АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: Натаван Амрах кызы Мустафаева

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

Баку-2021

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета.

Научный руководитель: д.м.н., профессор
Зиятхан Сейфаддин оглы Алиев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор

Идаят Магоммед оглы Гусейнов

доктор математических наук, доцент

Тельман Бенсер оглы Гасымов

кандидат физико-математических наук, доцент

Эльнур Гасан оглы Халилов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президента Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_______________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.,
_______________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_______________ **Билал Тельман оглы Билалов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень обработки. В нелинейном анализе важную роль играет теория бифуркации нелинейных задач на собственные значения. Исследование бифуркации нелинейных задач на собственные значения имеет прикладной интерес, поскольку задачи такого типа возникают почти во всех областях естествознания: в теории колебаний, тепловой конвекции, в гидродинамике, в теории критических режимов работы атомных и химических реакторов, критических нагрузок. В этом направлении были получены фундаментальные результаты для широкого класса нелинейных задач на собственные значения.

М.А. Красносельским[1] и П.Г. Рабиновичем[2] разработана локальная и глобальная теории бифуркации решений нелинейных задач на собственные значения с дифференцируемыми по Фреше в нуле и бесконечности вполне непрерывными операторами. А.П.Махмудовым и З.С.Алиевым[3] результаты работы П.Г.Рабиновича[2] распространены на нелинейные задачи на собственные значения, без предположения дифференцируемости в нуле нелинейных возмущений.

Бифуркация решений из нуля нелинейных задач на собственные значения для уравнения Штурма-Лиувилля ранее рассматривалась П.Г.Рабиновичем[2], Г.Берестицк[4] и Б.П.Ринни[5].

---

[1] Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений /М.А.Красносельский.–Москва–Ленинград: Гостехиздат, – 1956. – 392 с

[2] Rabinowitz, P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // Journal of Functional Analysis, – 1971. v.7, no.3, – p. 487–513

[3] Махмудов А.П., Алиев З.С. Некоторые глобальные результаты для нелинейных спектральных задач Штурма-Лиувилля четвертого порядка // – Москва: Дифференциальные уравнения, –1993. т. 29, № 8, – с. 1330–1339

[4] Berestycki, H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems//Journal of Differential Equations, – 1977. v. 26, no. 3, – p. 375–390.

Этими авторами доказаны существования двух семейств неограниченных континуумов решений в $R \times C^1$, обладающих обычными узловыми свойствами и ответвляющихся из точек и отрезков линии тривиальных решений, содержащие собственные значения соответствующей линейной задачи. Глобальная бифуркация решений из бесконечности нелинейных задач на собственные значения Штурма-Лиувилля были изучены П.Г.Рабиновичем[6] и Б.П.Ринни[5]. Для этих задач авторы показывают существования двух семейств неограниченных континуумов решений, ответв-ляющихся из точек и отрезков $R \times \{\infty\}$ и обладающих обычными узловыми свойствами в окрестности этих точек и отрезков.

Нелинейные задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка были рассмотрены во многих работах в различных постановках, большинство из которых были посвящены исследованию бифуркации решений в классах положительных и отрицательных функций. Отметим, что в таких задачах узловые свойства не сохраняются вдоль континуумов решений, и поэтому было невозможным детально исследовать структуры и поведения глобальных континуумов решений с использованием методов вышеупомянутых работ П.Г.Рабиновича, Г.Берестиц-кого и Б.П.Ринни. В недавной работе З.С.Алиева[7] полностью исследована глобальная бифуркация из нуля решений нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне

---

[5] Rynne, B.P. Bifurcation from zero or infinity in Sturm-Liouville problems which are not linearizable // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 1998. v. 228, no. 1, – p. 141–156

[6] Rabinowitz, P.H. On bifurcation from infinity // Journal of Differential Equations, – 1973. v.14, no. 3, – p. 462–475

[7] Алиев, З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // – Москва: Математический сборник, – 2016. т. 207, № 12, – с. 3–29

регулярными граничными условиями. В этой работе, для сохранения узловых свойств, с использованием преобразование типа Прюфера построены классы функций в $R \times C^3$, которые обладают осцилляционными свойствами собственных функций и их производных соответствующей линейной задачи и доказано существование двух семейств неограниченных континуумов решений рассматриваемых задач, содержащихся в этих множествах и ответвляющихся из точек и отрезков прямой тривиальных решений.

Из изложенного выше следует, что глобальная бифуркация решений из бесконечности нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка фактически не исследованы. Следовательно, актуальной задачей является изучение структуры асимптотических точек бифуркации, структуры и поведения неограниченных континуумов решений нелинейных задач на собственные значения четвертого порядка, ветвящихся от точек и отрезков $R\times\{\infty\}$.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей данной работы является изучение глобальной бифуркации решений из бесконечности нелинейных нелинеаризируемых задач на собственные значения в банаховом и гильбертовом пространствах; исследование поведения континуумов решений, ответвляющихся из $R\times\{\infty\}$, нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями.

Методы исследования. В работе применяются методы теории функций и функционального анализа, теории операторов, теории дифференциальных уравнений, спектрального анализа, спектральной теорий дифференциальных операторов, топологии, нелинейного анализа и теории бифуркации.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

– определить отрезков асимптотической бифуркации и исследовать поведения глобальных континуумов решений нелинеаризируемых задач на собственные значения рассматриваемых в банаховых и гильбертовых пространствах ответвляющихся из асимптотических отрезков бифуркации;

– исследовать глобальную бифуркацию решений из бесконечности линеаризируемых задач на собственные значения для вполне регулярных систем Штурма четвертого порядка; при этом на конкретных примерах показать все возможные случаи поведения глобальных континуумов решений;

– определить отрезков бифуркации по определенному осцилляционному классу и исследовать поведения глобальных континуумов решений нелинеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

– изучена структура асимптотических точек бифуркации, исследовано поведение неограниченной связной компоненты, исходящая из бесконечности, решений некоторых нелинейных (нелинеаризируемых) задач на собственные значения;

– исследовано поведение и структура континуумов решений, ветвящихся как из бесконечности, так и из нуля и из бесконечности, линеаризуемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями;

– изучена структура асимптотических точек бифуркации, исследованы поведение и структура связных компонент решений, ответвляющихся из асимптотических отрезков бифуркации, нелинеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах теории дифференциальных уравнений, нелинейного анализа, теории бифуркации, при изучении различных задач механики и физики.

Апробация и применение. Результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры "Математический анализ" Гянджинского Государственного Университета (рук. доц. А.М. Гусейнов), кафедры "Математический анализ" Бакинского Государственного Университета (рук. проф. С.С. Мирзоев), на семинаре отдела "Дифференциальные уравнения" (рук. проф. А.Б. Алиев) ИММ НАН Азербайджана, на международной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения" (MADEA-7, Баку, 2015), на международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики» посвященной 55-летию Сумгаитского Государственного Университета (Сумгаит, 2017), на Международной (51-й Всероссийской) молодёжной школе-конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, Россия, 2020) .

Личный вклад автора заключается в формулировке цели исследования. Кроме того, все полученные результаты исследования принадлежат автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Призидента Азербайджанской Республики – 5, материалы конференций – 2, тезисы докладов – 1.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 203998 знаков (титульная страница – 405 знаков, оглавление – 2460 знаков, введение – 48000 знаков, первая глава – 62000 знаков, вторая глава – 46000 знаков, третья глава – 44000 знаков, заключение –

1133 знаков). Список используемой литературы состоит из 83 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и список используемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и показана степень ее разработанности, сформулирована цель и задачи исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, а также представлена информация об апробации работы.

В главе I изучается бифуркация решений нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве без предположения дифференцируемости в бесконечности нелинейных возмущений. В этой главе вышеупомянутые результаты М.А. Красносельского и П.Г. Рабиновича расспространены на эти нелинейные задачи. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [1, 2, 4].

В 1.1 приводится необходимые сведения из теории бифуркации нелинейных задач на собственные значения.

В 1.2 изучается глобальная бифуркация из нуля нелинеаризируемых задач на собственные значения.

В 1.3 изучается глобальная бифуркация из бесконечности нелинейных задач на собственные значения.

Пусть $H-$ вещественное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $L: D(L) \subset H \to H$ ($D(L)$ всюду плотно в H) – линейный, полуограниченный снизу, самосопряженный оператор с компактной резольвентой. Заметим, что каждое собственное значение оператора L является вещественным, изолированным и имеет конечную кратность, а весь спектр $\sigma(L)$ состоит только из бесконечной неубывающей последовательности таких точек.

Рассмотрим следующую нелинейную задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda u + F(\lambda, u) + G(\lambda, u), \tag{1}$$

где операторы $F : R \times H \to H$ и $G : R \times H \to H$ являются непрерывными и удовлетворяют следующим условиям: существует число $M > 0$ такое, что

$$\| F(\lambda, u) \| \le M \| u \|, \ \lambda \in R \text{ и } u \in H, \ \| u \| > 1; \tag{2}$$

$$G(\lambda, u) = o(\| u \|) \text{ при } \| u \| \to \infty, \tag{3}$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$.

Норму в пространстве $R \times H$ определим следующим образом: $\| (\lambda, u) \| = \left\{ | \lambda |^2 + \| u \|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Через $B_r(\lambda)$ обозначим шар в $R \times H$ с центром в точке $(\lambda, 0)$ и радиуса r, а через B_r – шар в H с центром в точке 0 и радиуса r.

Говорят, что (μ, ∞) является точкой бифуркации или асимптотической точкой бифуркации задачи (1), если существует последовательность $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset R \times H$ решений этой задачи такая, что $\lambda_n \to \mu$ и $\| u_n \| \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $I_\mu = [\mu - M, \mu + M]$. Обозначим через B^∞ множество асимптотических точек бифуркации задачи (1).

Теорема 1. *Пусть $\mu \in \sigma(L)$ имеет нечетную кратность и выполняются условия (2), (3) и*

$$dist\{\mu, \sigma(L) \setminus \{\mu\}\} > 2M. \tag{4}$$

Тогда $B^\infty \bigcap (I_\mu \times \{\infty\}) \ne \varnothing$.

Лемма 1. *Если $(\lambda, \infty) \in B^\infty$, то $dist\{\lambda, \sigma(L)\} < M$.*

Следствие 1. *Если μ является собственным значением оператора L нечетной кратности и выполняется условие (4), то $B^\infty \bigcap ((I_\mu(\delta_{\mu,0}) \setminus I_\mu) \times \{\infty\}) = \varnothing$, где $I_\mu(\delta_{\mu,0}) = [\mu - M - \delta_{\mu,0}$,*

$\mu + M + \delta_{\mu,0}]$, $\delta_{\mu,0} = (dist\{\mu; \sigma(L) \setminus \{\mu\}\} - 2M)/2$.

Пусть $\Im -$ множество нетривиальных решений задачи (1) в $R \times H$. Определим множество $\Im_{\mu}^{*}$ как объединение всех компонент $\Im_{\mu,\lambda}^{*}$ множества $\Im$ ответвляющихся из асимптотических точек бифуркации $(\lambda, \infty) \in B^{\infty} \bigcap \ (I_{\mu} \times \{\infty\})$. Заметим, что множество $\Im_{\mu} = \Im_{\mu}^{*} \bigcup (I_{\mu} \times \{\infty\})$ является связным в $R \times E$.

Для каждого множества $A \subset R \times E$ через $P_R(A)$ обозначим проекцию множества A на R, а через $P_E(A) -$ проекцию множества A на E.

Из теоремы 1 следует, что множество $\Im_{\mu}$ содержит $(I_{\mu} \times \{\infty\})$ и является неограниченным в $R \times E$. Кроме того, имеет место следующая

Теорема 2. *Предположим, что $\mu \in \sigma(L)$ имеет нечетную кратность, выполняется условие (4) и операторы*

$$(\lambda, u) \to \| u \|^2 \ F\left(\lambda, \frac{u}{\| u \|^2}\right) \quad и \quad (\lambda, u) \to \| u \|^2 \ G\left(\lambda, \frac{u}{\| u \|^2}\right)$$

являются L-компактными. Кроме того, пусть $\Lambda \subset R -$ отрезок в R такой, что $I_{\mu} \subset \Lambda \subset I_{\mu}(\delta_{\mu,0})$ и $C_{\mu} -$ окрестность отрезка $I_{\mu} \times \{0\}$ в $R \times E$, такая что $P_R(C_{\mu}) \subset \Lambda$ и $dist\{0, \ P_E(C_{\mu})\} > 0$. Тогда либо (i) $\Im_{\mu} \setminus C_{\mu}$ является ограниченным в $R \times E$, причем в этом случае $(\Im_{\mu} \setminus C_{\mu}) \bigcap \{(\lambda, 0) : \lambda \in R\} \neq \emptyset$, либо (ii) $\Im_{\mu} \setminus C_{\mu}$ является неограниченным в $R \times E$, причем если $P_R(\Im_{\mu} \setminus C_{\mu})$ является ограниченным в R, то $\Im_{\mu}$ содержит другой отрезок $I_{\tilde{\mu}} \times \{\infty\}$, где $\mu \neq \tilde{\mu} \in \sigma(L)$.

Пусть теперь $\mu \in \sigma(L)$ является простым и $\vartheta \in D(L)$ является соответствующим нормированным собственным вектором. Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *$\Im_\mu$ может быть разложена на два подконтинуума $\Im_\mu^+$, $\Im_\mu^-$ и существует окрестность $Q_\mu \subset C_\mu$ отрезка $I_\mu \times \{\infty\}$ такая, что если $(\lambda,u) \in \Im_\mu^+ \; (\Im_\mu^+) \bigcap Q_\mu$ и $(\lambda,u) \neq (\mu, \infty)$, то $(\lambda,u) = (\lambda, \alpha\vartheta + w)$, где $\alpha > 0 \; (\alpha < 0)$ и $|\lambda - \mu| = M + o(1)$, $w = o(|\alpha|)$ при $|\alpha| \to \infty$.*

В этом параграфе приводится приложение к нелинейной задаче на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В главе II рассматривается линеаризируемая на бесконечности задача на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями. Доказывается существование двух семейств неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из асимптотических точек бифуркации и обладающих обычными узловыми свойствами вблизи этих точек. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [5, 7, 8].

В 2.1 дается постановка задачи и приводятся некоторые исторические замечания.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \ell(y) \equiv (py'')'' - (qy')' + r(x)y = \lambda\tau y + \\ + g(x, y, y', y'', y''', \lambda), \; x \in (0, l), \end{aligned} \tag{5}$$

при граничных условиях

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \;\; y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{6а}$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \;\; y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{6б}$$

где $\lambda \in R -$ спектральный параметр, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, функции $p \in C^2[0,l]$, $q \in C^1[0,l]$, $r, \tau \in C[0,l]$, $p(x) > 0, q(x) \geq 0$, $\tau(x) > 0$ на $[0, l]$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta -$ действительные постоянные такие, что $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq \pi/2$, за исключением случаев $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = \pi/2$ и $\alpha = \gamma = \beta = \delta = \pi/2$. Нелинейный член g является непрерывным на $[0,l] \times R^5$ и будем предполагать, что для него выполняется либо первое, либо оба из следующих условий: для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$

$$g(x,u,s,v,w,\lambda) = o\left(|u|+|s|+|v|+|w|\right)$$
$$\text{при } |u|+|s|+|v|+|w| \to \infty, \tag{7}$$
$$g(x,u,s,v,w,\lambda) = o(|u|+|s|+|v|+|w|)$$
$$\text{при } |u|+|s|+|v|+|w| \to 0, \tag{8}$$

равномерно по $x \in [0,l]$ и $\lambda \in \Lambda$.

Если нелинейный член g удовлетворяет только условию (8), то рассматривается бифуркация из точки $y=0$. Отметим, что А.Ч. Лазером и П.Дж. Маккеннаном[8], Р. Ма и Б. Томпсоном[9] получены результаты, которые аналогичны результатам работы П.Г.Рабиновича[2], для задачи (5)-(6) в случае когда $q \equiv 0$, $\alpha = \gamma = \pi/2$, $\beta = \delta = 0$, а нелинейный член g удовлетворяет условию малости при $y=0$ вида $g(y) = o(|y|)$, которые дают возможность сохранения узловых свойств решений. В работе З.С. Алиева[7] полностью исследована локальная и глобальная бифуркация решений задачи (5)-(6) при выполнении условии (8), в случае когда $r \equiv 0$. Для изучения бифуркации решений задачи (5)-(6), в этой работе, с использованием преобразования типа Прюфера, построены классы функций, которые сохраняют узловые свойства собственных функций и их производных линейной задачи полученной из (5)-(6) при $r \equiv 0$ и $g \equiv 0$. Кроме того, доказано существование двух семейств неограниченных континуумов решений, содержащихся в этих классах. Если выполняется только условие (7), то рассматриваетя бифуркация от $y=\infty$. Аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля

---

[8] Lazer, A.C., McKenna, P.J. Global bifurcation and a theorem of Tarantello // Journal of Mathematical Analysis and Applications, – 1994. v.181, no. 3, – p. 648–655.

[9] Ma, R., Tompson, B. Nodal solutions for a nonlinear fourth order eigenvalue problem // Acta Mathematica Sinica, English Series, – 2008. v.24, no.1, – p. 27–34.

исследована П.Г. Рабиновичем[6]. Следует отметить, что лишь И.Пржибицин[10] для специального класса нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка получил результаты, аналогичные результатам П.Г. Рабиновича[6], с использованием условии малости вида $g(x, y, s, \vartheta, \lambda) = o(|y|)$ при $y = \infty$ для нелинейного члена g.

Целью данной главы является изучение бифуркации решений нелинейной задачи (5)-(6) в следующих случаях: (i) выполняется только условие (7); (ii) выполняются оба условия (7) и (8).

В 2.2 приводятся некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $E = C^3[0, l] \bigcap B.C.$ – банахово пространство с обычной нормой $\| u \|_3 = \| u \|_\infty + \| u' \|_\infty + \| u'' \|_\infty + \| u''' \|_\infty$, $\| u \|_\infty = \max\limits_{x \in [0, l]} |u(x)|$. Следуя З.С. Алиева[7] для каждого $k \in \mathrm{N}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$, через S_k^ν обозначается множество функций из E, обладающих осцилляционными свойствами собственных функций и их производных линейной задачи, полученной из (5)-(6) при $r \equiv 0$ и $g \equiv 0$.

В силу теоремы 1.2 вышеупомянутой работы З.С. Алиева собственные значения линейной задачи

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda \tau y, \quad x \in (0, l), \\ y \in B.C., \end{cases} \tag{9}$$

являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, где через $B.C.$ обозначено множество функций удовлетворяющих граничным условиям (6); для каждого $k \in \mathrm{N}$ собственная функция $y_k(x)$,

---

[10] Przybycin J. Some applications of bifurcation theory to ordinary differential equations of the fourth order // Annales Polonici Mathematici, – 1991. v. 53, no. 2, – p. 153–160.

соответствующая собственному значению λ_k, содержится в S_k (при этом $y_k(x)$ имеет в точности $k-1$ простых нулей в $(0,l)$).

Обозначим через C множество решений задачи (5)-(6). Будем говорит, что множество $D \subset C$ пересекает точку (λ, ∞) $\lambda \in R,$ (соответственно, точку $(\lambda, 0)$), если существует последовательность $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такая, что $\lambda_n \to \lambda$ и $\| u_n \|_3 \to \infty$ (соответственно, $\| u_n \|_3 \to 0$). Кроме того, будем говорит, что $D \subset C$ пересекает (λ, ∞) (соответственно, $(\lambda, 0)$) вдоль множества $R \times S_k^{\nu}$, $k \in \mathrm{N}$ и $\nu \in \{+,-\}$, если последовательность $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ можно выбрать так, чтобы $u_n \in S_k^{\nu}$ для всех $n \in \mathrm{N}$ (в этом случае, также будем говорит, что (λ, ∞) (соответственно, $(\lambda, 0)$) является точкой бифуркации задачи (8)-(9) по множеству $R \times S_k^{\nu}$).

Теорема 4. *Пусть выполняется условие (8). Тогда для каждого* $k \in \mathrm{N}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *существует континуум* $\Im_k^{\nu}$ *решений задачи (5)-(6) в* $(R \times S_k^{\nu}) \bigcup \{(\lambda_k, 0)\}$, *который пересекает* $(\lambda_k, 0)$ *и* (λ_k, ∞) *в* $R \times E$.

В 2.3 исследуется асимптотическая бифуркация решений задачи (5)-(6), где предполагается, что выполняется только условие (7).

Одним из основных результатов настоящей главы является следующая

Теорема 5. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *существует связная компонента* C_k^{ν} *множества* C, *которая содержит* (λ_k, ∞) *и обладает следующими свойствами: (i) существует окрестность* Q_k *точки* (λ_k, ∞) *в* $R \times E$ *такая, что* $Q_k \bigcap\ (C_k^{\nu} \setminus \{(\lambda_k, \infty)\} \subset R \times S_k^{\nu}$; *(ii) либо* C_k^{ν} *пересекает* $C_{k'}^{\nu'}$ *вдоль множества* $R \times S_{k'}^{\nu'}$ *для некоторого* $(k', \nu') \neq (k, \nu)$, *либо* C_k^{ν}

пересекает $(\lambda, 0)$ *для некоторого* $\lambda \in R,$ *либо* $P_R(C_k^\nu)$ *неограничена в* $R.$

Замечание 1. Следует отметить, что в теореме 5 не утверждается, что $C_k^\nu \subset (R \times S_k^\nu) \bigcup \{(\lambda_k, \infty)\}.$

Замечание 2. Если для каждого $\lambda \in R$ существует $x \in (0, l)$ такое, что $g(x, 0, 0, 0, 0, \lambda) \neq 0,$ то второе утверждение в (ii) теоремы 5 не имеет место.

Если наложить дополнительные условия на функцию $g,$ то можно более точно описать структуру множества решений задачи (5)-(6).

Следствие 2. *Пусть функция* g *представима в виде*

$$g(x,u,s,\vartheta,w,\lambda) = g_1(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)u + g_2(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)s +$$
$$g_3(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)\vartheta + g_4(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)w,$$

где g_1, g_2, g_3 *и* g_4 *являются непрерывными в точке* $(u,s,\vartheta,w) = \; = (0, 0, 0, 0)$ *функций. Тогда* $C_k^\nu \setminus Q_k$ *содержит подконтинуум, который лежит в* $R \times S_k^\nu$ *и либо неограничен в* $R \times E,$ *либо пересекает множеству* $\Re = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}.$

Следствие 3. *Если* g *такое же, как в следствии 2, и* $g_i(x, 0, 0, 0, 0, \lambda) = 0,$ $i = 1, 2, 3, 4,$ *и* C_k^ν *пересекает* $\Re,$ *то точкой пересечения* C_k^ν *и* $\Re$ *является* $(\lambda_k, 0).$

В 2.4 рассматривется бифуркация решений задачи (5)-(6) при выполнений условий (8) и (7) одновременно. Здесь улучшается утверждения теорем 4 и 5 следующим образом:

Теорема 6. *Если выполняются оба условия (7) и (8), то для каждого* $k \in \mathrm{N}$ *и каждого* $\nu \in \{+, -\}$ *справедливо соотношение* $C_k^\nu \subset R \times S_k^\nu$ *и утверждение (i) теоремы 5 не имеет место. Более того, если* $\Im_k^\nu$ *пересекает точку* $(\lambda, \infty),$ *для некоторого* $\lambda \in R,$ *то* $\lambda = \lambda_k.$ *Аналогично, если* C_k^ν *пересекает* $(\lambda, 0)$ *для некоторого* $\lambda \in R,$ *то* $\lambda = \lambda_k.$

Естественно возникает вопрос, пересекаются ли множества $\Im_k^\nu$ и C_k^ν? В этом параграфе приводятся примеры, которые показывают, что оба случая являются возможными.

В главе III изучается глобальная бифуркация из бесконечности решений нелинейной задачи (5)-(6) в случае, когда нелинейный член не является дифференцируемым в бесконечности. Основные результаты этой главы опубликованы в работах автора [3, 5, 6].

В 3.1 дается постановка задачи и приводится исторические замечания.

Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения для уравнения

$$\ell(y) = \lambda\tau y + h(x, y, y', y'', y''', \lambda), \ \ x \in (0,\ l), \qquad (10)$$

при граничных условиях (6), где функции $p(x), q(x)$ $r(x)$, $\tau(x)$ и постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ удовлетворяют условиям наложенные на них в главе II. Нелинейный член h представим в форме $h = f + g$, где f, $g \in$ $C([0,\ l]\times R^5)$, g удовлетворяет условию (7), а f удовлетворяет следующему условию: существуют число $M > 0$ и достаточно большое число $c_0 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} |\, f(x, u, s, \vartheta, w, \lambda)/y\,| \le M,\, x \in [0,\ l],\, u, s, \vartheta, w \in R, \\ |\,u\,| + |\,s\,| + |\,v\,| + |\,w\,| \ge c_0,\ \lambda \in R. \end{gathered} \qquad (11)$$

Если g удовлетворяет (8), а f удовлетворяет условию

$$\begin{gathered} |\, f(x, u, s, \vartheta, w, \lambda)/y\,| \le M,\, x \in [0,\ l],\, u, s, \vartheta, w \in R, \\ |\,u\,| + |\,s\,| + |\,v\,| + |\,w\,| \le 1,\ \lambda \in R, \end{gathered} \qquad (12)$$

равномерно по $x \in [0, l]$ и $\lambda \in \Lambda$, то рассматривается бифуркация из $y = 0$.

В вышеупомянутой работе З.С. Алиева исследована глобальная бифуркация решений задачи (10), (6) (в случае $r \equiv 0$) при выполнений условий (8) и (12), где доказано существование двух семейств неограниченных континуумов решений этой задачи, ответвляющихся из отрезков прямой тривиальных решений и содержащихся в классах $R \times S_k^{\nu}$.

Если выполняются условия (7) и (11), то рассматривается бифуркация от $y = \infty$. Напомним, что для уравнения Штурма-Лиувилля аналогичные задачи были рассмотрены ранее в работе И. Пржибицин[11] и вышеупомянутой работе Б.П. Ринни. Для таких задач этими авторами доказаны существования двух семейств неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из отрезков $R \times \{\infty\}$ и обладающих обычными узловыми свойствами в окрестности этих отрезков.

Целью настоящей главы является изучение бифуркации решений из бесконечности задачи (10), (6) при выполнении условий (7) и (11).

В 3.2 доказываются некоторые необходимые утверждения. Для изучения бифуркации решений нелинейной задачи (10), (6) используется преобразование $y \to y / \| y \|_3^2$, которое преобразует эту задачу бифуркации из бесконечности к соответствующей задаче бифуркации из нуля. Но в этом случае множество $\{ y \in E : |y| + |y'| + |y''| + |y'''| \geq c_0 \}$ не преобразуется в множество вида $\{ y \in E : |y| + |y'| + |y''| + |y'''| \leq r_0 \}$ для некоторого достаточно малого $r_0 > 0$. Следовательно, невозможно применить результаты работы З.С.Алиева[7] к задаче бифуркации из нуля. Поэтому для решения этого вопроса здесь доказывается следующий результат.

Лемма 2. *Существуют функции* f^* *и* g^* *такие, что* h *можно представить также в виде* $h = f^* + g^*$, *где* f^* *и* g^* *удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered} | f^*(x,u,s,\vartheta,w,\lambda) / y | \leq M, x \in [0,\ l], \\ (u,s,\vartheta,w,\lambda) \in [0,\ l] \times R^5, u \neq 0; \end{gathered} \tag{13}$$

---

[11] Przybycin, J. Bifurcation from infinity for the special class of nonlinear differential equations // Journal of Differential Equations, – 1986. v. 65, no 2, – p. 235–239

$$g^*(x,u,s,v,w,\lambda)=0\left(|u|+|s|+|v|+|w|\right) \quad \text{при}$$
$$|u|+|s|+|v|+|w|\to\infty, \tag{14}$$
равномерно по $x\in[0,l]$ *и* $\lambda\in\Lambda$ *для каждого ограниченного промежутка* $\Lambda\subset R.$

Напомним, что если 0 не является собственным значением линейной задачи (9), то нелинейная задача (10), (6) сводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,t)\tau(t)y(t)dt+\int_0^l K(x,t)f^*(t,y(t)y'(t),y''(t),y'''(t),\lambda)dt+$$
$$+\int_0^l K(x,t)f^*(t,y(t)y'(t),y''(t),y'''(t),\lambda)dt. \tag{15}$$

Пусть

$$F^*(\lambda,y)(x)=\int_0^l K(x,t)f^*(t,y(t)y'(t),y''(t),y'''(t),\lambda)dt. \tag{16}$$

$$G^*(\lambda,y)(x)=\int_0^l K(x,t)g^*(t,y(t)y'(t),y''(t),y'''(t),\lambda)dt. \tag{17}$$

Очевидно, что оператор $F^*:R\times E\to E$ является вполне непрерывным, а оператор $G^*:R\times E\to E$ является непрерывным и удовлетворяет условию

$$G^*(\lambda,y)=o(\|y\|_3) \text{ при } \|y\|_3\to\infty, \tag{18}$$

равномерно на ограниченных $\lambda-$ промежутках. Кроме того, оператор

$$H:(\lambda,y)\to\|y\|_3^2\, G^*\left(\lambda,\frac{y}{\|y\|_3^2}\right),\quad H^*(\lambda,0)=0,$$

является вполне непрерывным.

В силу (15)-(17) задачу (10), (6) можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$y=\lambda Ly+F^*(\lambda,y)+G^*(\lambda,y). \tag{19}$$

В 3.3 изучается глобальная бифуркация из бесконечности решений задачи (10), (6).

Для изучения бифуркации решений (10), (6) при выполнении условий (7) и (11) рассмотрим следующую аппроксимирующую задачу

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda\tau\, y + \dfrac{f^*(x, \| y\|_3^{\varepsilon}\, y, \| y\|_3^{\varepsilon}\, y', \| y\|_3^{\varepsilon}\, y'', \| y\|_3^{\varepsilon}\, y''', \lambda)}{\| y\|_3^{2\varepsilon}} + \\ \qquad + g^*(x, y, y', y'', y''', \lambda),\ x \in (0, l),\ \ y \in B.C., \end{cases} \tag{20}$$

где $\varepsilon \in (0, 1]$.

Лемма 3. *Пусть $\delta > 0 -$ достаточно малое число. Тогда для каждого $k \in \mathrm{N}$ существует достаточно большое $R_k^* > 0$ такое, что для каждого заданного $\varepsilon \in (0, 1)$ задача (20) не имеет нетривиального решения (λ, y), которое удовлетворяет условиям $dist\{\lambda, I_k\} > \delta,\ y \in S_k^{\nu},\ \nu \in \{+, -\}$ и $\| y\|_3 > R_k^*$.*

Лемма 4. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $\rho_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\lambda \in \Lambda$ и $y \in E, \| y\|_3 > \rho_\varepsilon$, имеем*

$$| g^*(x, y, y', y'', y''', \lambda)| < \varepsilon \| y\|_3,\ x \in [0, l].$$

Пусть $p_0 = \min\limits_{x \in [0,\, l]} p(x)$. Определим числа $r_k,\ k \in \mathrm{N}$, следующим образом:

$$r_k = p_0^{-1}\{2\| p\|_2 + \| q\|_1 + \| r\|_\infty + (|\lambda_k| + M/\tau_0 + 1)\| \tau\|_\infty + M/R_k^*\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon_k,\ k \in \mathrm{N}, -$ достаточно малое число такое, что $\varepsilon_k < \dfrac{p_0}{2le^{(r_k+1)l}}$. Тогда для каждого $k \in \mathrm{N}$ существует достаточно большое $R_k > \max\{R_k^*, \rho_{\varepsilon_k}\}$ такое, что для любого $R > R_k$ задача (10), (6) имеет решение $(\lambda_{R,k}^{\nu}, y_{R,k}^{\nu})$, которое удовлетворяет условиям:*

$$dist\{\lambda_{R,k}^{\nu},\ I_k\} \le \delta,\ \ \vartheta_{R,k}^{\nu} \in S_k^{\nu},\ \ \nu \in \{+, -\},\ \ и\ \ \|\vartheta_{R,k}^{\nu}\|_3 = R.$$

Следствие 4. *Множество асимптотических точек бифуркации задачи (10), (6) (или (19)) по множеству* $R\times S_k^\nu$ *является непустым. Более того, если* $(\lambda,\,\infty)$ *является точкой бифуркации для задачи (10), (6) по множеству* $R\times S_k^\nu$, *то* $\lambda\in I_k$, $I_k=[\lambda_k-M/\tau_0\,,\lambda_k+M/\tau_0\,]$, $\tau_0=\min\,\{\tau(x):\ x\in[0,l]\}$.

Через D обозначим множество нетривиальных решений задачи (10), (6). Для каждого $k\in\mathrm{N}$ и каждого $\nu\in\{+\,,-\}$ определим множество $D_k^\nu\subset D$ как объединение всех компонентов связности множества D, которые пересекают $I_k\times\{\infty\}$ вдоль множества $R\times S_k^\nu$.

Основным результатом настоящей главы является следующая

Теорема 7. *Для каждого* $k\in\mathrm{N}$ *и каждого* $\nu\in\{+,-\}$ *для множества* D_k^ν *выполняется хотя бы одно из следующих утверждений: (i)* D_k^ν *пересекает* $I_{k'}\times\{\infty\}$ *для некоторого* $(k',\nu')\neq(k,\nu)$; *(ii)* D_k^ν *пересекает* $\Re$ *для некоторого* $\lambda\in R$; *(iii)* $P_R(D_k^\nu)$ *является неограниченным. Кроме того, если объединение* $D_k=D_k^+\bigcup D_k^-$ *не удовлетворяет (ii) или (iii), то оно должно удовлетворят (i) при некотором* $k'\neq k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассматриваются нелинейные задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями. Изучается структура асимптотических точек бифуркации и структура неограниченных континуумов решений рассматриваемых задач ответвляющихся из точек и отрезков $R\times\{\infty\}$.

Тема исследований актуальна, рассматриваемые задачи встречаются в механике и физике.

В диссертации получены следующие основные результаты:

– изучена структура асимптотических точек бифуркации, исследована поведение неограниченной связной компоненты, ответвляющаяся из бесконечности, решений некоторых нелинеаризируемых задач на собственные значения;

– исследованы поведения и структуры континуумов решений, ответвляющихся как из бесконечности, также из нуля и из бесконечности, линеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями;

– изучена структура асимптотических точек бифуркации, исследованы поведения и структуры связных компонент решений, ответвляющихся из отрезков $R\times\{\infty\}$ нелинеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Aliyev, Z. S., Mustafayeva, N.A. Global bifurcation from infinity of some nonlinearizable eigenvalue problems//International conference “Mathematical analysis, differential equations and their applications”, MADEA–7, –Baku: – 8–13 September, –2015, – p. 19.
2. Aliyev, Z. S., Mustafayeva, N.A. Bifurcation from infinity for some nonlinear eigenvalue problems which are not linearizable // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., math., – 2015. v. 35, №4, – p. 13–18.
3. Мустафаева, Н.А. Глобальная бифуркация решений из бесконечности некоторых нелинейных задач четвертого порядка // “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” Beynəlxalq elmi konfransının materialları, – Sumqayıt: – 25–26 may, –2017, – s.160–161.
4. Алиев З.С., Мустафаева, Н.А. Глобальная бифуркация решений из бесконечности для некоторых нелинейных задач на собственные значения//–Баку: Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, – 2018. № 4, – с.1–4.
5. Aliyev, Z.S., Mustafayeva, N.A. Bifurcation of solutions from infinity for certain nonlinear eigenvalue problems of fourth order ordinary differential equations // Electronic Journal of Differential Equations, – 2018. v. 2018, № 98, – p. 1–19.
6. Mustafayeva, N.A. On global bifurcation from zero and infinity in fourth order nonlinear eigenvalue problems // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, – 2018. v. 6, № 1, – p. 103–110.
7. Mustafayeva, N.A. Bifurcation from zero and infinity in nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order // Тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции “Современные проблемы математики и ее приложений”, – Екатеринбург: – 3–7 февраля, – 2020, – с. 43-44.

8. Mustafayeva, N.A. On global continua of solutions bifurcating from zero and infinity of some nonlinear fourth order eigenvalue problems // Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., math. – 2020. v.40, №1, – p. 146-151.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Зиятхану Алиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Защита диссертации состоится **<u>08 октября 2021</u>** года в **<u>14^{00}</u>** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам <u>03 сентября 2021</u> года.

Подписано в печать: 30.06.2021
Формат бумаги: 60х84 1/16
Объём: 40000
Тираж: 70