri, Təbiət elmləri seriyası, 2017, №2 s. 53-63.

NÖVRƏSTƏ SİDQƏLİ qızı BAYRAMOVA

HİLBERT FƏZASINDA BƏZİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN QRİN FUNKSİYASININ, MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPTOTIK PAYLANMASININ VƏ ÇƏKİLİ İZİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işində yarımoxda yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin Qrin funksiyası qurulmuş, onun əsas xassələri öyrənilmişdir. Baxılan operatorların spektrinin diskretliyi isbat edilmişdir. Yarımoxda yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin məxsusi ədədlərinin paylanma funksiyası üçün asimptotik düstur alınmışdır. Bir sinif yüksək tərtibli operator əmsallı diferensial operatorun çəkili izi öyrənilmişdir. Sonlu parçada yüksək tərtibli operator-diferensial tənliyin rezolventası öyrənilmiş, rezolventanın Hilbert-Şmidt tipli operator olduğu isbat edilmişdir. Gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli tənliyin sonlu parçada spektral parametrin sərhəd şərtinə daxil olduğu halda spektri öyrənilmiş, məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının asimptotik ifadələri alınmışdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı yeni elmi nəticələr alınmışdır:

– Yarımoxda bir sinif yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin Qrin funksiyası qurulmuş və onun əsas xassələri öyrənilmişdir;

– Yüksək tərtibli operator-diferensial tənliyin spektrinin diskretliyi isbat olunmuşdur;

– Bir sinif yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin məxsusi ədədlərinin paylanma funksiyasının asimptotik düsturu alınmışdır;

– Yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərin çəkili izinin asimptotik düsturu isbat edilmişdir;

– Sonlu parçada yüksək tərtibli operator-diferensial tənliyin rezolventasının Hilbert-Şmidt tipli operator olduğu isbat edilmişdir;

– Spektral parametr sərhəd şərtinə daxil olan gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli tənliyin spektrinin quruluşu öyrənilmiş, məxsusi ədədlərin və məxsusi funksiyaların asimptotik ifadələri alınmışdır.

NOVRASTA SIDKALI BAYRAMOVA

INVESTIQATION OF GREEN FUNCTION, ASIMPTOTIC BEHAVIOR OF EIGENVALUES AND WEIGHT TRACE OF SOME HIGHER ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION IN HILBERT SPACE

ABSTRACT

In the dissertation work, the Green function of a higher order operator-differential equation on the semi axis is constructed, its main properties are studied. Discreteness of the spectrum is proved. Asimptotic formula for the function of distribution of eigenvalues is obtained, the weighed trace for a class of higher order operator-differential equation on the semi axis is calculated. The resolvent of a higher order operator-differential equation on the finite seqment is studied. The spectrum and asimptotics of eigenvalues and eigen-function of Strum-Liouville type equation with a delay arqument, when the spectral parameter enters into the boundary condition, are studied.

In the dissertation, the following main results are obtained:

- The Green function of a higher order operator-differential equation on the semi axis is constructed, its main properties are studied;
- Discreteness of the spectrum of a higher order operator-differential equation on a semi-axis, is proved;
- Asimptotic formula for the number of eigen values of a class of higher order operator-differential operator on the semi axis, is proved;
- Asimptotiuc formula for the weighted trace of a higher order operator equation on the semi axis, is obstaine;
- Belonging of the resolvent to some class σ_p of higher order operator-differential equation on the finite seqment, is proved;
- Spectrum and asimptotics of eigen values and eigen function of Strum-Liouville type equation with a delay arqument when a spectral parameter enters into the boundary conditions, is studied.