AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

HİLBERT FƏZASINDA ÜÇ TƏRTİBLİ OPERATOR ƏMSALLI TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SONLU OBLASTDA BƏZİ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLL OLUNMASI

İxtisas: 1202.01- Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Səadət Bayram qızı Heydərova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2021

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir**.**

Elmi rəhbər: f.-r.e.d., professor **Sabir Sultanağa oğlu Mirzəyev**

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Həmidulla İsrafil oğlu Aslanov
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, dosent
Telman Benser oğlu Qasımov
riyaziyyat üzrə elmləri doktoru, professor
Nigar Məhər qızı Aslanova

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor

________________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r.e.n.

_______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor

_______________ **Bilal Telman oğlu Bilalov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işi Hilbert fəzasında operator əmsallı üç tərtibli tənliklər üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərinin həll olunmasına, uyğun operator dəstələrin və bircins tənliyin bəzi spektral məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Məlumdur ki, riyazi fizikanın, xüsusi törəməli diferensial tənliklərin, mexanikanın və s. bir sıra sərhəd məsələlərin tədqiqində operator-diferensial tənliklər üçün müxtəlif məsələlərin öyrənilməsi effektiv metodlardan biridir. Qeyd edək ki, E.Xille, R.Fillips, T.Kato və bir çox riyaziyyatçıların işlərindən başlayaraq bir tərtibli ikihədli tənliklər üçün Koşi məsələsi tədqiq olunmuşdur. Bundan sonra isə ikitərtibli ikihədli tənliklər üçün Koşi məsələsi və sərhəd məsələləri tədqiq edilmişdir. Alınan nəticələrin bir qismi E.Xille və R.Fillipsin, S.Q.Kreyn, V.T.Qorbaçuk və M.L.Qorbaçukun, S.Y.Yakubov və Y.S.Yakubovun və digər müəlliflərin monoqrafiyalarında öz əksini tapmışdır.

Sonralar operator-diferensial tənliklərin həll olunması sonsuz oblastlarda tədqiq edilmişdir. Bunlara nümunə M.G.Qasımovun, Y.A.Dubinskinin, A.G.Kostyuçenkonun, A.A.Şkalikovun, H.İ.Aslanovun, A.R.Əliyevin, M.Bayramoğlunun və s. işlərini göstərmək olar. Burada S.S.Mirzəyevin işlərini ayrıca qeyd edək, belə ki müxtəlif sərhəd məsələlərinin həll olunması üçün effektif metod tapılmışdır. Qeyd etmək lazımdır ki, bu metod sonlu oblastda sərhəd məsələlərinə tətbiq oluna bilmir. Bu səbəbdən də müxtəlif metodlarla yalnız bəzi tam ikitərtibli operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həll olma şərtləri öyrənilmişdir. Bu işlərə S.S.Mirzəyev, G.A.Ağayevanın, M.Y.Səlimovun işlərini aid etmək olar. Tam tənliklərin həllolma şərtlərinin tapılması üçün aralıq törəmə operatorlarının qiymətləndirilməsi zəruridir. Təəsüf ki, sonlu parçada belə dəqiq qiymətləndirmələr almaq hələ məlum deyil.

Qeyd edək ki, sonlu parçada üç tərtibli ikihədli operator-diferensial tənliklər üçün bir sərhəd məsələsinə, bizə məlum olduğuna görə, yalnız E.Obrechtin işində baxılmışdır, tam operator-diferensial tənliklər üçün isə sərhəd məsələləri tədqiq edilməmişdir.

Bu işdə sonlu parçada aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilir və onların köməyi ilə üçtərtibli tam sərhəd məsələləri üçün bəzi sərhəd məsələlərinin həl olma şərtləri tapılır.

Operator-diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri bircins tənliyin həllinin Furye metodu ilə həll olma bölməsinin əsaslandırılmasıdır. Bu isə öz növbəsində elementar həllərin requlyar həllər fəzasında tamlığını göstərməyə gəlir. Elementar həllərin tamlığını almaq üçün isə uyğun üç tərtibli operator dəstənin bəzi spektral xassələrinin öyrənilməsi, daha dəqiq desək məxsusi və qoşma vektorları sisteminin requlyar həllərinin izləri fəzasında üç qat tamlığını göstərmək lazımdır. Buna görə də operator dəstələrin spektral nəzəriyyəsi müasir funksional analizin sürətlə inkişaf edən sahəsidir. Biz burada M.V.Keldışın, M.G.Qasımovun, A.A.Şkalikovun, Q.V.Radziyevskinin, S.S.Mirzəyevin və digərlərinin işlərini göstərə bilərik.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Üç tərtibli operator-diferensial tənliklərin sonlu parçada həll olunması şərtlərinin tapılması. Sərhəd məsələlərinin Fredholm operator törətməsinin tədqiqi. Operator-diferensial tənliklərə uyğun operator dəstələrin məxsusi və qoşma elementlərinin üçqat tamlığının tədqiqi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

1. Üç tərtibli operator-diferensial tənliklər üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərininm həll olması haqqında yeni teoremlərin alınması.

2. Üç tərtibli operator dəstələrin rezolventasının analitik xassələrinin öyrənilməsi və requlyar həllərin izlər fəzasında məxsusi və qoşma vektorların üçqat tamlığı haqqında teoremlərin alınması.

3. Bircins tənliyin elementar həllər sisteminin uyğun sərhəd məsələsinin requlyar həllər fəzasında tamlığı haqqında yeni teoremlərin alınması.

Tədqiqatın metodları. İşdə qeyri məhdud operatorlar nəzəriyyəsinin, məhdud operatorların yarımqruplar nəzəriyyəsinin, Hilbert fəzasında tam funksiyalar nəzəriyyəsinin, operator-funksiyalar nəzəriyyəsinin, diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Sonlu parçada üçüncü tərtib tam operator-diferensial tənliklər üçün müxtəlif sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunma şərtləri tapılmışdır. Bu şərtlər sərhəd məsələsinə uyğun Sobolev fəzalarında aralıq törəmələrin diferensial tənliyin baş hissəsi vasitəsilə qiymətləndirilməsindən alınır. Tam operator-diferensial tənliyin nisbi tamam kəsilməz əmsallı həyəcanlanmasından alınan diferensial tənliyə uyğun fəzalarda Fredholmluğu isbat edilmişdir. Operator-diferensial tənliklərə uyğun operator dəstələrin məxsusi və qoşma elementlərinin üçqat tamlığı tədqiq edilmişdir. Bunun üçün əvvəlcə rezolventanın müəyyən oxlar üzrə qiymətləndirilməsi aparılmış və bu qiymətləndirmələr bircins tənliyin requlyar həllinin varlığı ilə əlaqələndirilmiş və uyğun tamlıq teoremləri isbat olunmuşdur. Bundan başqa işdə bircins tənliyin requlyar həllərinin daxili kompaktlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

1. Üç tərtibli tam operator diferensial tənliklər üçün sonlu parçada bəzi sərhəd məsələlərinin requlyar və fredholm həll olunması haqqında yeni teoremlər isbat edilmişdir.
2. Sonlu intervalda Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmələrin normaları qiymətləndirilmişdir.
3. Sərhəd məsələlərinin həl olma şərtləri ilə sonlu oblastda aralıq törəmə operatorlarının normaları arasında əlaqə tapılmışdır.
4. Üç tərtibli operator dəstələrin bütün məxsusi və qoşma vektorlarının requlyar həllərinin izlər fəzasında üçqat tamlığı haqqında yeni teoremlər isbat edilmişdir.
5. Bircins tənlik üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərinin həll olunması tədqiq olunmuş və bircins tənliyin elementar həllər sisteminin sərhəd məsələsinin requlyar həllər fəzasında tamlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınan işlər nəzəri xarakter daşıyır, ancaq alınan nəticələr xüsusi törəməli diferensial tənliklərin, riyazi fizikanın və mexanikanın bəzi məsələlərində tətbiq edilə bilər.

Aprobasiya və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas nəticələri AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Funksional analiz", "Qeyri harmonik analiz” şöbələrində, Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” və “Diferensial və inteqral tənliklər” kafedralarında, həmçinin “Riyazi analiz, diferensial tənliklər və onların tətbiqləri” adlı Beynəlxalq konfransda, 2015 (Bakı), Yəhya Məmmədovun 80 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda, 2015 (Bakı), “Qeyri harmonik analiz və diferensial tənliklər” adlı Beynəlxalq konfransda, 2016 (Bakı), akademik A.C.Hacıyevin 80 illiyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransda, 2017 (Bakı) məruzə olunmuşdur.

İddiaçının şəxsi töhvəsi. Dissertasiyada alınan bütün nəticələr və tədqiqat üsulları iddiaçıya məxsusdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu.

Nəşrlər. Dissertasiya işinin nəticələri iddiaçının AAK-ın tövsiyə etdiyi elmi nəşrlərdə çap etdirdiyi 7 elmi məqaləsində öz əksini tapmışdır. Bu məqalələrdən 4-ü həmmüəllifsizdir. Bundan əlavə dissertasiya işində alınan nəticələr beynəlxalq səviyyəli 3 və respublika səviyyəli 2 elmi konfransda tezis şəklində öz əksini tapmışdı. Onlardan 1-i xaricdə dərc olunmuşdur.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, iki fəsildən (titul səhifəsi – 413 işarə, mündəricat – 1497 işarə, giriş 40000 işarə, birinci fəsil – 140000 işarə, ikinci fəsil – 92.000 işarə) və 49 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşinin ümumi həcmi – 273910 işarədir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiyanın girişində onun aktuallığı əsaslandırılır, dissertasiyanın məzmununa aid işlər, qoyulan məsələlər və onların qısa şərhi verilir.

Tutaq ki, H seperabel Hilbert fəzasıdır, A- isə öz-özünə qoşma müsbət operatordur. Məlumdur ki, A^{γ} $(\gamma \geq 0)$ operatorunun təyin oblastı $D(A^{\gamma})$, $(x, y)_{\gamma} = (A_x^{\gamma}, A_y^{\gamma})$. $x, y \in D(A^{\gamma})$ skalyar hasilinə görə Hilbert fəzasına çevrilir. $\gamma = 0$ olduqda hesab edirik ki, $H_0 = H$.

Tutaq ki, $-\infty \le a < b \le +\infty$. $L_2((a,b);H)$ ilə (a,b) -də sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri H -da olan bütün $f(t)$ vektor-funksiyalarının Hilbert fəzasını işarə edək, belə ki,

$$\| f(t)\|_{L_2((a,b):H)} = \left(\int_a^b \| f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty .$$

Tutaq ki, $n = 1,2,...$. Aşağıdakı Hilbert fəzasını təyin edək

$$W_2^n((a,b);H) = \{u : A^n u \in L_2((a,b);H),\ u^{(n)} \in L_2((a,b);H)\}.$$

Burada norma

$$\| u \|_{W_2^n((a,b);H)} = \left(\left\| A^n u \right\|^2_{L_2((a,b);H)} + \left\| u^{(n)} \right\|^2_{L_2((a,b);H)} \right)^{1/2}$$

kimi təyin olunur.

Burada və gələcəkdə bütün törəmələr abstract fəzalarda ümumiləşmiş törəmə mənasında başa düşülür.

$a = -\infty,\ b = +\infty$, yəni $R = (-\infty,+\infty)$ olduqda $L_2((-\infty,+\infty);H) = = L_2(R;H)$ kimi, $W_2^n((-\infty,\infty);H) = W_2^n(R;H)$ kimi işarə ederik.

$n = 3$ olduqda $W_2^3((0,1);H)$ -in aşağıdakı alt fəzalarını təyin edək

$$W_2^3((0,1);H;\{0,1\},2) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H),\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0, u''(1) = 0\},$$

$$W_2^3((0,1);H;\{0\},1,2) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H),\ u(0) = 0, u'(1) = 0, u''(1) = 0\},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^3((0,1);H) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H),\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1) = 0,\ k = \overline{0,2}\},$$

və istənilən həqiqi α ədədi üçün

$$W_{2,\alpha}^3((0,1);H) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H),\ u^{(k)}(0) = = e^{i\alpha} u^{(k)}(1),\ k = \overline{0,2}\}.$$

Əvvəlcə

$$P(d/dt)u(t) = \frac{d^3u(t)}{dt^3} - A^3u(t) + \atop + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j}u^{(j)}(t) = f(t),\ t \in (0,1) \tag{1}$$

$$u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u''(1) = 0 \tag{2}$$

məsələsi tədqiq olunur. Burada $f(t), u(t)$ vektor-funksiyaları (0,1) intervalında sanki hər yerdə təyin olunmuş, qiymətləri isə H -dandır, operator əmsallar isə aşağıdakı şərtləri ödəyir

1) A - öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur;

2) $B_j = A_j A^{-j}$ $(j = \overline{0,3})$ operatorları H -da məhduddur.

Tərif 1. İstənilən $f(t) \in L_2((0,1);H)$ üçün elə $u(t) \in W_2^3((0,1);H)$ vektor-funksiyası varsa ki, o (1) tənliyini (0,1)-də sanki hər yerdə ödəyir, (2) sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t \to +0} \|u(t)\|_{\frac{5}{2}} = 0,\ \lim_{t \to +0} \|u'(t)\|_{\frac{3}{2}} = 0,\ \lim_{t \to +0} \|u''(1-t)\|_{\frac{1}{2}} = 0$$

yığılması mənada ödəyir və $\|u\|_{W_2^3((0,1);H)} \le const \|f\|_{L_2((0,1);H)}$ qiymətləndirilməsi doğrudursa, onda (1),(2) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

Əvvəlcə

$$P_0(d/dt)u(t) = \frac{d^3u(t)}{dt^3} - A^3u(t) = f(t),\ t \in (0,1), \tag{3}$$

$$u(0) = 0,\ u'(0) = 0,\ u''(1) = 0 \tag{4}$$

məsələsinin requlyarlığı tədqiq olunur.

Aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 1. Tutaq ki, 1) şərti ödənir. Onda operator P_0, beləki, $P_0 u = u'''(t) - A^3u(t)$, $W_2^3((0,1);H;(\{0,1\},2))$ fəzasını $L_2(0,1);H)$ fəzasına izomorf inikas etdirir.

Buradan alınır ki, (3),(4) sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır və $W_2^3((0,1);H;(\{0,1\},2))$ fəzasında $\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)}$ norması ilə $\|u\|_{W_2^3((0,1);H)}$ norması ekvivalentdir. Onda aralıq törəmələr haqqında teoremə görə

$$N_k(\{0,1\},2)=$$

$$=\sup_{0\neq u\in W_2^3((0,1);H;(\{0,1\},2))}\left\|A^{3-k}u^{(k)}\right\|_{L_2((0,1);H)}\cdot\left\|P_0u\right\|^{-1}_{L_2((0,1);H)},\quad k=\overline{0,3}$$

normaları sonludur. Əvvəlcə bu normalar qiymətləndirilir və (1),(2) məsələsinin həll olunması ilə əlaqələndirilir.

Aşağıdakı teoremlər doğrudur.

Teorem 2. $N_k(\{0,1\},2)$ ($k=\overline{0,3}$) normaları üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur

$$N_k(\{0,1\},2)\le c_k,\quad k=\overline{0,3},$$

belə ki, $c_0=c_3=1,\ c_1=2\cdot 3^{-1/2}$, $c_2=2^{1/2}\cdot 3^{-1/4}$.

Teorem 3. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənir və

$$\gamma=\sum_{j=0}^{3}c_j\left\|B_{3-j}\right\|<1,\ (B_j=A_jA^{-j},\ j=\overline{0,3})$$

bərabərliyi ödənir. Burada $c_0=c_3=1,\ c_1=2\cdot 3^{-1/2}$, $c_2=2^{1/2}\cdot 3^{-1/4}$. Onda (1), (2) məsələsi requlyar həll olunandır.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 1. Tutaq ki, teorem 3-ün bütün şərtləri ödənir. Onda

$$\frac{d^3u}{dt^3}+A^3u(t)+\sum_{j=0}^{3}A_{3-j}u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in(0,1), \tag{5}$$

$$u''(0)=0, u(1)=0,\ u'(1)=0 \tag{6}$$

məsələsi requlyar həll olunandır.

Qeyd edək ki, (5),(6) məsələsinin requlyarlığının həll olunması tərifi (1),(2) məsələsinin requlyar həll olunmasına analoji tərif edilir.

Bundan sonra

$$L(d/dt)u(t)=\frac{d^3u}{dt^3}-A^3u(t)+\sum_{j=0}^{2}(A_{3-j}+T_{3-j})u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in(0,t), \tag{7}$$

$$u(0)=0,\ u'(0)=0,\ u''(1)=0 \tag{8}$$

məsələsinin fredholm həll olunması araşdırılır.

$W_2^3((0,1);H;\{0,1\},2)$ fəzasında $Lu = L(d/dt)u(t)$, $u \in W_2^3((0,1);H;\{0,1\},2)$ kimi L operatoru təyin edək.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 4. Tutaq ki, A öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur, tamam kəsilməz A^{-1} tərsə malikdir. $B_j = A_j A^{-j}$ $(j=\overline{1,3})$ operatorları H -da məhduddur, $T_j A^{-j}$ $(j=\overline{1,3})$ tamam kəsilməz operatorlardır və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$q' = \sum_{j=0}^{2} c_j \left\| B_{3-j} \right\| < 1,$$

belə ki, $c_0 = 1,\ c_1 = 2\cdot 3^{-1/2}$, $c_2 = 2^{1/2}\cdot 3^{-1/4}$. Onda L operatoru $W_2^3((0,1);H;(\{0,1\},2))$ fəzasından $L_2\big((0,1);H\big)$ fəzasına təsir edən Fredholm operatorudur.

Qeyd edək ki, bu teoremin analoqu (5),(6) məsələsi üçün də doğrudur.

Daha sonra

$$P(d/dt)u(t) = \frac{d^3u(t)}{dt^3} + A^3u(t) + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j}u^{(j)}(t) = f(t),\ t \in (0,1), \quad (9)$$

$$u(0)=0,\ u'(1)=0,\ u''(1)=0 \quad (10)$$

məsələsinin requlyar həll olunması tədqiq olunur.

Tərif 2. İstənilən $f(t) \in L_2((0,1);H)$ üçün elə $u(t) \in W_2^3((0,1);H)$ vektor-funksiyası varsa ki, o, (9) tənliyini (0,1)-də sanki hər yerdə ödəyir, (10) sərhəd şərtlərini isə

$$\lim_{t\to+0}\left\|u(t)\right\|_{\frac{5}{2}} = 0,\ \lim_{t\to+0}\left\|u'(1-t)\right\|_{\frac{3}{2}} = 0,\ \lim_{t\to+0}\left\|u''(1-t)\right\|_{\frac{1}{2}} = 0$$

yığılması mənada ödəyir və $\| u \|_{W_2^3((0,1);H)} \le const \| f \|_{L_2((0,1);H)}$ qiymətləndirilməsi doğrudursa, onda (9),(10) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

Burada (9),(10) məsələsinə uyğun

$$W_2^3((0,1);H;\{0\},1,2)=\{u:u\in W_2^3((0,1);H),u(0)=0,u'(1)=0,u''(1)=0\}$$
fəzası daxil edilir və bu fəzada
$$P_0u=\frac{d^3u}{dt^3}+A^3u\,,\ u\in W_2^3((0,1);H;(\{0\},1,2))$$
operatoru təyin edilir və aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 5. P_0 operatoru $W_2^3((0,1);H;(\{0\},1,2))$ fəzasını $L_2((0,1);H)$ fəzasına izomorf inikas etdirir.

Buradan alırıq ki,
$$N_k(\{0\},1,2)=\sup_{0\neq u\in W_2^3((0,1);H;(\{0\},1,2))}\left\|A^{3-k}u^{(k)}\right\|_{L_2((0,1);H)}\cdot\left\|P_0u\right\|_{L_2((0,1);H)}^{-1},$$
$(k=\overline{0,3})$ normaları sonludur.

Aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 6. $N_k(\{0\},1,2)$ normaları üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur
$$N_k(\{0\},1,2)\le\tilde{c}_k\,,\quad k=\overline{0,3}\,,$$
belə ki, $\tilde{c}_0=\tilde{c}_3=1,\ \tilde{c}_1=2^{2/3}\cdot3^{-1/2}$, $\tilde{c}_2=2\cdot3^{-1/2}$.

Bu qiymətləndirmələri istifadə etməklə (9),(10) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında aşağıdakı teorem isbat olunur.

Teorem 7. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənir və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur
$$\gamma=\sum_{j=0}^{3}\tilde{c}_j\left\|B_{3-j}\right\|<1,$$
belə ki, $\tilde{c}_0=\tilde{c}_3=1,\ \tilde{c}_1=2^{2/3}\cdot3^{-1/2}$, $\tilde{c}_2=2\cdot3^{-1/2}$. Onda (9),(10) məsələsi requlyar həll olunandır.

Buradan aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 2. Tutaq ki, teorem 7-nin bütün şərtləri ödənir. Onda
$$\frac{d^3u}{dt^3}-A^3u(t)+\sum_{j=0}^{3}A_{3-j}u^{(j)}(t)=f(t),\ t\in(0,1)\,,\tag{11}$$

$$u'(0)=0, u''(0)=0, u(1)=0, \tag{12}$$
məsələsi requlyar həll olunandır.

Bundan sonra $W_2^3((0,1);H;(\{0\},1,2))$ fəzasında aşağıdakı kimi L operatoru təyin olunar: $Lu = L(d/dt)u(t)$, harada ki,

$$L(d/dt)u(t) = \frac{d^3u}{dt^3} + A^3u + \sum_{j=0}^{2}(A_{3-j} + T_{3-j})u^{(j)}(t) \cdot$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 8. Tutaq ki, 1),2) şərtləri ödənir, A^{-1} tamam kəsilməzdir $T_j A^{-1}$ $(j=\overline{1,3})$ operatorları H-da tamam kəsilməzdirlər və

$$\gamma' = \sum_{j=0}^{2} \tilde{c}_j \left\| B_{3-j} \right\| < 1,$$

belə ki, $\tilde{c}_0 = 1$, $\tilde{c}_1 = 2^{2/3} \cdot 3^{-1/2}$, $\tilde{c}_2 = 2 \cdot 3^{-1/2}$. Onda L operatoru $W_2^3((0,1);H;\ (\{0\},1,2))$ fəzasından $L_2((0,1);H)$ fəzasına təsir edən Fredholm operatorudur.

Daha sonra periodik tip məsələ tədqiq olunur. Belə bir məsələyə baxaq

$$\frac{d^3u(t)}{dt^3} + A^3u(t) + \sum_{j=0}^{3} A_{3-j} u^{(j)}(t) = f(t),\ t \in (0,1), \tag{13}$$

$$u^{(k)}(0) = e^{i\alpha}u^{(k)}(1),\ k = \overline{0,2},\ \ \alpha \in R = (-\infty, \infty). \tag{14}$$

Qeyd edək ki, $\alpha = 2\pi k,\ k \in Z$ olduqda biz periodik məsələ, $\alpha = \pi(2k+1),\ k \in Z$ olduqda isə antiperiodik məsələ alırıq.

Tərif 3. İstənilən $f(t) \in L_2((0,1);H)$ üçün elə $u(t) \in W_2^3((0,1);H)$ vektor-funksiyası varsa ki, o (13) tənliyini sanki hər yerdə (0,1)-də ödəyir, (14) sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t \to +0} \left\| u^{(k)} - e^{i\alpha}u^{(k)}(1-t) \right\|_{3-k-\frac{1}{2}} = 0,\ \ k = \overline{0,2}$$

yığılması mənasında ödəyir və $\| u \|_{W_2^3((0,1);H)} \le const \| f \|_{L_2((0,1);H)}$ qiymətləndirilməsi doğrudursa onda (13),(14) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

$$W_{2,\alpha}^3((0,1);H) = \{u : u \in W_2^3((0,1);H), u^{(k)}(0) = e^{i\alpha} u^{(k)}(1),\ k = \overline{0,2}\}$$

fəzasında

$$P_0 u = \frac{d^3 u}{dt^3} + A^3 u$$

operatoruna baxaq.

Əvvəlcə aşağıdakı lemma isbat olunur.

Lemma 1. İstənilən $u \in W_{2,\alpha}^3((0,1);H)$ üçün

$$\| P_0 u \|_{L_2((0,1);H)} = \| u \|_{W_2^3((0,1);H)}$$

bərabərliyi doğrudur.

Bu lemmadan istifadə edərək teorem isbat olunur:

Teorem 9. $P_0 : W_{2,\alpha}^2((0,1);H) \to L_2((0,1);H)$ operatoru izomorfizmdır.

Bu teoremdən istifadə edərək aralıq törəmə operatorlarının normaları

$$N_{k,\alpha} = \sup_{0 \ne u \in W_{2,\alpha}^3((0,1);H)} \left\| A^{3-k} u^{(k)} \right\|_{L_2((0,1);H)} \cdot \| P_0 u \|_{L_2((0,1);H)}^{-1},$$

$k = \overline{0,2}$ qiymətləndirilir. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 10. $N_{k,\alpha}$ normaları aşağıdakı qiymətləndirmələri ödəyirlər:

$$N_{k,\alpha} \le p_k, \quad k = \overline{0,3},$$

belə ki, $p_0 = p_3 = 1,\ p_1 = p_2 = 2^{1/3} \cdot 3^{-1/2}$.

Bu qiymətləndirmələr (13),(14) məsələsinin həll olma şərtləri ilə belə əlaqələndirilir.

Teorem 11. Tutaq ki, 1), 2) şərtləri ödənir və

$$\beta = \sum_{j=0}^{3} p_j \left\| B_{3-j} \right\| < 1,$$

belə ki, p_j $(j = \overline{0,3})$ ədədləri teorem 10-dan müəyyən olunur. Onda (13), (14) məsələsi requlyar həll olunandır.

Bu teoremdən alınır ki, teorem 11-in şərtləri ödəndikdə periodik və antiperiodik məsələlər də requlyar həll olunandır. Daha sonra, göstərilir ki, nisbi kompakt həyacanlanma olduqda, uyğun məsələ fredholm tipdir.

Dissertasiyanın ikinci fəsli

$$P(\lambda) = \lambda^3 E - A^3 + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3 \qquad (15)$$

operator dəstəsinin rezolventasının analitik xassələrinin öyrənilməsinə, spektrin strukturunun müəyyən edilməsinə, bircins tənlik üçün sərhəd məsələlərinin requlyar həll olunmasına, (15) operator dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorlar sisteminin, requlyar həllərin izlər fəzasında üç qat tamlığına, habelə və

$$P(d/dt)u(t) = \frac{d^3u}{dt^3} - A^3 u(t) + A_1 \frac{d^2u}{dt^2} + A_2 \frac{du}{dt} + A^3 u = 0, \ t \in (0,1) \qquad (16)$$

bircins tənliyinin elementar həllərinin bəzi sərhəd məsələsinin requlyar həllər fəzasında tamlığının isbatına həsr olunmuşdur.

Tutaq ki, C - kompleks müstəvidir. Əgər $\lambda \in C$ üçün $P^{-1}(\lambda)$ varsa, məhduddursa və bütün fəzada təyin olunubsa, onda λ nöqtəsi $P(\lambda)$-nın requlyar nöqtəsi adlanır. Requlyar nöqtələr $\rho(P(\lambda))$ kimi işarə edilir. $C\ \rho(P(\lambda))$ çoxluğu isə $P(\lambda)$-nın spektri adlanır. Belə ki, $P^{-1}(\lambda)$ funksiyası $P(\lambda)$-nın rezolventası adlanır.

Tərif 4. Əgər $0 \neq x_{i,j,0} \in H_3$, $P(\lambda_i)x_{i,j,0} = 0$ tənliyini ödəyirsə, onda λ_i nöqtəsi $P(\lambda)$-nın məxsusi nöqtəsi, $x_{i,j,0}$ isə $P(\lambda)$-nın λ_i-yə uyğun məxsusi vektoru adlanır. Əgər $\{x_{i,j,0},\dots,x_{i,j,m_{ij}}\}$ sistemi

$$P(\lambda_i)x_{i,j,0} = 0, \qquad (x_{i,j,0} \neq 0),$$

$$P(\lambda_i)x_{i,j,1} + P'(\lambda_i)x_{i,j,0} = 0,$$

. . . .

$$P(\lambda_i)x_{i,j,m_{ij}}+P'(\lambda_i)x_{i,j,m_{ij}-1}+\frac{P''(\lambda_i)}{2!}x_{i,j,m_{ij}-2}+\frac{1}{3!}x_{i,j,m_{ij}-3}=0$$

tənliklərini ödəyirsə, onda bu sistemə $P(\lambda)$ -nın λ_i -yə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sistemi deyilir.

Tərif 5. Tutaq ki, $\{x_{i,j,h}\}$, $j=\overline{1,q_i}$, $h=\overline{0,m_{i,j}}$ $P(\lambda)$ -nın λ_i -yə uyğun məxsusi və qoşma elementlər sistemidir. Onda

$$u_{i,j,h}(t)=e^{\lambda_i t}\left(\frac{t^h}{h!}x_{i,j,0}+\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}x_{i,j,1}+...+x_{i,j,h}\right),\ h=\overline{0,m_{ij}}$$

vektor-funksiyaları $P(d/dt)u(t)=0$ tənliyini ödəyirlər və (16) bircins tənliyin elementar həlləri adlanırlar.

Əvvəlcə $P(\lambda)$ -nın əmsallarının müəyyən şərtləri daxilində $P(\lambda)$ -nın spektrinin diskretliyi isbat olunur. Daha dəqiq desək, əgər

$1'$) A - öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operator olub A^{-1} tamam kəsilməz tərsə malikdir;

$2'$) operatorlar $B_j=A_jA^{-j}$ $(j=1,2,3)$ H fəzasında məhduddurlar;

$3'$) $E+B_3$ operatoru H -da məhdud tərsə malikdir, və o bütün fəzada təyin olub.

Onda $P(\lambda)$ operator dəstəsi yalnız diskret spektrə malikdir, yəni bütün spektr sonlu təkrarlanmaya malik məxsusi ədədlərdən ibarətdir və onların yeganə limit nöqtəsi sonsuzluqdadır.

$H_{5/2}\times H_{3/2}\times H_{1/2}$ izlər fəzasında

$$K_0=\{u_{i,j,h}(0),u'_{i,j,h}(0),u''_{i,j,h}(1)\}_{i=1}^{\infty},\ j=\overline{1,q_i},\ h=\overline{0,m_{ij}}$$

sisteminə baxaq. Aydındır ki, K_0 sistemi

$$P(d/dt)u=\frac{d^3u(t)}{dt^3}-A^3u(t)+\sum_{j=0}^{2}A_{3-j}\frac{d^ju^{(j)}}{dt^j}=0,\ t\in(0,1), \tag{17}$$

$$u(0)=\varphi_0,\ u'(0)=\varphi_1,\ u''(1)=\varphi_2. \tag{18}$$

sərhəd məsələsinə uyğun sistemdir

Tərif 6. Əgər K_0 sistemi $H_{5/2}\times H_{3/2}\times H_{1/2}$ fəzasında tamdırsa, onda deyəcəyik ki, $P(\lambda)$ dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorları sistemi requlyar həllərin izlər fəzasında üç qat tamdır.

Əvvəlcə isbat edilir ki, $1')$-$3')$ şərtləri ödəndikdə məxsusi və qoşma elementlər sisteminin izlər fəzasında üçqat tam sistem əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi şərt $\varphi\in H_{5/2},\psi\in H_{3/2},æ\in H_{1/2}$ faktorları üçün

$$R(\lambda)=(A^{5/2}P^{-1}(\overline{\lambda}))^{*}A^{5/2}\varphi+\lambda(A^{3/2}P^{-1}(\overline{\lambda}))^{*}A^{3/2}\psi+$$
$$+\lambda^2e^{\lambda}(A^{1/2}P^{-1}(\overline{\lambda}))A^{1/2}æ$$

vektor-funksiyasının bütün C müstəfisində holomorfluğundan $\varphi=\psi=æ=0$ alınmasıdır.

Aşağıdakı lemma doğrudur.

Lemma 2. Tutaq ki, $1')$ və $2')$ şərtləri ödənir. Əgər

$$2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}\left(\|B_1\|+\|B_2\|\right)+\|B_3\|<1,$$

bərabərsizliyi ödənərsə, onda xəyali ox özərində $P^{-1}(\lambda)$ var və orada

$$|\lambda|^{3-\beta}\left\|A^{\beta}P^{-1}(\lambda)\right\|\le const,\ \ \beta\in[0,3]$$

Daha sonra göstərilir ki, bu lemmanın hökmü tənböləni xəyali ox olan çox kiçik sektorların daxilində də doğrudur.

Daha sonra isə aşağıdakı vacib lemma isbat olunur.

Lemma 3. Tutaq ki, $0<\alpha<\pi/6$, 1), 2) şərtləri ödənir və

$$\sum_{j=0}^{2}d_{3,j}\left\|B_{3-j}\right\|<\sqrt{2}\sin\frac{3\alpha}{2},$$

belə ki, $d_{3,3}=1,\ d_{3,1}=d_{3,2}=2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}$. Onda $\Gamma_{\alpha}=\{\lambda:\arg\lambda=\alpha\}$ şuaları üzərində $P^{-1}(\lambda)$ rezolventası var və bu şualar üzərində

$$|\lambda|^{\beta}\left\|A^{3-\beta}P^{-1}(\lambda)\right\|\le const,\ \ \beta\in[0,3]$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Daha sonra isə (17),(18) məsələsinin requlyarlığı tədqiq olunur.

Tərif 7. Əgər istənilən $\varphi_0 \in H_{5/2}, \varphi_1 \in H_{3/2}, \varphi_2 \in H_{1/2}$ üçün (16) tənliyinin requlyar həlli varsa və o sərhəd şərtlərini

$$\lim_{t\to+0}\left\|u(t)-\varphi_0\right\|_{5/2}=0,\ \lim_{t\to+0}\left\|u'(t)-\varphi_1\right\|_{3/2}=0,\ \lim_{t\to1-0}\left\|u''(t)-\varphi_2\right\|_{1/2}=0$$

yığılması mənada ödənirsə və

$$\| u \|_{W_2^3((0,1);H)} \le const\left(\left\|\varphi_0\right\|_{5/2}+\left\|\varphi_1\right\|_{3/2}+\left\|\varphi_2\right\|_{1/2}\right),$$

qiymətləndirilməsi doğrudursa, onda (17),(18) məsələsi requlyar həll olunan adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 12. Tutaq ki, teorem 3-ün bütün şərtləri ödənir. Onda (17),(18) məsələsi requlyar həll olunandır.

Analoji teoremlər digər sərhəd məsələləri üçün də doğrudur.

Bu fəsildə, həmçinin $P(d/dt)u(t)=0$ tənliyinin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlığı anlayışı da verilir.

Tərif 8. Tutaq ki, $L(p)=KerP(d/dt)=\{u : u \in W_2^3((0,1);H), P(d/dt)u(t)=0\}$. $0 \le a < a' < b' < b \le 1$ və $M>0$ istənilən ədədlərdir. Əgər

$$L_M=\{u : u \in L(P), \left\|u\right\|_{W_2^2((a,b);H)} \le M\}$$

çoxluğu $\left\|u\right\|_{W_2^2((a_1,b_1);H)}$ normasına görə kompaktdırsa, onda deyilir ki, bircins tənliyin requlyar həllər fəzası daxili kompaktdır.

Aşağıdakı teorem isbat olunur

Teorem 13. Tutaq ki, 1),2) şərtləri ödənir, A^{-1} tamam kəsilməzdir. Əgər

$$\sum_{j=0}^{2} d_{3,j}\left\|B_{3-j}\right\|<1$$

bərabərsizliyi ödənərsə, onda bircins tənliyin requlyar həllər fəzası daxili kompaktdır. Burada $d_{3,0}=1,\ d_{3,1}=d_{3,2}=2^{1/3}\cdot 3^{-1/2}$.

Bu fəsildə $P(\lambda)$ operator dəstəsinin məxsusi və qoşma elementlərinin izlər fəzasında üçqat tamlığı haqqında əsas teorem də isbat olunur.

Teorem 14. Tutaq ki, A öz-özünə qoşma müsbət müəyyən operatordur, $A^{-1} \in \sigma_\rho$ $(0 < \rho < \infty)$, $B_j = A_j A^{-j}$ $(j = \overline{1,3})$ H -da məhduddurlar və

$$q = \sum_{j=0}^{2} c_j \left\| B_{3-j} \right\| < \begin{cases} 1, \; 0 < \rho \leq 3 \\ \sqrt{2} \sin \dfrac{3\pi}{4\rho}, \; 3 \leq \rho < \infty, \end{cases}$$

belə ki, $c_0 = 1, c_1 = 2 \cdot 3^{-1/2}, c_2 = 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4}$. Onda $P(\lambda)$ operator dəstəsinin məxsusi və qoşma vektorlar sistemi requlyar həllərin izlər fəzasında üçqat tamdır.

(17),(18) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teorem və teorem 14-ü istifadə edərək bircins tənliyin elementar həllər sistemin tamlığı haqqında aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem 15. Tutaq ki, teorem 14-ün bütün şərtləri ödənir. Onda $P(d/dt)u(t) = 0$ tənliyinin elementar həllər sistemi requlyar həllər fəzasında tamdır.

Sonda elmi rəhbərim professor S.S.Mirzəyevə məsələlərin qoyuluşuna görə, daimi diqqət və qiymətli məsləhətlərinə görə dərin təşəkkürümü bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi Hilbert fəzasında üçtərtibli operator əmsallı tənliklər üçün sonlu oblastda bəzi sərhəd məsələlərinin həll olunmasına həsr olunmuşdur.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınıb:

1. Üç tərtibli tam operator diferensial tənliklər üçün sonluoblastda bəzi sərhəd məsələlərinin requlyar və fredholm həll olunması haqqında yeni teoremlər.

2. Sonlu intervalda Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmələrin normaları qiymətləndirilmişdir.

3. Sərhəd məsələlərinin həl olma şərtləri ilə sonlu oblastda aralıq törəmə operatorlarının normaları arasında əlaqə tapılmışdır.

4. Üç tərtibli operator dəstələrin bütün məxsusi və qoşma vektorlarının requlyar həllərin izlər fəzasında üçqat tamlığı haqqında yeni teoremlər.

5. Bircins tənlik üçün sonlu parçada sərhəd məsələlərinin həll olunması tədqiq olunmuş və bircins tənliyin elementar həllər sistemininsərhəd məsələsinin requlyar həllər fəzasında tamlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur.

1. Мирзоев, С.С., Гейдарова, С.Б. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка на конечном отрезке // Proceedings of IAM, -2015. v. 4, № 1, -с. 26-39.
2. Heydarova, S.B. On a periodic type boundary value problem for a third order equation in Hilbert Space // -Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. of Physic. Tech. and Mathemat. Sciences, -2015. v. XXXV, № 1, -p. 42-46.
3. Heydarova, S.B. On estimation of the norm operators of intermediate derivatives of a finite interval // "Mathem. analyze, differential equations and their applications" International Conference, -Baku: -2015, -p. 54.
4. Гейдарова, С.Б. Об условиях разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве// Yəhya Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynəlxalq konfransın materialları, -Bakı: -2015, -s. 271-272.
5. Heydarova, S.B. On a boundary value problem for the third order operator-differential equations // International Workshop on nonharmonic analyze and differential operators. -Baku: -2016, -p. 45-46.
6. Гейдарова, С.Б. О корректной разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве // -Баку: Известия Педагогического Университета, сер. матем. и естественных наук. -2016. т.64, № 2, -с. 52-60.
7. Mirzoyev, S.S. Heydarova, S.B. On a boundary-value problem for third order operator-differential equations on a finite interval // Applied Mathematical Sciences, -2016. v. 10, № 11, -pp. 543-548.
8. Heydarova, S.B. On some spectral properties of third order operator // "Modern problems of mathematics and mechanics", Proceedings of the International conference devoted to the 80-th anniversary of acad. Akif Gadjiev, -Baku: -2017, -p. 91
9. Гейдарова, С.Б. О полноте системы собственных и присоединенных векторов полиноминального пучка третьего поряд-

ка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, -2017. № 1, -с. 116-122.
10. Гейдарова, С.Б., С.С.Мирзоев. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка//-Баку: Вестник Бакинского Гос. Университета, серия физ.-мат. наук. -2018. №4, с.10-16.
11. Гейдарова, С.Б. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка. //«Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» Материалы XIII международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук, -Махачкала: -16–20 сентября -2019 г., -с.55-56.
12. Heydarova, S.B. On Fredholm property of a boundary value problem for third order operator-differential equations. Proceedings of the İnstitute of Mathematics and Mechanics. -Baku: 2020. v.46 №1 -p. 159-166

Dissertasiyanın müdafiəsi 30 sentyabr 2021-ci il saat 14^{00}-da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç., 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun Kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 07 iyul 2021-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 29.06.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 50