АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ХИЛЛА

Специальность: 1211.01 - Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Ракиб Фейруз оглы Эфендиев**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку - 2021

Диссертационная работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Гамзага Давуд оглы Оруджев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Мамед Байрамоглы

доктор физико-математических наук, профессор
Низамеддин Ширин оглы Искендеров

доктор математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

доктор математических наук, профессор
Нигяр Махар кызы Асланова

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор
________________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Данная диссертация посвящена решению прямой и обратной задачи для операторов Шредингера с комплекснозначными, периодическими потенциалами в различных постановках.

В различных разделах математической физики, в частности, в неэрмитовой квантовой механике и теории кристаллов возникает необходимость изучения дифференциальных операторов с комплекснозначными и периодическими коэффициентами.

Главная идея неэрмитовой квантовой механики состоит в том, что величины, измеряемые в эксперименте, всегда описываются вещественными, а не комплексными числами, поэтому каждой наблюдаемой величине ставится в соответствие оператор, действующий в пространстве векторов состояния, собственные значения которого и есть результаты измерения. Наше требование при конструировании операторов состоит в том, что их собственные числа должны быть вещественными. Реализация неэрмитовой квантовой механики состоит в замене эрмитого сопряжения на преобразование PT-симметрии. Преобразование $P-$ симметрии (отражение пространственных координат) состоит, например в замене знака перед оператором координаты, а преобразование T-симметрии (обращение времени) состоит в изменении знака импульса (но не координаты), а также замены i на $-i$. Потенциалы, рассмотренные в диссертационной работе, имеют вид

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx},$$

где для чисел q_n выполняются определённые условия, и являются PT-симметричным при $q_n=\overline{q_n}$, т.е. $q(x)=\overline{q(-x)}$.

Эти потенциалы впервые были рассмотрены в работе М.Г.Гасымова, а для оператора Шредингера в различных постановках был исследован в работах И.М.Гусейнова, А.Оруджева, Е.Оруджева, V.Guillemin и A.Uribe, R.Carlson, K.Shin, Л.Пастур, В.Ткаченко и Фегана.

В диссертационной работе рассматриваются в основном три направления.

1. Изучаются обратные задачи для пучка дифференциальных операторов, а также для операторов высокого порядка с комплекснозначным периодическим потенциалом. Эти случаи отличаются большой сложностью. Оказалось, что задача типа Гурса для операторов преобразования является некорректной и имеет решение в общем случае лишь для уравнений с аналитическими коэффициентами. В связи с этим большой интерес представляет выделение некоторых классов обыкновенных дифференци-альных операторов, для которых существует операторы преобразования.
2. Изучаются обратные задачи для разного типа разрывных дифференциальных операторов с комплекснозначным периодическим потенциалом. В связи с важными приложениями в квантовой физике представляет интерес исследование спектральных характеристик разрывных дифференциальных операторов. Как правило, рассматриваемые задачи связаны с разрывными свойствами физических характеристик среды.
3. Изучаются задачи рассеяния на квантовых графах. Задача Хилла с комплекснозначным потенциалом на квантовых графах возникает в самих разнообразных задачах естествознания - от систем волноводов и нейронных сетей до дискретно-непрерывных аппроксимаций лапласиана на римановом многообразии.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы является спектральный анализ несамосопряженного оператора. Предмет исследования есть решение прямых и обратных задач оператора Хилла в разных постановках.

Цель и задачи исследования.

1. Решение задачи характеризации, т. е. полной обратной задачи для пучка дифференциальных операторов.

2. Исследование спектральных характеристик, а также решение обратной задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка со спектральным параметром полиноминально входящим в уравнения.
3. Исследование индефинитной спектральной задачи для оператора Хилла по двум спектрам.
4. Решение обратной задачи для волнового уравнения с разрывной скоростью.
5. Изучение распространения волн в неконсервативной среде путём исследований спектральных характеристик пучка дифференциальных операторов с дельта образным потенциалом.
6. Исследование распространения волн на ветвящихся струнах путём исследования спектральных характеристик оператора Шредингера на квантовых графах.

Методы исследования.

В диссертационной работе использованы методы спектральной теории операторов, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Основные положения, выносимые на защиту:

- полные обратные задачи для пучка дифференциальных операторов
- обратные задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка со спектральным параметром полиноминально входящим в уравнения
- обратные задачи для разного типа разрывных дифференциальных операторов с комплекснозначным периодическим потенциалом
- задачи рассеяния на квантовых графах

Научная новизна исследования. Получены следующие основные результаты.

- Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная последовательность комплексных чисел была набором спектральных данных операторного пучка второго порядка и для дифференциальных операторов высокого порядка.

- Решена прямая и обратная задача спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ с полиноминально входящим спектральным параметром. Показано, что спектр операторного пучка является непрерывным и заполняет лучи $\left\{k\omega_j : 0 \le k \le \infty,\ j = \overline{0.2m-1}\right\}$, где $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{n}\right)$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $\frac{n\omega_j}{2},\ j = \overline{0.2m-1}, n = 1,2,3,\ldots$. По обобщённым нормировочным числам решена обратная задача восстановления коэффициентов.
- Решена обратная задача для оператора Шредингера со комплекснозначными периодическими потенциалами и разрывным коэффициентом на всей вещественной оси. Исследованы основные характеристики фундаментальных решений, изучен спектр оператора. Сформулирована обратная задача, доказана теорема единственности, предложена конструктивная процедура решения обратной задачи
- Классическая задача Хилла, с комплексным потенциалом распространена на звёздный и петлеобразный графы. Дано определение оператора Хилла на таких графах. Оператор определяется комплексными, периодическими потенциалами и используется специальные граничные условия, связывающие значения функций в вершинах. Дано явное описание вида резольвенты и точно описан спектр, решена обратная задача по коэффициентам отражения.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Даны математические методы для исследования различных прямых и обратных задач для оператора Хилла с комплексным потенциалом. Впервые исследовано полное решение обратной задачи для пучка дифференциальных операторов с комплексными периодическими потенциалами, решена обратная задача по нормировочным числам для оператора высокого порядка с полиноминально входящим спектральным параметром. Исследованы различные разрывные обратные задачи. Результаты, полученные для классической задачи Хилла, обобщены на квантовые графы. Полученные результаты диссертации могут найти применения в теории прямых и обратных задач математической и квантовой физики.

Апробация и применение: Результаты диссертации докладывались на общеинститутском семинаре Института Математики и Механики НАН Азербайджана (акад. Ф.Г.Максудов), на семинаре отделов "Негармонический анализ" (чл-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), "Функциональный анализ" (проф. Г.И.Асланов) и "Дифференциальные уравнения" (проф. А.Б.Алиев) ИММ НАНА, на кафедре "Прикладная математика" Бакинского Государственного Университета (акад. М.Г.Гасымов), в Институте Прикладной математики Бакинского Государственного Университета (рук. акад. Ф.А.Алиев), в Университете Нант (проф. A.Nachaoui, Франция, 2011), в Политехническом Университете Валенсия (проф. Луиса Гарсиа Раффи, Испания, 2016), на семинаре по дифференциальным уравнениям Университета Масарюк, Брно, (Чехия,2017), в Университете Кеел, (рук. проф. Ю.Каплунова, Англия, 2017, 2019), а также на международной конференции по некорректным и обратным задачам, посвященной 70-летию академика М.М. Лаврентьева (5-9 августа 2002 г. Новосибирск, Россия), на 38-й ежегодной иранской математической конференции (03-10 сентябрь, 2007, Зенджан, Иран), III конференция мирового математического общества тюркских стран (30 июня - 4 июля, 2009, Баку, Азербайджан), Болгарско-турецко-украинская научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» (15-20 сентября, 2010, Солнечный берег, Болгария), на международная конференции по функциональному анализу, посвящённая 90-летию В.Е.Лянце (3-10 ноябрь 2010, Львов, Украина), VI съезд Тюркского всемирного математического общества (11-13 июля -2018, Баку, Азербайджан).

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты, а также методы исследования принадлежат автору.

- Решена полная обратная задача для операторных пучков второго порядка и для операторов высокого порядка;
- Решены спектральные задачи для разрывных спектральных задач;
- Классические результаты, полученные для операторов с комплексными периодическими потенциалами, распространены на звёздный и петлеобразные графы.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 35 научных работ. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики -24, тезисы докладов -11.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа: Институт Математики и Механики НАН Азербайджана.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из титульной страницы (645 знаков), содержания – (3524 знаков), введения- (75000 знаков,) четырёх глав (I глава – 122000, II глава-38000, III глава-76000, IV глава - 84000), выводы (1832) и списка литературы, содержащего 140 наименований. Общий объем диссертации состоит из 401.001 знаков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка используемой литературы.

Во введение обосновывается актуальность темы исследования и показан степень ее разработанности, сформулирована цель и задача исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, а также представлена информация об апробации работы.

В первой главе диссертации решается задача характеризации, которая заключается в определении необходимых и достаточных условий на данные рассеяния так, чтобы восстановленные потенциалы принадлежали определенному классу.

Вводится класс Q^2 всех 2π периодических комплекснозначных функций на вещественной оси R, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$ и его подкласс Q_+^2, состоящих из функций вида

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx}. \tag{1}$$

Объектом исследования является несамосопряжённый операторный пучок, L порождённый дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv -\frac{d^2}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)-\lambda^2 \tag{2}$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ с потенциалами $p(x),q(x)\in Q_+^2$, для которых выполняются условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot|p_n|=p<\infty;\ \ \sum_{n=1}^{\infty}|q_n|=q<\infty \tag{3}$$

λ-спектральный параметр.

В 1.1.2 исследуется аналитические свойства решений уравнения $Ly=0$, для чего явно строится фундаментальная система решений уравнения

$$-y''(x)+2\lambda p(x)y(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x) \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть потенциалы $p(x),q(x)$ принадлежат к пространству Q_+^2, для которых выполняются условия (3). Тогда дифференциальное уравнение (4) имеет частные решения, представимые в виде

$$f^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{V_{n\alpha}^{\pm}}{n\pm 2\lambda}e^{i\alpha x}\right) \tag{5}$$

Здесь $V_n^{\pm}$, $V_{n\alpha}^{\pm}$ числа, для которых сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|; \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|V_n^{\pm}\right| \tag{6}$$

Из представления (5) вытекает, что $f^{\pm}(x,\lambda)$ является голоморфной функцией по λ и может иметь полюсы первого порядка в точках $\lambda=\pm\frac{n}{2}, n=1,2,3\ldots$

Лемма 1. При $\lambda\neq 0, \lambda\neq\pm n/2,$ функции $f^{\pm}(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4).
Показано, что при обозначении

$$f_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\pm n/2}(n\pm 2\lambda)f^{\pm}(x,\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}e^{-i(n/2)x} \tag{7}$$

имеет место соотношение

$$f_n^{\pm}(x)=S_n^{\pm}f^{\mp}(x,\mp n/2). \tag{8}$$

Сравнение формул для этих выражений показывает,

$$S_n^{\pm}=V_{nn}^{\pm} \tag{9}$$

Определения 1. Последовательность, $\{S_n^{\pm}\}_1^{\infty}$ построенная с помощью формул (9) называется набором спектральных данных оператора L с потенциалами $p(x),q(x)\in Q_+^2$.

Теорема 2. (основной результат этой главы). Для того чтобы, заданная последовательность комплексных чисел $\{S_n^{\pm}\}_1^{\infty}$ была набором спектральных данных оператора L с потенциалами $p(x),q(x)\in Q_+^2$ необходимо и достаточно, одновременное выполнение условия

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|S_n^{\pm}\right|<\infty \tag{10}$$

2. Бесконечный определитель

$$D(z) = \det\left\|\delta_{nm} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4s_m^- s_k^+}{(m+k)(n+k)} e^{i\frac{m+k}{2}z} e^{i\frac{n+k}{2}z}\right\|_{n,m=1}^{\infty} \qquad (11)$$

существует, непрерывен, не обращается в нуль в замкнутой полуплоскости $\overline{C_+} = \{z : \operatorname{Im} z \ge 0\}$ и аналитичен внутри открытой полуплоскости $C_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

В 1.1.3 рассматривается обратная задача теории рассеяния. Сначала исследуется спектральные свойства оператора L, которые основаны на исследовании решений Флоке уравнения

$$-y''(x) + 2\lambda p(x)y(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x).$$

Так как $q, p \in Q_{2\pi}^+$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, то конечно удобно перейти к рассмотрению (1) для всех $x \in \Pi^+$. Полагая в нем $x = it$, $\lambda = -i\mu,\ Y(t) = y(x), t \in R^+,$ приходим к уравнению

$$-Y''(t) + 2\mu\,\overline{p}(it)Y(t) + \overline{q}(it)Y(t) = \mu^2 Y(t) \qquad (12)$$

в котором

$$\overline{p}(t) = ip(it) = i\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-nt} \qquad (13)$$

$$\overline{q}(t) = -q(it) = -\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{-nt}. \qquad (14)$$

В результате получается уравнение (12), потенциалы которого экспоненциально убывают при $t \to \infty$. Откуда следует, возможность применения хорошо известной в теории обратных задач метода операторов преобразования.

Согласно определению оператора преобразования, привязанного к бесконечности решение $f_{\pm}(t, \mu)$ уравнения (12) может быть представлено в виде

$$f_{\pm}(t,\mu)=\Psi^{\pm}(t)e^{\pm i\mu t}+\int_{t}^{\infty}K^{\pm}(t,u)e^{\pm i\mu u}du. \qquad (15)$$

Сравнивая формулы (15) и (12) имеем

$$K^{\pm}(t,u)=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{-\alpha t}e^{-(u-t)n/2} \qquad (16)$$

$$\Psi^{\pm}(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}V_{n}^{\pm}e^{-nt} \qquad (17)$$

Функции $K^{\pm}(t,u)$- ядро оператора преобразования и $\Psi^{\pm}(t)$ в нашем случае строится конструктивно.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Функция $\Psi^{\pm}(t)$ и ядро $K^{\pm}(t,u)$, $u\geq t$ привязанного $k+\infty$ оператора преобразования уравнения (12) допускают представление (16) и (17) соответственно, в котором ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\left|V_{n}^{\pm}\right|$ сходятся.

Далее изучены вопросы разрешимости основного уравнения и единственность решения обратной задачи.

В 1.2 решается полная обратная задача для оператора высокого порядка L_1 порождённой дифференциальным выражением

$$l(y)=(-1)^{m}y^{(2m)}(x)+\sum_{\gamma=0}^{2m-2}P_{\gamma}(x)y^{(\gamma)}(x) \qquad (18)$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ с потенциалами $P_{\gamma}(x)\in Q_{+}^{2}$, где Q_{+}^{2} состоит из функций вида

$$P_{\gamma}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{\gamma n}e^{inx};\quad \sum_{\gamma=0}^{2n-2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma}\left|P_{\gamma n}\right|<\infty \qquad (19)$$

и является подклассом класса Q^{2} всех $2\pi-$периодических комплекснозначных функций на вещественной оси R, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$.

В этом параграфе введены некоторые известные факты и понятия, которые используется в решении поставленной задачи, а также сформулирован основной результат.

Теорема 4. Для того, чтобы заданная последовательность комплексных чисел $\left\{\tilde{S}_{nj}\right\}_{n=1,\, j=1}^{\infty,\, 2m-1}$ была набором спектральных данных оператора L_1 порождённой дифференциальным выражением (18) необходимо и достаточно одновременное выполнение условия

1) $\left\{n\ \tilde{S}_{nj}\right\}_{n=1,\, j=1}^{\infty,\, 2m-1} \in l_1$ (20)

2) бесконечный детерминант

$$D(z) \equiv$$

$$\equiv \det\left\|\delta_{rn} E_{2m-1} - \left\| \frac{i(1-\omega_j)\tilde{S}_{nj}}{r\omega_l(1-\omega_j) - n(1-\omega_j)} e^{i\frac{n}{1-\omega_j}z} e^{-i\frac{r\omega}{1-\omega_l}z} \right\|_{j,l=1}^{2m-1} \right\|_{r,n=1}^{\infty} \qquad (21)$$

существует, непрерывен, не обращается в нуль в замкнутой полуплоскости $\overline{C_+} = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и аналитичен внутри открытой полуплоскости $C_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Прямая и обратная задача спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений чётного порядка с полиноминально входящим спектральным параметром решается в параграфе 1.3.1.

Рассмотрен дифференциальный операторный пучок $L_2(k)$ порождённый выражением вида

$$l(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + \sum_{\gamma=0}^{2m-2} P_\gamma(x,k) y^{(\gamma)}(x) - k^{2m} y(x), \qquad (22)$$

где

$$P_\gamma(x,k) = \sum_{s=0}^{2m-\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_{\gamma s n} k^s e^{inx} \qquad (23)$$

и ряд

$$\sum_{\gamma=0}^{2m-2}\sum_{s=0}^{2m-\gamma-1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma+s}\left|p_{\gamma sn}\right| \tag{24}$$

сходится, а k является спектральным параметром.

Построена резольвента и изучен спектр операторного пучка $L_2(k)$ с помощью теоремы

Теорема 5. Операторный пучок $L_2(k)$ имеет чисто непрерывный спектр, который заполняет лучи

$$\left\{k\omega_j : 0 \le k < \infty;\ j = \overline{0.2m-1}, \omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right)\right\},$$

а на непрерывном спектре могут быть спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $\frac{n\omega_j}{2}, n = 1,2,\ldots.$

Получено разложение по собственным функциям, а также решена обратная задача с помощью следующей теоремы
Пусть

$$a_m = \max_{\substack{1\le j\le l\le 2m-1 \\ 1\le n,\ r<\infty}} \frac{\left|(1-\omega_j)(n+r)\right|}{\left|r(1-\omega_j) - n(1-\omega_j)\omega_j\right|},$$

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{2m-1}\sum_{j=0}^{2m-1} n^{2m-2}\left|S_{j\nu n}\right|$$

Теорема 6. Пусть для заданных чисел $S_{j\nu n}, j = \overline{0.2m-1}$, $\nu = 0.2m-1, n \in N$ выполняются следующие условия

$$\sum_{1-n}^{\infty} n\left|S_n\right| < \infty$$

$$4^{m-1} a_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|S_n\right|}{n+1} = \rho < 1$$

Тогда существуют функции $p_\gamma(x,k), \gamma = \overline{0.2m-2},$ вида (23) для которых выполняется условие (24) и числа $S_{j\nu n}$

являются “обобщёнными нормировочными числами” оператора с восстановленными коэффициентами.

В 1.4 решается задача определения оператора Хилла по двум спектрам. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y,\ 0 \le x \le 2\pi\ , \tag{25}$$

$q(x)$ является комплексной периодической функцией вида (1), (3) с краевыми условиями

$$y'(0) = y(2\pi) = 0, \tag{26}$$

$$y'(0) = y'(2\pi) = 0. \tag{27}$$

Вводятся $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$собственные значения задач (25), (26) и (25), (27) соответственно. Оказывается, что, если $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ решения уравнения (25) удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \ \varphi'(0,\lambda) = 0,$$

$$\psi(0,\lambda) = 0,\ \ \psi'(0,\lambda) = 1,$$

то собственные значения краевых задач (25), (26) и (25), (27) совпадают соответственно с нулями функций

$$\Phi_1(\lambda) = \varphi(2\pi,\lambda) \text{ и } \Phi_2(\lambda) = \varphi'(2\pi,\lambda).$$

Теорема 7. Потенциал $q(x)$ единственным образом определяется с помощью спектров $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ задач (25), (26) и (25), (27) соответственно.

Глава II посвящена изучению индефинитных спектральных задач для потенциалов, линейно зависящих от λ, так называемых, энергия зависящих потенциалов, т. е. пучок L_3 несамосопряжённых дифференциальных операторов, порождённых формальным дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right) \equiv \frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda p(x) + q(x)\right\}$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$. Здесь λ является комплексным числом, а коэффициенты $p(x),q(x)$ определяются как (1), (3), а для $\rho(x)$ выполняется

$$\rho(x)=\begin{cases}1 & при \quad x\geq 0,\\ -1 & при \quad x<0.\end{cases} \tag{28}$$

В 2.2 изучены специальные решения уравнения $l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)=\lambda^2 y(x)$ с помощью следующей теоремы

Теорема 8. Пусть $p(x),q(x)$ имеет соответственно вид (1), (3) и для $\rho(x)$ удовлетворяется условие (39).
Тогда уравнение

$$-y''(x)+2\lambda p(x)y(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x) \tag{29}$$

имеет решение вида

$$f_1^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm\lambda x}\left(1+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2i\lambda}\sum\nolimits_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}\right)$$

$$при \ x\geq 0$$

$$f_2^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm\lambda x}\left(1+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2i\lambda}\sum\nolimits_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}\right)$$

$$при \ x<0$$

где числа $V_n^{\pm}$ и $V_{n\alpha}^{\pm}$ определяются из рекуррентных соотношений и при этом ряды

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$$

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}n^2\left|V_n^{\pm}\right|$$

сходятся.

Легко заметит, что функции $f_1^{+}(x,\lambda)$, $f_1^{-}(x,\lambda)$, $\left(f_2^{+}(x,\lambda),\right.$ $\left.f_2^{-}(x,\lambda)\right)$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (29) при

$$\lambda \neq 0, \lambda \neq \pm\frac{n}{2} \text{ и } \lambda \neq \pm\frac{in}{2}.$$

Затем, используя условия сопряжения

$$y(0+) = y(0-)$$

$$y'(0+) = y'(0-)$$

мы получаем, что каждое решение уравнения (29) можно представить в виде линейных комбинаций этих решений

$$f_2^+(x,\lambda) = C_{11}(\lambda) f_1^+(x,\lambda) + C_{12}(\lambda) f_1^-(x,\lambda) \text{ } при \text{ } x \geq 0 \qquad (30)$$

$$f_1^+(x,\lambda) = C_{22}(\lambda) f_{21}^+(x,\lambda) + C_{21}(\lambda) f_{21}^-(x,\lambda) \text{ } при \text{ } x < 0 \qquad (31)$$

Используя (30), (31) получаем, что для коэффициентов $C_{21}(\lambda)$, $C_{22}(\lambda)$ верны соотношения

$$C_{22}(\lambda) = iC_{11}(-\lambda); \quad C_{21}(\lambda) = iC_{12}(\lambda)$$

Положим

$$f_n^{\pm}(x) = \lim_{\lambda \to \mp\frac{n}{2}} (n \pm 2\lambda) f_1^{\pm}(x,\lambda) = \sum_{\alpha=n}^{\infty} V_{n\alpha}^{\pm} e^{i\alpha x} e^{ii\frac{n}{2}x}$$

Установлено, что функции $f_1^{\pm}\left(x, \mp\frac{n}{2}\right)$ и $f_n^{\pm}(x)$ линейно зависимы.

Следовательно,

$$f_1^{\pm}(x) = S_n^{\pm} f_1^{\pm}\left(x, \mp\frac{n}{2}\right) \qquad (32)$$

Анализ формулы (32) показывает, что $S_n^{\pm} = V_{nn}^{\pm}$.

В 2.3 изучен спектр оператора L_3, в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$. Поделим λ - плоскость на сектора

$$S_k = \left\{ \frac{k\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{(k+1)\pi}{2} \text{ , } k = \overline{0,3} \right\}$$

Имеет место следующая представление для ядра резольвенты оператора L_3.

$$R_{11}(x,t,\lambda)=\frac{1}{W[f_1^+,f_2^+]}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda)f_2^+(t,\lambda) & t<x \\ f_1^+(t,\lambda)f_2^+(x,\lambda) & t>x \end{cases} \quad \lambda\in S_0$$

$$R_{12}(x,t,\lambda)=\frac{1}{W[f_1^+,f_2^-]}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda)f_2^-(t,\lambda) & t<x \\ f_1^+(t,\lambda)f_2^-(x,\lambda) & t>x \end{cases} \quad \lambda\in S_1$$

$$R_{21}(x,t,\lambda)=\frac{1}{W[f_1^-,f_2^-]}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda)f_2^-(t,\lambda) & t<x \\ f_1^-(t,\lambda)f_2^-(x,\lambda) & t>x \end{cases} \quad \lambda\in S_2$$

$$R_{22}(x,t,\lambda)=\frac{1}{W[f_1^-,f_2^+]}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda)f_2^+(t,\lambda) & t<x \\ f_1^-(t,\lambda)f_2^+(x,\lambda) & t>x \end{cases} \quad \lambda\in S_3$$

Непосредственно из вида резольвенты можно получить то, что для всех λ вне $\{\mathrm{Re}\,\lambda=0\}\cup\{\mathrm{Im}\,\lambda=0\}$ и $C_{11}(\pm\lambda)\neq 0,$ $C_{11}(\pm\lambda)\neq 0,$ резольвента оператора L_3, $R_\lambda=\left(L_3-\lambda^2 I\right)^{-1}$, существует и ограничена.

Теорема 9. Оператор L_3 не имеет действительных и чисто мнимых собственных чисел. Непрерывный спектр заполняет оси $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ и $\mathrm{Im}\,\lambda=0$, на которых могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\frac{in}{2},\frac{n}{2},n=\pm1,\pm2,\ldots$ Собственные значения оператора L_3 ограничены и совпадают с нулями функций $C_{11}(-\lambda),C_{11}(\lambda),$ $C_{12}(\lambda),$ $C_{12}(-\lambda)$ на секторах $S_k=\left\{\frac{k\pi}{2}<\arg\lambda<\frac{(k+1)\pi}{2},k=\overline{0,3}\right\}$ соответственно.

Определение 2. Набор величин $\{C_{11}(\lambda),C_{12}(\lambda)\}$ называется спектральными данными оператора L_3.

Теорема 10. Все числа $V_{n\alpha}^{\pm},n<\alpha$ и $V_\alpha^{\pm}$ могут быть определены единственным образом с помощью чисел $V_{nn}^{\pm}$.

Третья глава посвящена исследованию спектральных свойств разрывных дифференциальных уравнений.

В 3.1 состоит из четырёх частей, где решаются разрывные обратные задачи спектрального анализа.

Рассмотрим оператор L_4 порожденной дифференциальным выражением

$$\frac{1}{\rho(x)}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty\rho(x))$,

Решается обратная задача спектрального анализа для волнового уравнения с разрывной волновой скоростью. Для этого рассмотрено дифференциальное уравнение

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x) \tag{33}$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty\rho(x))$, в предположении, что потенциал $q(x)$ определяется с помощью (1), (3), и

$$\rho(x)=\begin{cases}1 & при \quad x\geq 0,\\ \beta^2 & при \quad x<0, \beta\neq 1, \beta>0\end{cases}$$

а λ является комплексным числом.

В 3.1.2 изучены основные свойства специальных решений уравнения (33). Показано, что уравнение

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x)$$

имеет решения вида

$$f_1^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left(1+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pm 2\lambda}\sum\nolimits_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right) \; при \; x\geq 0$$

$$f_2^{\pm}(x,\lambda)=e^{\mp ii\lambda\beta x}\left(1+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2\lambda}\sum\nolimits_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right) \; при \; x<0$$

где числа $V_{n\alpha}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\alpha(\alpha-n)V_{n\alpha}+\sum\nolimits_{s=n}^{\alpha-1}q_{\alpha-s}V_{ns}=0, \;\; 1\leq n\leq\alpha$$

$$\alpha\sum\nolimits_{s=n}^{\alpha-1}V_{n\alpha}+q_{\alpha}=0$$

при этом сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha|V_{n\alpha}|$$

Отметим, что функции $f_1^+(x,\lambda)$ и $f_1^-(x,\lambda)$ $f_1^+(x,\lambda)$ $\left(f_2^+(x,\lambda)\right.$ и $\left.f_2^-(x,\lambda)\right)$ и линейно независимы и их вронскиан равен $2i\lambda(-2i\lambda\beta)$.

Тогда каждое решение уравнения (33) может быть представлено как линейная комбинация этих решений.

$$f_2^+(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f_1^+(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f_1^-(x,\lambda)\ при\ x\geq 0$$
$$f_1^+(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f_{21}^+(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f_{21}^-(x,\lambda)\ при\ x<0$$

Коэффициенты $C_{ij}(\lambda), i, j=1,2$ выражается через Вронскиан решений $f_1^{\pm}(x,\lambda)$ и $f_2^{\pm}(x,\lambda)$. Действительно

$$C_{11}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f_2^+(0,\lambda),\ f_1^-(0,\lambda)\right],$$
$$C_{12}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f_1^+(0,\lambda),\ f_2^+(0,\lambda)\right],$$
$$C_{22}(\lambda)=-\frac{1}{\beta}C_{11}(-\lambda),\ C_{21}(\lambda)=\frac{1}{\beta}C_{12}(\lambda).$$

В соответствии с физическим смыслом решений $f_1^{\pm}(x,\lambda)$ и $f_2^{\pm}(x,\lambda)$ назовем коэффициент $\frac{C_{11}(\lambda)}{C_{12}(\lambda)}$ – амплитудой коэффициента отражение направо, а $\frac{1}{C_{12}(\lambda)}$ и $\frac{1}{C_{21}(\lambda)}$ -амплитудами коэффициентов прохождения.

Лемма 2. Собственные значения оператора L_4 конечны и совпадают с квадратами нулей функций $C_{12}(\lambda), C_{12}(-\lambda)$ из секторов $S_k,\ k=0,1$ соответственно. Показано, что для оператора L_4 порожденной дифференциальным выражением

$$\frac{1}{\rho(x)}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty\rho(x))$, ядро резольвенты $\left(L_4-\lambda^2 I\right)$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$ имеет вид

$$R_{11}(x,t,\lambda)=\frac{1}{C_{12}(\lambda)}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda)f_2^+(t,\lambda) \ \textit{при} \ t\le x \\ f_1^+(t,\lambda)f_2^+(x,\lambda) \ \textit{при} \ t\ge x \end{cases}$$

а при $\operatorname{Im}\lambda<0$

$$R_{12}(x,t,\lambda)=\frac{1}{C_{12}(-\lambda)}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda)f_2^-(t,\lambda) \ \textit{при} \ t\le x \\ f_1^-(t,\lambda)f_2^-(x,\lambda) \ \textit{при} \ t\ge x \end{cases}$$

Таким образом, $R_{\lambda^2}(x,t,\lambda)=\left(L_4-\lambda^2 I\right)^{-1}$ существует и ограничено при всех λ^2 вне положительной полуоси и $C_{12}(\pm\lambda)\neq 0.$ При этом доказано, что коэффициент $C_{12}(\lambda),$ является аналитической функцией при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и имеет ограниченное число нулей, более того если $C_{12}(\lambda_n)=0,$ и

$$\frac{d}{d\lambda}\left[C_{12}(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_n}=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)f_1^+(x,\lambda_n)f_2^+(x,\lambda_n)dx.$$

Получаем что, собственные значении оператора L_4 конечны и совпадают с квадратами нулей функций $C_{12}(\lambda), C_{12}(-\lambda)$ из секторов $S_k, k=0,1,$ соответственно.

Отметим, что можно получить полезное в дальнейшем отношение

$$\beta=2\lim_{\operatorname{Im}\lambda\to\infty}C_{12}(\lambda)-1$$

Теорема 11. Спектр оператора L_4 является вещественным, чисто непрерывным и заполняет полуось $[0,\infty)$, а на непрерывном спектре могут быть спектральные особенности первого порядка, которые совпадают с числами вида $(n/2)^2,(n/2\beta)^2, n=1,2,\ldots$

Вопрос разложения по собственным функциям рассмотрен в параграфе 3.1.3, где доказано, что для произвольной функции $\Psi(x)$ принадлежащей пространству $L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$ имеет место следующее разложение по собственным функциям

$$\Psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)\Psi(t)\left[\int_{\Gamma_0^-}\frac{f_1^+(x,\lambda)f_1^+(t,\lambda)}{2i\lambda C_{12}(\lambda)C_{22}(\lambda)}d\lambda+G_{11}(\lambda_n,x,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{in}V_{nn}f_1^+(x,n/2)f_1^+(t,n/2)+F\left(x,t,\frac{n}{2\beta}\right)\right]dt$$

В 3.1.4 решена обратная задача для оператора L_4 по спектральным данным $\{C_{12}(\lambda),V_{nn}\}$.

Доказано, что спектральные данные $\{C_{12}(\lambda),V_{nn}\}$ единственным образом определяют функцию $q(x)$, а также число β.

В 3.2 рассмотрена задача о спектре несамосопряжённого пучка с разрывным коэффициентом.

Рассмотрена спектральная задача для операторного пучка L_5 с комплексными периодическими потенциалами в пространстве $L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$, порождённого дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv\frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)\right\}, \qquad (34)$$

где -λ является комплексным числом, а для коэффициентов $p(x),q(x)$ выполняются условия (1), (3) и $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x)=\begin{cases}1 \quad \text{для} \quad x\in(-\infty,b_1)\\ \gamma_1^2 \quad \text{для} \quad x\in(b_1,b_2)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \gamma_n^2 \quad \text{для} \quad x\in(b_n,\infty)\end{cases} \qquad (35)$$

где $\gamma_j\neq 0(j=1,2,\dots,n)$.

Известно, что изучение спектральных свойств операторного пучка L_5 основывается на анализе решений уравнения

$$-y''+[2\lambda p(x)+q(x)]y=\lambda^2\rho(x)y, x\in R \tag{36}$$

Получено представление о специальных решениях уравнение (36).

Теорема 12. Пусть потенциалы $p(x), q(x)$ имеют вид (1), (3) и для $\rho(x)$ удовлетворяется условие (35). Тогда уравнение $L_5(y)=\lambda^2\rho(x)y$ имеет решения вида

$$f_j^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda\gamma_j x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\upsilon_{n\alpha}^{\pm}}{n\pm 2\lambda\gamma_j}e^{i\alpha x}\right)$$

для $x\in(b_j,b_{j+1})$, где $j=0,1,2,\ldots m,\ \gamma_0=1,\ b_0=-\infty,\ b_{m+1}=\infty$ числа $\upsilon_n^{\pm}$ и $\upsilon_{n\alpha}^{\pm}$ определяются из рекуррентных соотношений и $f_j^{\pm}(x,\lambda)$ допускает дважды почленное дифференцирование.

Теорема 13. Спектр операторного пучка L_5 состоит из непрерывного спектра, заполняющего ось $(-\infty,+\infty)$, на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\left(\pm\frac{n}{2\gamma_j}\right), n\in N,\ j=0,1,2,3,\ldots,m,$ и из конечного числа собственных чисел.

В 3.3 изучено спектральный анализ одного класса несамосопряжённых дифференциальных операторных пучков с обобщённой функцией

Рассмотрена обратная задача для пучка L_6 несамосопряжённых дифференциальных операторов, порождённых формальным дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv-\frac{d}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)+\beta\delta(x)-\lambda^2,$$

с обобщённой функцией, в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$. Здесь $\delta(x)$- дельта функция Дирака, $\beta < 0$ – вещественное число, λ – комплексное число, а для коэффициентов $p(x), q(x)$ выполняется (1), (3).

Доказано, что спектр операторного пучка L_6 состоит из непрерывного спектра, заполняющего ось $\{-\infty < \lambda < +\infty\}$, на которой, могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\pm n/20,\ n \in N$ и не более одного собственного числа.

Решена обратная задача, где ставится задача определения функции $p(x), q(x)$ и β по числам $\{S_n^{\pm}\}$. В начале, найдены явные связи между последовательностями $\{S_n^{\pm}\}$ и $\{V_{n\alpha}^{\pm}\}$, $\{V_n^{\pm}\}$.

$$V_{mm}^{\pm} = S_m^{\pm},\ V_{m,\alpha+m}^{\pm} = S_m^{\pm}\left(V_{\alpha}^{\mp} + \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{V_{n\alpha}^{\mp}}{n+m}\right),$$

а β определено с помощью равенства

$$\beta = -\frac{y'(+0) - y'(-0)}{y(0)}$$

Эти соотношения являются основными уравнениями для определения $\{q_\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ и β по числам $\{S_n^{\pm}\}$.

Теорема 14. Для того, чтобы числа $\{S_n^{\pm}\}$ были “нормировочными” числами операторного пучка типа L_6 с потенциалом вида (1), (3) достаточно выполнение условий

$$\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \left|S_m^*\right| = \delta < \infty;\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left|S_m^*\right|}{1+m} = p < 1,$$

где $\left|S_m^*\right| = \max\left\{\left|S_m^+\right|, \left|S_m^-\right|\right\}$.

В 3.4 исследован спектральный анализ несамосопряжённого оператора Хилла со ступенчатым потенциалом.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x) \qquad (37)$$

в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$ где штрих обозначает производную по пространственному координату в предположении, что потенциал

$$q(x)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty} q_n^+ e^{inx} & для \quad x\ge 0\\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n^- e^{inx} & для \quad x<0\end{cases};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|q_n^{\pm}\right|=q<\infty,$$

$q_n^+\ne q_n^-$ а $\lambda-$ является комплексным числом.

Тогда уравнение

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x)$$

имеет решение вида

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}f^+(x,\lambda) & для \quad x\ge 0\\ f^-(x,\lambda) & для \quad x<0\end{cases}$$

где

$$f^{\pm}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}\frac{1}{n\pm 2\lambda}\sum_{\alpha=n}V_{n,\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}\right)$$

и числа $V_{n,\alpha}^{\pm}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений и при этом ряд

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$$

сходится.

Так как функции $f^+(x,\pm\lambda)$ и $f^-(x,\pm\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (37) соответственно для $x\ge 0$ и $x<0$, то продолжая $f^+(x,\lambda)$ как решение уравнения используя условия сопряжения

$$\begin{pmatrix}y(+0)\\ y'(+0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(-0)\\ y'(-0)\end{pmatrix}$$

легко видеть, что имеют место следующие равенства

$$f^+(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f^-(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f^-(x,-\lambda)\ при\ x<0$$

$$f^{-}(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f^{+}(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f^{+}(x,-\lambda)\ \textit{при}\ x\geq 0$$

Пусть

$$f_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2}}(n\pm 2\lambda)f^{+}(x,\pm\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{+}e^{i\alpha x}e^{-i\frac{n}{2}x},$$

$$\varphi_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2}}(n\pm 2\lambda)f^{-}(x,\pm\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{-}e^{i\alpha x}e^{-i\frac{n}{2}x},$$

Тогда

$$f_n^{\pm}(x)=V_{nn}^{+}f^{+}\left(x,\frac{n}{2}\right)\ \text{и}\ \ \varphi_n^{\pm}(x)=V_{nn}^{-}f^{-}\left(x,\frac{n}{2}\right).$$

В 3.4.2 доказано, что спектр оператора $L=\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$ состоит из непрерывного спектра, который заполняет полуось $[0,\infty)$ на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\left(\frac{n}{2}\right)^2, n=1,2,\ldots$ и имеет конечное число собственных значений, определяемые как корни уравнения $C_{12}(\lambda)=0$.

В 3.4.3 изучена обратная задача.

Обратная задача: По заданным спектральным данным $\{C_{11}(\lambda),C_{12}(\lambda)\}$ построить потенциал $q(x)$.

В этом параграфе даётся конструктивная процедура решения обратной задачи по заданным спектральным данным.

Таким образом, по спектральным данным $\{C_{11}(\lambda),C_{12}(\lambda)\}$ потенциал $q(x)$ может быть восстановлена однозначно и эффективно.

Целью **четвертой главы** является спектральный анализ распространения волны в слоистой, неоднородной среде, такой как ветвящаяся трубка или система соединённых струн.

В 4.1 даётся постановка прямой задачи.

Для изучения распространения волн на ветвящихся струнах мы должны рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} -y_1''(x_1,\lambda)+[2\lambda p_1(x_1)+q_1(x_1)]y_1(x_1,\lambda)=\lambda^2 y_1(x_1,\lambda) \\ -y_2''(x_2,\lambda)+[2\lambda p_2(x_2)+q_2(x_2)]y_2(x_2,\lambda)=\lambda^2 y_2(x_2,\lambda) \\ -y_3''(x_3,\lambda)+[2\lambda p_3(x_3)+q_3(x_3)]y_3(x_3,\lambda)=\lambda^2 y_3(x_3,\lambda) \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ -y_n''(x_n,\lambda)+[2\lambda p_n(x_n)+q_n(x_n)]y_n(x_n,\lambda)=\lambda^2 y_n(x_n,\lambda) \end{cases}$$

где потенциалы $p_k(x_k)$ и $q_k(x_k)$, $k=1,2,3,$ имеют вид

$$p_k(x_k)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{kn}e^{inx_k}, \sum_{n=1}^{\infty} n|p_{kn}|<\infty;$$

$$q_k(x_k)=\sum_{n=1}^{\infty} q_{kn}e^{inx_k}, \sum_{n=1}^{\infty} |q_{kn}|<\infty;$$

со следующей системой граничных условий в начальных точках положительной полуоси

$$\begin{cases} y_1(0,\lambda)=y_2(0,\lambda)=y_3(0,\lambda)=\cdots=y_n(0,\lambda) \\ y_1'(0,\lambda)+y_2'(0,\lambda)+y_3'(0,\lambda)+\cdots+y_n'(0,\lambda)=0 \end{cases} \quad (38)$$

в пространстве $L_2(G)=\bigoplus_{k=1}^{n} L_2[o_k,\infty)$ где используется обозначение o_k с индексом для обозначения начальной точки $k-$й положительной полуоси, а прямая сумма пространств обозначается через $\oplus$. Штрих означает производную по пространственному координату и $\lambda-$является комплексным числом.

Для простоты получения результатов без потери общности в будущем мы рассмотрим случай $n=3$.

Определим пространство $L_2(G)$

$$L_2(G)=\bigoplus_{k=1}^{3} L_2(N_k),$$

где $N_k[o_k,\infty)$, со скалярным произведением

$$\left(f,g\right)_{L_2(G)}=\sum_{k=1}^{3}\left(f_k,g_k\right)_{L_2(N_k)},$$

и рассмотрим оператор

$$L_G=\mathop{\oplus}_{k=1}^{3}L_k,$$

где

$$L_k=-d^2/dx_k^2+2\lambda p_k\left(x_k\right)+q_k\left(x_k\right)$$

с областью определения

$$D\left(L_G\right)=\left\{y(x)\middle|y_k(x),y_k'(x)\in AC\left[0,R\right]\right.$$

$$\text{для всех}\quad R>0, y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)$$

$$\left.y_1'(0)+y_2'(0)+y_3'(0)=0,\ y_k(x),y_k''(x)\in L_2\left(R^+\right),k=1,2,3\right\}$$

Тогда задачу можно интерпретировать как исследование оператора $L_G=\mathop{\oplus}\limits_{k=1}^{3}L_k$, на представленном выше некомпактном графе.

Спектральная задача может быть описана следующим образом:

Найти функцию $y_k(x_k,\lambda)=\left(y_{k1}(x_1,\lambda),y_{k2}(x_2,\lambda),y_{k3}(x_3,\lambda)\right)$ удовлетворяющий уравнению Штурма-Лиувилля

$$-y_k''(x_k,\lambda)+2\lambda p_k\left(x_k\right)y_k(x_k,\lambda)+q_k\left(x_k\right)y_k(x_k,\lambda)=\lambda^2y_k(x_k,\lambda),\quad (39)$$

на $N_k, k=1,2,3$, связанный в нуле обычными условиями Кирхгофа и дополненный начальными условиями для функций, $y_k\left(x_k,\lambda\right),\ k=1,2,3$.

a) y_k непрерывна в узлах графа, i. e., в частности, для нашего графа

$$y_{k1}\left(0,\lambda\right)=y_{k2}\left(0,\lambda\right)=y_{k3}\left(0,\lambda\right);\quad (40)$$

b) сумма производных по всем ветвям, исходящим от узла, рассчитанная для каждого узла, равна нулю

$$y_{k1}'\left(0,\lambda\right)=y_{k2}'\left(0,\lambda\right)=y_{k3}'\left(0,\lambda\right)=0.\quad (41)$$

Для каждого фиксированного $k=1,2,3$ на ребре N_k существует фундаментальная система решений $f_k^{\pm}(x_k,\lambda)$ уравнения (39), которая при $\lambda \neq \pm n/2, n \in N$ и $\lambda \neq 0$ имеет вид:

$$f_k^{\pm}(x_k,\lambda)=e^{\pm i\lambda x_k}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(\pm k)} e^{inx_k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{V_{n\alpha}^{(\pm k)}}{n\pm 2\lambda}e^{i\alpha x_k}\right)$$

где $V_n^{(\pm k)}\, V_{n\alpha}^{(\pm k)}$ являются числами и для них сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left|V_n^{\pm}\right|;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n+1}^{\infty}\alpha(\alpha-n)\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|;\ \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left|V_{nn}^{\pm}\right|$$

В качестве решения задачи мы будем понимать матрицу

$$Y(x,\lambda)=\left[y_{jk}(x_k,\lambda)\right]_{k,\,j=1,2,3}$$

на некомпактном графе на основе следующих условий:

1. $L_G Y=\lambda^2 Y$;
2. $y_{jk}(x_k,\lambda)$ является решением на луче $N_k=[0,\infty), k=1,2,3$;
3. $y_{jk}(x_k,\lambda)=T_{jk}(\lambda) f_k^{+}(x_k,\lambda), k\neq j$

и

$$y_{kk}(x_k,\lambda)=f_k^{-}(x_k,\lambda)+R_{kk}(\lambda) f_k^{+}(x_k,\lambda), k=1,2,3,$$

Коэффициенты T_{jk} и $R_{kk}(\lambda)$ можно найти, записав граничные условия (4.8), (4.9) для решения $y_{jk}(x_k,\lambda)$. Чтобы быть конкретным, предположим $k=1$, тогда

$$f_1^{-}(0,\lambda)+R_{11}(\lambda) f_1^{+}(0,\lambda)=T_{12}(\lambda) f_2^{+}(0,\lambda)=T_{13}(\lambda) f_3^{+}(0,\lambda),$$

$$f_1^{-'}(0,\lambda)+R_{11}(\lambda) f_1^{+'}(0,\lambda)+T_{12}(\lambda) f_2^{+'}(0,\lambda)+T_{13}(\lambda) f_3^{+'}(0,\lambda)=0.$$

Мы решаем эти уравнения для $R_{11}(\lambda)$, $T_{12}(\lambda)$ и $T_{13}(\lambda)$. Отмечая, что для Вронскиана решений $W[f_1^{+}(0,\lambda), f_1^{-}(0,\lambda)]=2i\lambda,$ мы получаем

$$R_{11}(\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} -f_1^-(0,\lambda) & -f_2^+(0,\lambda) & 0 \\ -f_1^-(0,\lambda) & 0 & -f_3^+(0,\lambda) \\ -f_1^{-'}(0,\lambda) & f_2^{+'}(0,\lambda) & f_3^{+'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1^+(0,\lambda) & -f_2^+(0,\lambda) & 0 \\ f_1^+(0,\lambda) & 0 & -f_3^+(0,\lambda) \\ f_1^{+'}(0,\lambda) & f_2^{+'}(0,\lambda) & f_3^{+'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{[\,f_1^-(0,\lambda)\,f_2^+(0,\lambda)\,f_3^+(0,\lambda)]'}{[\,f_1^+(0,\lambda)\,f_2^+(0,\lambda)\,f_3^+(0,\lambda)]'}=-\frac{f_1^-(0,\lambda)}{f_1^+(0,\lambda)}+\frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\,f_1^+(0,\lambda)G(\lambda)}$$

$$T_{12}(\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} f_1^+(0,\lambda) & -f_1^-(0,\lambda) & 0 \\ f_1^+(0,\lambda) & -f_1^-(0,\lambda) & -f_3^+(0,\lambda) \\ f_1^{+'}(0,\lambda) & -f_1^{-'}(0,\lambda) & f_3^{+'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1^+(0,\lambda) & -f_2^+(0,\lambda) & 0 \\ f_1^+(0,\lambda) & 0 & -f_3^+(0,\lambda) \\ f_1^{+'}(0,\lambda) & f_2^{+'}(0,\lambda) & f_3^{+'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}=\frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\,f_2^+(0,\lambda)G(\lambda)}$$

$$T_{13}(\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} f_1^+(0,\lambda) & -f_2^+(0,\lambda) & -f_1^-(0,\lambda) \\ f_1^+(0,\lambda) & 0 & -f_1^-(0,\lambda) \\ f_1^{+'}(0,\lambda) & f_2^{+'}(0,\lambda) & -f_1^{-'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1^+(0,\lambda) & -f_2^+(0,\lambda) & 0 \\ f_1^+(0,\lambda) & 0 & -f_3^+(0,\lambda) \\ f_1^{+'}(0,\lambda) & f_2^{+'}(0,\lambda) & f_3^{+'}(0,\lambda) \end{vmatrix}}=\frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\,f_3^+(0,\lambda)G(\lambda)}$$

где

$$G(\lambda)=\frac{f_1^{+'}(0,\lambda)}{f_1^+(0,\lambda)}+\frac{f_2^{+'}(0,\lambda)}{f_2^+(0,\lambda)}+\frac{f_3^{+'}(0,\lambda)}{f_3^+(0,\lambda)}.$$

В 4.2 изучены свойства спектра оператора L_G. Доказана, что оператор L_G не имеет вещественного собственного значения.

Теорема 15. Собственные значения оператора L_G конечны и совпадают с нулями функции $\Delta(\lambda) = \det F(\lambda) = \left[f_1^+ \cdot f_2^+ \cdot f_3^+ \right]$ где

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1^+ & -f_2^+ & 0 \\ f_1^+ & 0 & -f_3^+ \\ f_1'^+ & -f_2'^+ & -f_3'^+ \end{pmatrix}$$

Теорема 16. Спектр оператора L_G состоит из непрерывного спектра, заполняющего ось $-\infty < \lambda < +\infty$, на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\pm n/2,\ n \in N..$

В 4.1.2 решается обратная спектральная задача на звездном графе. Обратная задача: Учитывая спектральные данные, коэффициенты отражения $R_{kk}(\lambda)$на каждом ребре N_k, построить потенциалы $p_k(x_k)$ и $q_k(x_k)$ где $k = 1,2,3.$

Теорема 17. В каждом фиксированном ребре $N_k,\ k = 1,2,3.$, $n \in N$, выполняется следующие отношения

$$\lim_{\lambda \to n/2} (n - 2\lambda) R_{kk}(\lambda) = V_{nn}^{(-k)},$$

$$\lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}} (n + 2\lambda) \frac{1}{R_{kk}(\lambda)} = V_{nn}^{(-k)}.$$

Показано, что

$$V_{m\alpha+m}^{(\pm k)} = V_{mm}^{(\pm k)} \left(V_{\alpha}^{(\mp k)} + \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{V_{n\alpha}^{(\mp k)}}{n+m} \right), m, \alpha = 1,2,3,\ldots$$

Эти соотношения являются фундаментальными уравнениями для восстановления $p_{nk}(x_k)$ и $q_{nk}(x_k)$ с помощью заданных чисел $V_{n\alpha}^{\pm k}, V_n^{\pm k}$.

Теорема 18. Все числа $V_{n\alpha}^{\pm k}, n > \alpha$ и $V_{n\alpha}^{(\mp k)}$ могут быть однозначно определены по известным числам $V_{nn}^{\pm k}$.

Теорема 19. Спецификация спектральных данных однозначно определяет потенциалы $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$ на каждом ребре N_k, $k = 1,2,3$.

В 4.2 рассматривается обратная спектральная задача для оператора Хилла на графе петле.

Рассмотрим некомпактный граф G, где полупрямая, присоединено к петле. Граф состоит из некомпактной части которая является ось $\gamma_0 = \{x | 0 < x < \infty\}$, компактная часть петля $\gamma_1 = \{z | 0 < x < 2\pi\}$, длина которой ради определённости берётся равным 2π и из $\gamma_2 = \{\{x = 0\} = \{z = 0\} = \{z = 2\pi\}\}$ соответствующий к точке прикрепления.

Мы будем исследовать спектральную задачу описывающее одномерное рассеивание квантовой частицы на графе G

$$-Y'' + \{q(X) - \lambda^2\}Y = 0, \quad X \in G \setminus \{\gamma_2\} \tag{42}$$

$$Y(x = 0) = Y(z = 0) = Y(z = 2\pi),$$

$$Y'(x = 0 + 0) + Y'(z = 0 + 0) - Y'(z = 2\pi - 0) = 0.$$

В (42) дифференцируемость относительно X понимается как дифференцируемость относительно x, если $X \in \gamma_0$ а дифференцируемость относительно z, когда $X \in \gamma_1$. На вершине графа дифференцируемость не определена. Мы предполагаем, что, потенциал $q(X)$ определен как

$$q(X) = \begin{cases} q_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n} e^{inx}, & X \in \gamma_0 \\ q_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} e^{inx}, & X \in \gamma_1 \end{cases}$$

с условием, что $\sum_{n=1}^{\infty}|q_{kn}| < \infty,\ k = 1,2;$ а λ является спектральным параметром.

Решение спектральной задачи (42) будем искать как

$$Y(X,\lambda) = \begin{cases} y(x,\lambda), & X \in \gamma_0 \\ u(z,\lambda), & X \in \gamma_1 \end{cases}$$

на некомпактном графе G при условии, что выполняются следующие условия.

1. $LY = \lambda^2 Y;$
2. $y(x,\lambda) = f(x,-\lambda) + R_{11}(\lambda) f(x,\lambda)$

где $R_{11}(\lambda)$ есть коэффициент отражение и

$$f(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty} V_{n\alpha}^{\gamma_0} e^{i\alpha x}\right)$$

при этом числа $V_{n\alpha}^{\gamma_0}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-n)V_{n\alpha}^{\gamma_0} + \sum\limits_{s=n}^{\alpha-1} q_{1\alpha-s} V_{ns}^{\gamma_0} = 0, \ 1 \le n \le \alpha \\ \alpha \sum\limits_{n=1}^{\alpha} V_{n\alpha}^{\gamma_0} + q_{1\alpha} = 0 \end{cases}$$

для которых ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha(\alpha-n)\left|V_{n\alpha}^{\gamma_0}\right|;\ \sum_{n=1}^{\alpha} n\left|V_{n\alpha}^{\gamma_0}\right|$$

сходятся. Заметим, что в нашем случае справедливо следующее отношение

$$\lim_{\lambda \to \mp\frac{n}{2}} (n \pm 2\lambda) f(x,\pm\lambda) = V_{nn}^{\gamma_0} f\left(x, \mp\frac{n}{2}\right)$$

Для того чтобы, построить решение $u(z,\lambda)$ на компактной части графа -γ_1 мы построим функцию Грина оператора на петле.

Функция Грина на петле может быт построена с помощью фундаментальных решений $\varphi(z,\lambda),\theta(z,\lambda)$ удовлетворяющие следующим условиям

$$\varphi(0,\lambda)=\theta'(0,\lambda)=1$$
$$\varphi'(0,\lambda)=\theta(0,\lambda)=0.$$

При этом граничными условиями для функции Грина на петле являются условия

$$\begin{cases} G(0,y,\lambda)=G(2\pi,y,\lambda) \\ G'(0,y,\lambda)=G'(2\pi,y,\lambda) \\ \lim_{z\to y+0} G(z,y,\lambda)=\lim_{z\to y-0} G(z,y,\lambda) \end{cases} \tag{43}$$

Функция, необходимая для построения решения спектральной задачи на петле имеет вид

$$G(z,0,\lambda)=G(z,\pi,\lambda)=\frac{\theta(\pi,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\varphi(z,\lambda)+$$
$$+\frac{1-\varphi(\pi,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\theta(z,\lambda).$$

Таким образом, мы можем искать решение спектральной задачи следующим образом

$$Y(X,\lambda)=\begin{cases} f(x-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(x,\lambda), & X\in\gamma_0 \\ \alpha\, G(z,0,\lambda), & X\in\gamma_1 \end{cases}$$

где α постоянная.

Тогда используя граничные условия (42) имеем

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=\alpha G(0,0,\lambda)=\alpha G(2\pi,0,\lambda)$$
$$f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)+\alpha[G'(0+0,0,\lambda)-G(0+0,0,\lambda)]=0.$$

Принимая во внимание условия (43) для функции Грина на петле имеем

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=\alpha G(0,0,\lambda)$$
$$f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,\lambda)=\alpha.$$

Таким образом

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=[f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)]G(0,0,\lambda)$$

или

$$G(0,0,\lambda)=\frac{f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)}{f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)},$$

а для коэффициента отражения имеем

$$R_{11}(\lambda)=\frac{\alpha-f'(0,-\lambda)}{f'(0,\lambda)}.$$

Основная идея решения обратной задачи для рассматриваемой системы сводится к решению двум независимым проблемам восстановления потенциала $q(x)=[q_1(x),q_2(z)]$ а именно, восстановление потенциалов $q_1(x),q_2(z)$ по отдельности на ребрах γ_0 и γ_1 соответственно. Так как коэффициенты $R_{11}(\lambda)$ можно найти, используя условия соответствия

$$y(0)=u(0)=u(2\pi)$$

и

$$y'(0+0)+u'(0+0)-u'(2\pi-0)=0$$

в центральной вершине, естественно сформулировать обратную задачу – восстановление потенциала $q(x)$ на некомпактном графе G по коэффициенту отражения, по множеству собственных значений задач Дирихле

$$\begin{cases}-u''(z,\lambda)+q_2(z)u(z,\lambda)=\lambda^2u(z,\lambda), \ z\in[0,2\pi]\\ \qquad u(0,\lambda)=u(2\pi,\lambda)=0\end{cases}$$

и Неймана

$$\begin{cases}-u''(x,\lambda)+q_2(z)u(z,\lambda)=\lambda^2u(z,\lambda), \ z\in[0,2\pi]\\ \qquad u(0,\lambda)=u'(\pi,\lambda)=0\end{cases}$$

Обратная задача: Учитывая спектральные данные: множество собственных значения задач Дирихле и Неймана, а также коэффициента отражения $R_{11}(\lambda)$, построить потенциал $q(X)=[q_1(x),q_2(z)]$ на графе петле.

Теорема 20. Спецификация спектральных данных однозначно определяет потенциал $q(X)$ на графепетле.

В 4.3 рассматривается обратная спектральная задача для оператора Дирака на звёздном графе.

Рассмотрим некомпактный граф G с единственной вершиной, в которой соединен конечное число рёбер $N_j = \lfloor o_j, \infty \rfloor$; $j = 1, 2, \ldots, n,$ где используется обозначение o_j, с индексом для обозначения начальной точки -й положительной полуоси.

Определим пространство $L_2(G) = \oplus_{j=1}^{n} L_2(N_j)$, со скалярным произведением

$$\left(f, g\right)_{L_2(G)} = \sum_{j=1}^{n} \left(f, g\right)_{L_2(G)}.$$

и рассмотрим оператор L_G

$$L_2(G) = \oplus_{j=1}^{n} L_j,$$

где

$$L_j \equiv B \frac{d}{dx_j} + \Omega_j(x_j),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j(x_j) = \begin{Vmatrix} p_j(x_j) & q_j(x_j) \\ q_j(x_j) & -p_j(x_j) \end{Vmatrix} \qquad (44)$$

в котором потенциалы имеют вид

$$p_j(x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jn} e^{inx_j}; \; q_j(x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{jn} e^{inx_j}, \; \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left| p_{jn} \right| + \left| q_{jn} \right| \right\} < \infty$$

с областью определения

$$D(L_G)=\left\{\begin{array}{c} y(x)\big| y_j(x), y_j'(x)\in AC[0,R]\ \text{для всех}\ R>0, \\ y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=\cdots=y_n(0), \\ y_1'(0)+y_2'(0)+y_3'(0)+\cdots+y_n'(0)=0, \\ y_j(x), y_j''(x)\in L_2(R^+), j=1,2,\ldots,n. \end{array}\right\}$$

Тогда задачу можно интерпретировать как исследование оператора

$$L_G=\bigoplus_{j-1}^{n} L_j,$$

на некомпактном графе.

Спектральная задача может быть описана следующим образом.

Найти вектор $y_j(x_j,\lambda)=\left(y_{j1}(x_1,\lambda), y_{j2}(x_2,\lambda), y_{j3}(x_3,\lambda)\right)$ где $y_{jk}(x_k,\lambda)$ есть решение уравнения Дирака

$$By_j'+\Omega_j(x_j)y_j=\lambda^2 y_j \tag{45}$$

на ребре $N_j=[o_j,\infty); j=1,2,\ldots n,$ для которых выполняются следующие условия:

1. y_j непрерывна в узлах графа, в частности, в нашем случае

$$y_{j1}(0)=y_{j2}(0)=y_{j3}(0)=\cdots=y_{jn}(0);$$

2. Сумма производных по всем ветвям, исходящих от узла, рассчитанная для каждого узла равна нулю

$$y_{j1}'(0)+y_{j2}'(0)+y_{j3}'(0)+\cdots+y_{jn}'(0)=0;$$

В качестве решения задачи мы будем понимать матрицу

$$Y(X,\lambda)=\left\|y_{jk}(x_k,\lambda)\right\|_{j,k=1,2,3}$$

на некомпактном графе на основе следующих условий.

1. $BY'+\Omega(X)Y=\lambda Y$
2. $y_{jk}(x_k,\lambda)=T_{jk}(\lambda)f_k(x_k,\lambda)$
3. $y_{jj}(x_j,\lambda)=\varphi_j(x_j,\lambda)+R_{jj}(\lambda)f_j(x_j,\lambda)$

где $\varphi_j(x_j,\lambda), f_j(x_j,\lambda)$ являются решениями Йоста на бесконечном ребре графа и определяются с помощью следующей теоремы.

Теорема 21. Пусть $\Omega_j(x_j)$ определена согласно (44). Тогда уравнение (45) имеет частные решения $\varphi_j(x_j,\lambda), f_j(x_j,\lambda)$ представимые в виде

$$f_j(x_j,\lambda)=\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\vartheta_{n\alpha}^{j}}{\frac{n}{2}+\lambda}e^{i\alpha x_j}\right)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda x_j}$$

$$\varphi_j(x_j,\lambda)=\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\vartheta_{n\alpha}^{j}}{\frac{n}{2}-\lambda}e^{i\alpha x_j}\right)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda x_j}$$

здесь $I=\begin{pmatrix}1\ 0\\0\ 1\end{pmatrix}$ и $\upsilon_{n\alpha}^{j}=\begin{pmatrix}\upsilon_{n\alpha}^{11j} & \upsilon_{n\alpha}^{12j}\\ \upsilon_{n\alpha}^{21j} & \upsilon_{n\alpha}^{22j}\end{pmatrix}$, где числа $\upsilon_{n\alpha}^{ikj}, i,k=1,2,$ $j=1,2,\ldots$ определяются с помощью рекуррентных соотношений, для которых сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\left|\vartheta_{n\alpha}^{ikj}\right|<\infty.$$

Рассматривается обратная задача восстановление дифференциального оператора на каждом ребре. А именно,

Обратная задача. Построить потенциалы $p_j(x_j)$ и $q_j(x_j)$ по заданном спектральным данным, коэффициентов отражения на каждом ребре $N_j,\ j=1,2,\ldots$.

Теорема 22. Спецификация спектральных данных однозначно определяют потенциалы $p_j(x_j)$ и $q_j(x_j)$ на каждом ребре $N_j,\ j=1,2,\ldots$.

На каждом ребре $N_j, j=1,2,\ldots$ выполняются следующие отношении

$$\lim_{\lambda \to \frac{n}{2}} (n-2\lambda) R_{jj}(\lambda) = S_{nj}^{+},$$

$$\lim_{\lambda \to \frac{n}{2}} (n+2\lambda) \frac{1}{R_{jj}(\lambda)} = S_{nj}^{-}.$$

Наконец используя формулы

$$\upsilon_{nn}^{11j} = -\upsilon_{nn}^{22j} = \frac{S_{nj}^{+} + S_{nj}^{-}}{2},$$

$$\upsilon_{nn}^{12j} = \upsilon_{nn}^{21j} = \frac{S_{nj}^{+} - S_{nj}^{-}}{2i}.$$

восстанавливаем потенциалы $p_j(x_j)$ и $q_j(x_j)$ по заданном спектральным данным, коэффициентов отражения $R_{jj}(\lambda)$ на каждом ребре $N_j, j=1,2,\ldots$

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованиям спектральных задач для пучка дифференциальных операторов с комплекснозначными периодическим потенциалом. Изучены обратные задачи для разного типа разрывных дифференциальных операторов с комплекснозначными периодическим потенциалом. Исследованы задачи рассеяния на квантовых графах.

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная последовательность комплексных чисел была набором спектральных данных операторного пучка второго порядка и для дифференциальных операторов высокого порядка.

- Решена прямая и обратная задача спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ с полиноминально входящим спектральным параметром. Показано, что спектр операторного пучка является непрерывным и заполняет лучи $\{k\omega_j : 0 \le k \le \infty, j = \overline{0.2m-1}\}$, где $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{n}\right)$, а на непрерывном спектре имеются спектральные особенности, которые совпадают с числами вида $\frac{n\omega_j}{2}, j = \overline{0.2m-1}, n = 1,2,3,\ldots$ По обобщённым нормировочным числам решена обратная задача восстановления коэффициентов.

- Решена обратная задача для оператора Шредингера со комплекснозначными периодическими потенциалами и разрывным коэффициентом на всей вещественной оси. Исследованы основные характеристики фундаментальных решений, изучен спектр оператора. Сформулирована обратная задача, доказана теорема единственности, предложена конструктивная процедура решения обратной задачи

- Классическая задача Хилла, с комплексным потенциалом распространена на звёздный и петлеобразный графы. Дано определение оператора Хилла на таких графах. Оператор определяется комплексными, периодическими потенциалами и используется специальные граничные условия, связывающие значения функций в вершинах. Дано явное описание вида резольвенты и точно описан спектр, решена обратная задача по коэффициентам отражения.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Эфендиев, Р.Ф. Существование операторов преобразования для дифференциальных уравнений, полиномиально зависящих от параметра//Труды конференции, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова, -Баку: -30-31 октября, -1997, -с.81-82.
2. Efendiev, R.F. To the spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic matrix coefficients. //-Baku: *Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, Academy of Science of Azerbaijan,* -2000, v.12(20), p.30-34.
3. Эфендиев, Р.Ф. К спектральному анализу обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра с периодическими матричными коэффициентами//Theory and Practice of Differential Equations, Mathematical Research, -Saint-Petersburg: - 2000, с.142-146.
4. Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка//The Third International Conference "Tools for mathematical modelling", -Saint-Petersburg, -18-23 june, -2001,-p.124.
5. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса дифференциальных операторов второго порядка//-Баку: Доклады НАН Азерб., -2001, v.57 № 4-6, -p.15-20.
6. Efendiev, R.F. Inverse problem for a class of second order differential operator//General Guide & Abstracts of Third Joint Seminar on Applied Mathematics, -Baku: Baku State Univers. & Zanjan Univers., -6-8 September -2002, -p.107.
7. Efendiev, R.F. Inverse problem for a class of ordinary differential operators with periodic coefficients // Conference on ILL-POSED and INVERSE PROBLEMS in honour of the 70-th anniversary of the birth of prof. M.M.Lavrent'ev,-Russia, Novosibirsk: -5-9 August, -2002, -p.

8. Эфендиев, Р.Ф. Необходимые и достаточные условия решения обратной задачи для операторных пучков с комплексными периодическими коэффициентами// Международ-ная научная конференция «Современные проблемы математики и механики, информатики» посв., 80-летию проф. Л.А.Толокон-никова, -Россия, Тула: -18-21 ноября -2003, -с.49-51
9. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса несамосопряженных опертаорных пучков с периодическими коэффициентами//»Функциональные пространства. Дифферен-циальные операторы. Проблемы математического образования», посв. 80-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева, -Москва: -2003, -с.247-249
10. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса операторов с комплексными периодическими коэффициентами//- Баку: Доклады НАН Азерб, -2004, №1-2, -р.39-43.
11. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодичес-кими коэффициентами//-Kharkov: Математическая физика, анализ и геометрия, -2004, т.11, №1, -с.114-121 **(Impact factor 0.424)**.
12. Эфендиев, Р.Ф. Об одной задаче характеризации для пучка операторов с комплексными периодическими коэффициентами //-Баку: Доклады НАН Азерб, -2005, №3, -р.6-11.
13. Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторных пучков с обобщенной функцией//-Москва: Теоретическая и математичес-кая физика, -2005, т.145, №1, -с. 102-107.
14. Èfendiev, R.F. Spectral analysis of a class of nonselfadjoint differential operator pencils with a generalized function//-Moscow: Theoretical and Mathematical Physics, -2005, v.145, №1, -p.1457–1461**(Impact factor 0.901)**.
15. Efendiev, R.F. Complete solution of an inverse problem for one class of the high order ordinary differential operators with periodic

coefficients//Journal of *Mathematical Physics Analysis* and Geometry, -2006, v.2, №1, -p.73-86. **(Impact factor 0.424)**.
16. Efendiev, R.F. Inverse wave scattering with discontinuous wave speed// International conference «Inverse and III-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to prof. M. M.Lavrent'ev on the occasion of his 75-th birthday, -Russia, Novosibirsk: -20-25 August, -2007, -1p.
17. Efendiev, R.F. The characterization problem for one class of second-order operator pencil with complex periodic coefficients//-Moscow: Moscow Mathematical Journal, -2007, v.7, №1, -p.55–65. **(Impact factor 0.746)**.
18. Efendiev, R.F, Inverse spectral problem for a differential operator with discontinuity wave speed//-Baku: Report of National Academy of Science Azerbaijan, -2008, №3, -p. 6-11.
19. Efendiev, R.F. An iterative algorithm for the solution of the discrete periodic optimal regulator problem/ F.A.Aliev, N.A.Safarova, A.Nachaoui, Y.S.Gasimov, R.F.Efendiev// -Baku: Report of National Academy of Science Azerbaijan, -2008, v. LXIV, № 6, –p.1-16.
20. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для дифференциального оператора второго порядка с разрывными коэффициентами// -Баку: Вестник Бакинского Государственного Университета, -2008, №4, -p.17-22.
21. Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint Hill operators with a step like Potentials //International conference on Functional Analysis dedicated to 90-th anniversary of V.E.Lyantse. - Lviv, Ukraine: -17-21 November, -2010, -p.37-38.
22. Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D. Inverse wave spectral problem with discontinuous wave speed, //-Ukraine: Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, -2010, v.6, №3, -p.255- 265. **(Impact factor 0.424)**.
23. Orucov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint Hill operators // -Baku: Journal of Qafqaz University, Mathem. and comp. sciences -2010, № 29, v.1, -p. 47-54.

24. Efendiev, R.F. Spectral analysis for one class of second-order indefinite nonselfadjoint differential operator pencil// Journal Applicable Analysis, -2011, v. 90, №12, -p.1837-1849. **(Impact factor 1.076)**.
25. Orucov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint hill operator with step-like potentials // -Baku: Journal of Qafqaz University, -2011, №31, -p. 8-15.
26. Efendiev, R.F. Wave propagation in a one-dimensional layered-inhomogeneous medium with a barrier// The 4-th Congress of the Turkic World Mathematics Society, -Baku, -1-3 July, -2011, -p.192
27. Orujov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of the wave equation in a one-dimensional layered inhomogeneous medium with barrier//-Baku: Journal of Qafqaz University, -2012, № 33,-p. 45-49.
28. Niftiyev, A.A., Efendiev, R.F., Alisheva, K.I. Variable domain eigenvalue problems for the Laplace operator with density //-Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, -ISSN: 2222-5498, -2012, v.2, №1, -p.
29. Niftiyev, A.A., Efendiev, R.F. Variable domain eigenvalue problems for the Laplace operator with density// International Journal of Nonlinear Science, -2013, v.16, №3, -p.280-288.
30. Оруджев, Г.Д., Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного несамосопряженного операторного пучка с разрывными коэффи-циентами//-Киев: Доклады НАН Украины, -2014, №4, -с. 25-32.
31. Efendiev R.F, Garcia-Raffi, Luis M. Spectral analysis of the complex hill operator on the star graph//-Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2014, v.40, special issue, -p.124–132.
32. Orudzhev, H.D., Efendiev, R.F. Recovering of the Hill operator by two spectra //-Baku: Journal of Qafqaz University, -2015, v.3, № 2, -p. 8-15.
33. Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D., Zaki, FA El-Raheem. Spectral analysis of wave propagation on branching strings//-London:

Boundary Value Problems, -2016, 215, -p.1-18 DOI: 10.1186/s13661-016-0723-3. **(Impact factor 1.637)**.
34. Efendiev, R.F. Spectral analysis of Hill operator on lasso shaped graph. // International conference on “Operators in Morrey-type spaces and applications” dedicated to 60-th birthday of prof. V.S.Guliyev, -Kirsehir-Turkey: 10-13, July -2017, -p.153. (OMTSA-2017).
35. Efendiev, R.F. Inverse spectral problem for hill operator on lasso graph//The 6-th international conference on control and optimization with Industrial Applications, -Baku: 11-13 July, -2018, -p.150-151.

Защита диссертации состоится **30 июня 2021 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04, действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **26 мая 2021** года.

Подписано в печать: 25.04.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 80000
Тираж: 70