НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР НИЗАМИ кызы МАМЕДОВА

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ САССА

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку – 2018

Работа выполнена в отделе **"Математический анализ" Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:

доктор наук по математике **Ровшан Бандалиев**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Фарман Мамедов** (SOCAR "Научно-Исследовательский Проектный Институт Нефти и Газа");

- кандидат физико-математических наук, доц. **Фуад Абдуллаев** (Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 14 сентября 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 июня 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из основных направлений конструктивной теории функций является построение эффективного линейного аппарата, приближающегося к функции из данного класса. Примерами таких простых агрегатов являются классические полиномы Пуассона, Гаусса-Вейерштрасса, Ландау, Пикара, Джексона, Фейера, Бернштейна, Гельфанда, Бернштейна-Хлодовского, оператора Сасса и, частные суммы ряда Фурье. Эти операторы обладают тем свойством, что каждой неотрицательной функции сопоставляют неотрицательную же функцию. Другими словами, эти операторы являются линейными положительными операторами. Примером такого полинома является полином, построенный С.Н.Бернштейном в 1912 г. Этот многочлен был использован при доказательстве теоремы Вейерштрасса в классической теории приближений. Многочисленные исследования, связанные с вышеуказанными многочленами были проведены Г. Лоренцом, С. Бернштейном, И. Натансоном, Г. Кировым, И.И. Ибрагимовым, А.Д. Гаджиевым, Р.Г. Мамедовым и др. Эти полиномы нашли применение в различных задачах математического анализа. В 50-х гг. прошлого века О. Сассом был введен оператор, позже названный в его же честь, который является аналогом классического полинома Бернштейна на положительной полуоси числовой прямой. Причиной ввода этого оператора является получение аналога теоремы Бернштейна на положительной полуоси. Отметим, что у оператора Сасса существуют различного рода модификации. Одним из таких модификаций является вырождающийся оператор эллиптического типа

$$Lu(x) := xu''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x),$$

удовлетворяюший граничным условиям типа Венцеля в пространстве $C[0,\infty)$. В работе Ф. Алтомаре и С. Milелла было доказано, что такие операторы порождают полугруппу и эту полугруппу можно аппроксимировать с помощью указанной в диссертации итерации модифицированного оператора Сасса.

Далее, полиномы Бернштейна были достаточно исследованы его учениками, а также, различными математиками и были построены различные обобщения этих полиномов. Отметим, что вообще говоря, основная специфика полиномов Бернштейна заключается в том, что форма этих полиномов дала идею построения различных операторов, таких как, полинома Станку, оператора Сасса, полинома Бернштейна-Хлодовского, полинома Канторовича, полинома q- Бернштейна, полинома Дурмейера, оператора Баскакова, оператора Мейера-Кенига и Зеллера, Ибрагимова-Гаджиева и др.

Так как, полиномы Бернштейна являются линейными положительными операторами, то теоремы типа Коровкина доказанные этими оператором занимают особое место в теории приближения функций. С другой стороны, известно, что наилучший порядок приближения функций этим полином не выше чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Более подробная информация о теоремах типа Коровкина приведена в монографии Ф. Алтомаре и М. Кампити, в которой отражены современные исследования по этой теории. В этом направлении следует, отметить монографию А.Д. Гаджиева и Х. Хаджисалихоглу, и монографию Р.Г. Мамедова, в которых дается обобщение теорем Коровкина. Из азербайджанских математиков в этом направлении особо хочется подчеркнуть исследования И.И. Ибрагимова, А.Дж. Гаджиева, Р.Г. Мамедова, А.С. Джафарова, Ар. С. Джафарова и др.

Цель работы: Построение обобщенного оператора Сасса и нахождение порядка приближения непрерывной функции с помощью моментов обобщенного оператора Сасса. Доказательство теоремы типа классической теоремы Поповичу для обобщенных операторов Сасса в пространстве непрерывных функций, а также в весовом пространстве непрерывных функций. Получение асимптотических оценок приближения функций обобщенными операторами Сасса. Исследование свойств модуля непрерывности в весовых функциональных пространствах непрерывных функций двух переменных. Построение обобщенного оператора Сасса для функций двух переменных, доказательство классических теорем типа Поповичу и Вороновской. Доказательство аппроксимационных теорем с помощью оператора Сасса для функций двух переменных в пространстве Лебега.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

- Построен обобщенный оператор Сасса и найден порядок приближения непрерывной функции через моменты обобщенного оператора Сасса.

- Доказаны аналоги классических теорем типа Поповичу для обобщенных операторов Сасса в пространстве непрерывных функций, а также в весовых пространствах непрерывных функций.
- Получены асимптотические оценки приближения функций обобщенными операторами Сасса.
- Исследованы свойства модуля непрерывности в весовых функциональных пространствах непрерывных функций двух переменных.
- Построены обобщенные операторы Сасса для функций двух переменных и доказаны теоремы, типа классических теорем Поповичу и Вороновской.
- В пространстве Лебега для функций двух переменных получены аппроксимационные теоремы с помощью оператора Сасса.

Методы исследования: В диссертации применяются методы конструктивной теории функций и функционального анализа, а также свойства в весовых пространств непрерывных функций.

Теоретическая и практическая ценность: Результаты, полученные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Но асимптотические формулы, полученные для операторов Сасса, могут быть применены при исследовании решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, в различных областях математики и информатики, в том числе, функциональном анализе, в численных методах решений дифференциальных и интегральных уравнений и в теории алгоритмов.

Аппробация работы. Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на семинарах отделов Института Математики и Механики НАНА: “Математический анализ” (чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. В.С.Гулиев), “Теория функций” (д.м.н. В.Э.Исмаилов), “Негармонический анализ” (чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. Б.Т.Билалов), на семинарах отдела “Функциональный анализ” ИММ НАНА (проф. Г.И.Асланов) и на семинарах кафедры “Математический анализ” БГУ (проф. С.С.Мирзоев).

Основные результаты диссертационной работы докладывались на X Международной конференции по математике и механике посвященной 45-летию ИММ НАНА (Баку, 2004), на XIII Международной научной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию академика А.Дж.Гаджиева (Баку, 2007), на Международной научной конференции "Теория функций и проблемы гармонического анализа", посвященной 110-летнему юбилею академика И.И.Ибрагимова (Баку, 2012), на Международной конференции молодых ученых по теме “Новые созывы в Европе” посвященной 90-летию общенационального лидера Гейдара Алиева (Баку, 2013), на Международной конференции посвященной 55-летию ИММ НАНА (Баку, 2014), на седьмой Международной конференции МАДЕА-7 по теме “Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения” проведенное совместно с Турецкими и Украинскими математиками (Баку, 2015), на Международном рабочем семинаре по теме “Негармонический анализ и дифференциальные операторы” проведенной в ИММ НАНА (Баку, 2016), на второй Международной конференции по теме “Анализ и его приложения” проведенной в Турции (Киршехир, 2016), на Международной конференции “OMTSA-2017”, посвященной 60-летнему юбилею чл.-корр. НАН Азербайджана, профессора В.С.Гулиева (Киршеир, 2017), на Международной конференции по теме “Современные проблемы математики и механики” проведенной в Баку, посвященной 80-летнему юбилею академика А.Дж.Гаджиева (Баку, 2017).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 17 работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка литературы, содержащего 74 наименования. Объем диссертации 113 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основная роль оператора Сасса в теории приближений состоит в перенесении ранее известных теорем аппроксимации с конечного отрезка на полуось. Этот оператор является эффективным аппаратом приближения непрерывных функции на полуоси .

В 1950 г. Отто Сасс дал обобщение полиномам Бернштейна на полуоси $[0,\infty)$ следующим образом:

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}, \quad 0\le x<\infty,$$

где $f\in C[0,\infty)$. В представленной же диссертации мы даем обобщение оператора Сасса, в следующем виде:

$$S_{n,r}(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\frac{f^{(i)}\left(\frac{k}{n}\right)}{i!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^{i}\frac{(nx)^{k}}{k!}\ ,$$

где $f\in C^{r}[0,\infty)$. Такого рода обобщение было рассмотрено Кировым для полинома Бернштейна. Классический оператор Сасса двух переменных выглядит следующим образом:

$$S_{n,m}(f;x,y)=e^{-nx}e^{-my}\sum_{k,l=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right)\frac{(nx)^{k}}{k!}\frac{(my)^{l}}{l!},$$

где $f\in C\left(R_{+}^{2}\right)$. В диссертационной работе рассматривается обобщение оператора Сасса двух переменных в следующей форме:

$$S_{n,m,r}(f;x,y)=e^{-nx-my}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!}\left[\left(x-\frac{k}{n}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y-\frac{l}{m}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right)\frac{(nx)^{k}}{k!}\frac{(my)^{l}}{l!},$$

где $f\in C^{(r)}\left(R_{+}^{2}\right)$.

Одно из таких обобщений было дано И.И.Ибрагимовым и А.Дж.Гаджиевым в 1970 г. А именно, в этой работе была дана такая последовательность линейных положительных операторов, что эти операторы в частном случае сохраняют в себе операторы Бернштейна, Бернштейна-Хлодовского, Сасса, Баскакова и др. Теперь рассмотрим более подробно указанный оператор.

Пусть в пространстве $C[0,A]$ $(A<\infty)$ задана последовательность $\{\psi_n(t)\}$, такая что $\psi_n(0)\neq 0,\ \psi_n(t)>0$ $(0\le t\le A,\ n=0,1,2,...)$. Предположим, что $\{\alpha_n\}$ последовательность положительных чисел, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2}\psi_n(t)}=0.$$

Пусть последовательность функций трех переменных $\{K_n(x,t,u)\}$ $(x,t\in[0,A],\ u\in R)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Эта последовательность для всех фиксированных x и t есть целая аналитическая функция относительно переменной u ;

2. $K_n(x,0,0)=1\ (n=1,2,..)$ для любого $x\in[0,A]$;

3. $\left\{(-1)^{\nu}\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\t=0}}\right\}\geq 0,\ \ (\nu,n=1,2,..;x\in[0,A])$;

4. $-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=u_1\\t=0}}=n\,x\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\right]_{\substack{u=u_1\\t=0}}$

$(\nu,n=1,2,..;\ x\in[0,A])$, где m натуральное число.

Далее, рассмотрим следующую последовательность линейных положительных операторов:

$$L_n(f,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left\{\left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\right]_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(0)\\t=0}}\right\}\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{\nu!}$$

В научной литературе этот оператор называют оператором И.И.Ибрагимова - А.Дж.Гаджиева. Отметим частные случаи. Пусть

$$\alpha_n=n,\ \ \psi_n(0)=\frac{1}{n},\ \ K_n(x,t,u)=\left[1-\frac{xu}{1+t}\right]^n.$$

Тогда $L_n(f,x)$ превращается в классический полином Бернштейна. Если взять

$$\alpha_n=n,\ \ \psi_n(0)=\frac{1}{n},\ \ K_n(x,t,u)=e^{-n(t+xu)},$$

то получим оператор Сасса.

В первой главе строится одно новое обобщение оператора Сасса и исследовано приближения и порядок приближения дифференцируемых функций посредством последовательностей обобщенного оператора Сасса.

Пусть $R_+=[0,+\infty)$ и $\rho(x)=1+x^2$ весовая функция. Обозначим через $B_\rho(R_+)$ класс функций удовлетворяющих условию $|f(x)|\leq M_f\rho(x)$, где M_f положительная постоянная. Другими словами $B_\rho(R_+):=\{f:|f(x)|\leq M_f\rho(x)\}$. Норма в этом классе определяется следующим образом:

$$\|f\|_p = \sup_{x\in R_+} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}.$$

Пусть

$$C_\rho(R_+) := \{f : f \in B_\rho \wedge f \in C(R_+)\},$$

$$C_p^K(R_+) := \left\{ f : f \in C_p(R_+),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \right\}.$$

$$C_p^0(R_+) := \left\{ f : f \in C_\rho^K(R_+),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = 0 \right\}.$$

Следующая теорема является аналогом классической теоремы Сасса на конечном отрезке.

Теорема 1. Пусть $C^r[0,\infty)$ пространство всех $r\ (r = 1,2,...)$ раз непрерывно-дифференцируемых функций на полуинтервале $[0,\infty)$, $f \in C^r[0,\infty)$ и $S_{n,r}(f;x) -$ обобщенный оператор Сасса. Тогда, для любого фиксированного $A > 0$, справедливо следующая оценка:

$$\left\| f(\cdot) - S_{n,r}(f;\cdot) \right\|_{C[0,A]} = O\left(n^{-r/2} \omega\left(f^{(r)}; n^{-1/2} \right)\right),$$

здесь $\omega\left(f^{(r)};\delta\right) -$ обычный модуль непрерывности на отрезке $[0,A]$.

При дополнительном условии на приближаемую функцию, получено распространение теоремы 0.1 с конечного отрезка на всю полуось $[0,\infty)$.

Теорема 2. Пусть $f \in C^r[0,\infty)$ и предположим, что существует конечный предел $\lim_{x\to\infty} f^{(r)}(x) = B_r$. Тогда для обобщенного оператора Сасса $S_{n,r}(f;x)$, $x \in [0,\infty)$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{0\le x<\infty} \frac{\left| S_{n,r}(f;x) - f(x) \right|}{(1+x)^{\frac{r+2}{2}}} \le K(r) n^{-r/2} \omega\left(f^{(r)}; n^{-1/2} \right),$$

здесь $K(r)-$ постоянная, зависящая от r, ω обычный модуль непрерывности.

Ниже приведенная теорема является аналогом предыдущей теоремы в терминах весового модуля непрерывности.

Теорема 3. Пусть $f \in C^r[0,\infty)$. Тогда для обобщенного оператора Сасса $S_{n,r}(f;x)$, $x \in [0,\infty)$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{0\le x<\infty} \frac{\left|S_{n,r}(f;x)-f(x)\right|}{(1+x)^{\frac{r+4}{2}}} \le K(r) n^{-r/2} \Omega\left(f^{(r)}; n^{-1/2}\right),$$

где $K(r)-$постоянная, зависящая от r, а $\Omega-$ весовой модуль непрерывности, определенный в классе $C_\rho^K(R_+)$ и имеющий вид

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|t-x|\le\delta \\ x,t\in[0,\infty)}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)\left(1+(t-x)^2\right)}.$$

Следующий результат является предельной теоремой в теории аппроксимации. Она дает точную оценку по порядку приближаемых гладких функций обобщенными операторами Сасса.

Теорема 4. Пусть $f \in C^{r+2}[0,\infty)$ и функция f является ограниченной на полуоси $[0,\infty)$. Тогда для фиксированной точки x справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$S_{n,r}(f;x) = f(x) + \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x) T_{n,r+1}(x)}{(r+1)!\, n^{r+1}} +$$

$$+\frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x) T_{n,r+2}(x)}{(r+2)!\, n^{r+2}} + \frac{\rho_{n,r}(x)}{n^{r/4}},$$

где $T_{n,r}(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} (k-nx)^r \frac{(nx)^k}{k!}$ и $\lim_{n\to\infty} \rho_{n,r}(x) = 0.$

Во второй главе введен модуль непрерывности в весовом пространстве непрерывных функций двух переменных и изучены их основные свойства. Кроме того, строится обобщение оператора Сасса и находятся некоторые его моменты. А также, в пространстве Лебега доказана аппроксимационная теорема для классического оператора Сасса двух переменных.

Пусть $R_+^2 = \{(x,y); x \ge 0, y \ge 0\}$ и $\rho(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ весовая функция. Предположим, что

$$B_\rho\left(R_+^2\right) := \left\{f : \left|f(x,y)\right| \le M_f \rho(x,y)\right\},$$

$$C_\rho\left(R_+^2\right) := \left\{f : f \in B_\rho \wedge f \in C\left(R_+^2\right)\right\},$$

$$C_p^K(R_+) := \left\{f : f \in C_\rho\left(R_+^2\right), \lim_{x+y\to+\infty} \frac{f(x,y)}{\rho(x,y)} = K_f < \infty\right\}.$$

В следующей теореме описываются свойства рассмотренного нами весового модуля непрерывности двух переменных.

Теорема 5. Пусть $f \in C_\rho^K\left(R_+^2\right)$. Тогда весовой модуль непрерывности

$$\Omega(f;\delta_1;\delta_2) = \sup_{\substack{(x,y)\in R_+^2 \\ h_1\in[0,\delta_1], h_2\in[0,\delta_2]}} \frac{\left|f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)\right|}{\rho(x,y)\rho(h_1,h_2)}$$

обладает следующими свойствами:

1) $\lim\limits_{\substack{\delta_1\to0 \\ \delta_2\to0}} \Omega(\delta_1,\delta_2) = 0;$

2) $\Omega(\delta_1;\delta_2)$ не убывает по δ_1 и δ_2;

3) $$\Omega(\delta_{11}+\delta_{12};\delta_{21}+\delta_{22}) \le A(\delta_{11},\delta_{12})A(\delta_{21},\delta_{22}) \times$$
$$\times\Big(\left(1+\delta_{21}^2\right)\left[\left(1+\delta_{11}^2\right)\Omega(\delta_{11};\delta_{21}) + \left(1+\delta_{12}^2\right)\Omega(\delta_{12};\delta_{21})\right] +$$
$$+\left(1+\delta_{22}^2\right)\left[\left(1+\delta_{11}^2\right)\Omega(\delta_{11};\delta_{22}) + \left(1+\delta_{12}^2\right)\Omega(\delta_{12};\delta_{22})\right]\Big),$$

где $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22} > 0,$

$$A(\delta_{11},\delta_{12}) = \min\left\{1+\delta_{11}+\delta_{11}^2; 1+\delta_{12}+\delta_{12}^2\right\}$$

и

$$A(\delta_{21},\delta_{22}) = \min\left\{1+\delta_{21}+\delta_{21}^2; 1+\delta_{22}+\delta_{22}^2\right\}.$$

Следующий результат является аналогом теоремы Поповичу в теории аппроксимации для функций двух переменных в терминах обобщенного модуля непрерывности.

Теорема 6. Пусть $f \in C^{(r)}(R_+^2)$. Тогда для обобщенного оператора Сасса $S_{n,m,r}(f;x,y)$, для функций двух переменных, справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{\substack{0\le x\le\infty \\ 0\le y\le\infty}} \frac{\left|S_{n,m,r}(f;x,y)-f(x,y)\right|}{(1+xy)^{\frac{i}{2}}} \le C(i,r)(nm)^{-\frac{i}{2}}\Omega\left(f;n^{-\frac{1}{2}};m^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Вороновской для классических операторов Сасса двух переменных.

Теорема 7. Пусть $f \in C^2\left(R_+^2\right)$ и f ограничена на R_+^2, и в каждой фиксированной точке $(x,y) \in R_+^2$ имеет все производные до второго порядка включительно. Тогда справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$S_{n,m}(f;x,y) = f(x,y) + \frac{x}{2n} f''_{x^2}(x,y) + \frac{y}{2m} f''_{y^2}(x,y) + r_{n,m}(x,y),$$

где $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} r_{n,m}(x,y) = 0.$

В следующей теореме получено представление обобщенного оператора Сасса двух переменных в терминах моментов.

Теорема 8. Пусть $f \in C^{(r+2)}\left(R_+^2\right)$, $x,y \in R_+^2$ и все производные функции f до $(r+2)-$го порядка ограничены. Тогда для обобщенного оператора Сасса справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$S_{n,m,r}(f;x,y) = f(x,y) + \frac{(-1)^r f^{(r+1)}(x,y)T_{n,m,r+1}(x,y)}{(r+1)!} +$$

$$+\frac{(-1)^r (r+1) f^{(r+2)}(x,y)T_{n,m,r+2}(x,y)}{(r+2)!} + R_{n,m,r}(x,y),$$

где $T_{n,m,r}(x,y) = e^{-nx-my}\sum\limits_{k,l=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^r\left(\frac{l}{m}-y\right)^{p-r}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{(my)^l}{l!}$,

$r = 0,1,\ldots,p$ и $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} R_{n,m,r}(x,y) = 0.$

В следующей теореме дается приближение частных производных функций двух переменных частными же производными классического оператора Сасса.

Теорема 9. Пусть функция $f(x,y)$ ограничена на каждом замкнутом квадрате $0 \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $R > 0$ и для заданного $u > 0$ справедливо соотношение $f(x,y) = O\left((x+y)^u\right)$, $x + y \to \infty$. Пусть дополнительно, в точке $x = \xi$, $y = \eta$ существуют производные $f_x^{/}(\xi,\eta)$, $f_y^{/}(\xi,\eta)$, $f_{xy}^{//}(\xi,\eta)$, $f_{yx}^{//}(0,0)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(\xi,0)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big|_{(x,y)=(\xi,0)}, \quad \forall m \in N \bigcup \{0\};$$

$$b)\ \lim_{m\to\infty} \frac{\partial}{\partial y} S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(0,\eta)} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,\eta)}, \quad \forall n \in N \bigcup \{0\};$$

$$c)\ \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} S_{n,m}(f;x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\Big|_{(x,y)=(0,0)}.$$

Рассмотренный нами следующий оператор является аналогом одномерного оператора Канторовича

$$W_{n,\mathrm{m}}(f;x,y) = nme^{-nx-my} \sum_{k,l=0}^{\infty} \left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \int_{\frac{l}{m}}^{\frac{l+1}{m}} f(s,t)\,ds\,dt \right] \frac{(nx)^k}{k!} \frac{(my)^l}{l!}, \ n,m > 0$$

.

Для этого оператора доказана следующая локальная теорема.

Теорема 10. Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in L_p\left(R_+^2\right)$. Тогда для оператора $W_{n,m}(f;x,y)$ справедливы следующие утверждения:

1) $W_{n,m}(f;0{,}0) \to f(0{,}0)$, $n,m \to \infty$, $f \in L_p\left(R_+^2\right)$;

2) существует функция $f \in L_p\left(R_+^2\right)$, такая что

$$\sup_{(n,m)\in N^2} \left| W_{n,m}(f;0{,}0) \right| \le \theta(f;0{,}0),$$

где

$$\theta(f;x,y) = \sup_{\substack{0<s,q<\infty\\ (s,q)\ne(x,y)}} \frac{1}{(s-x)(q-y)} \int_x^s \int_y^q |f(z,\gamma)|\,dz\,d\gamma.$$

Автор выражает глубокую благадарность за постановку задачи и постоянное внимание к работе ныне покойного академика А.Дж.Гаджиева и доктора наук по математике Р.А.Бандалиева.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Рагимова А.Н. Аппроксимация дифференцируемых функций обобщенными операторами Сасса, Тезисы X Межд. конф. по мат. и мех. посв. 45 летию Института Математики и Механики. Баку 2004, с.134.
2. Рагимова А.Н. Об одном асимптотическом свойстве обобщенного оператора Сасса, Тезисы XIII Межд. конф. по мат. и мех. посв. 70-летию со дня рождения акад. НАНА А.Д.Гаджиева, Баку 2007, с.130.
3.Мамедова А.Н. Аппроксимационные теоремы для обобщенных операторов Сасса, Вестник Бакинского Университета, Баку 2010, № 2, с. 75-82.
4.Məmmədova A.N. Çəkili kəsilməzlik modulunun xassəsi. Funks. nəzəriy. və harmonik analizin prob. akademik İ.İ.İbrahimovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın material., Bakı 2012, səh.181-182.
5.Mammadova A.N. On Order of approximation function by generalized Szasz operator, İntern. Baku Forum of Young Scientists Dedic. to the 90-th Anniver. of National Leader Heydar Aliyev, Bakı 2013. səh. 59-60.
6. Abdullayeva A.E., Mammadova A.N. On order of approximation function by generalized Szasz operators and Bernstein-Chlodowsky polynomials. Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS. Baku 2013, p.3-8.
7.Mammadova A.N., Abdullayeva A.E. Approximation theorems for Bernstein-Chlodowsky and generalized Szasz operator. Advances and Applications in Mathematical Sciences, 2013, p.137-149.
8.Мамедова А.Н. Аппроксимационная теорема для обобщенных операторов Саса в случае функции двух переменных , Актуальные проблемы математики и механики Материалы Межд. конф., посв. 55-летию Института Математики и Механики, 2014, с. 228
9.Абдуллаева А.Э., Маммадова А.Н. О моментах полиномов Бернштейна-Хлодовского и свойства весового модуля непрерывнсти., Известия Педагогического Университета, Баку 2014, №4, с.24-28.
10.Bandaliyev R.A., Mammadova A.N, Abdullayeva A.E. On the denseness of $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_{p(x)}(\Omega)$ for $0 < p(x) < 1$. Azerbaijan-Turkey-

Ukrainian International Conference Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications. Baku-2015, p.30-31.
11.Abdullayeva A.E., Mammadova A. N. Moments operators Szasz and Bernstein-Chlodowsky. International Workshop on Non-Harmonic Analysis and Differential Operators. Baku-2016, p.1.
12.Mammadova A.N. Approximation by two dimensional generalized Szasz operators, 2nd International conference on analysis ant its Applications, 2016,p. 66.
13.Mammadova A.N. Some properties of two-dimensional Szasz operator, Caspian J. of Appl. Math., Ecol. and Econ., Baku 2016, v.4, № 2, p. 65-73.
14.Mammadova A.N. On approximation theorem for two-dimensional Szasz type operator in Lebesgue spaces, Inter. Conf. on "Oper. in Morrey-type spaces and Appl.", Dedicated to 60-th Birthday of Prof. Vaqif S. Guliyev, Turkey 2017, p.55.
15. Bandaliyev R.A., Mammadova A.N. On approximation theorems for two-dimensional Szasz operator, Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Baku 2017, v. 37, №1, p. 53-62.
16. Mammadova A.N. On one approximation theorems for two variable Szasz operator, Inter. Conf. "Modern problems of Mathematics and Mechanics" dedicated to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, 2017, p.137.
17. Mammadova A.N. A Moments of Generalized Two Variable Szasz Operators, Journal of Scientific Research and Reports, 2017, v.17, №1 , p. 1-6.

AYNUR NİZAMİ qızı MƏMMƏDOVA

ÜMUMİLƏŞMİŞ SASS OPERATORLAR ARDICILLIĞININ APPROKSİMATİV XASSƏLƏRİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi Sass operatorları ardıcıllığının və onun ümumiləşməsinin çəkili funksiyalar fəzasında approksimasiya məsələlərinə və asimptotik qiymətləndirmələrin alınmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1. Sass operatorunun ümumiləşməsi qurulmuş və ümumiləşmiş Sass operatorunun kəsilməz funksiyaya yaxınlaşma tərtibinin Sass operatorunun momentləri vasitəsilə tapılmışdır.
2. Ümumiləşmiş Sass operatoru üçün klassik Popoviçu tipli teorem həm kəsilməz funksiyalar fəzasında, həm də çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında isbat edilmişdir.
3. Funksiyaların ümumiləşmiş Sass operatorlar ilə yaxınlaşması üçün asimptotik qiymətləndirmələr alınmışdır.
4. İkidəyişənli çəkili kəsilməz funksiyalar fəzasında kəsilməzlik modulunun xassələri araşdırılmışdır.
5. İkidəyişənli Sass operatorunun ümumiləşməsi qurulmuşdur, klassik Popoviçu və Varanovskaya tipli teoremlər isbat edilmişdir.
6. İkidəyişənli Sass operatoru üçün Lebeq fəzasında approksimasiya teoremi isbat edilmişdir.

AYNUR NIZAMI kizi MAMMADOVA

APPROXIMATION PROPERTIES OF SEQUENCE OF THE GENERALIZED SZASZ OPERATORS

ABSTRACT

The thesis is devoted to approximation of the sequence of the Szasz operators and their generalizations in functional weight spaces and obtaining of asymptotic estimations.

In the thesis the following main results were obtained:

1.One generalization of the Szasz operator is constructed and the order of approximation of a continuous function is found by the moments of generalized Szasz operators.

2.The classical Popoviciu type theorems are proved for generalized Szasz operators in the spaces of continuous functions and in the weight function of continuous functions.

3.Asymptotic formulas of the approximation of functions by generalized Szasz operators are obtained.

4.The properties of the modulus of continuity in the weighted functional spaces of continuous functions of two variables are studied.

5.The generalized Szasz operator of two variables are constructed and analog of the Popoviciu and Voronovskaya classic theorems are proved.

6. Approximation theorem is proved by the classical Sass operator of two variables in the Lebesgue space.