

# AMEA RMI-nin "RİYAZİ ANALİZ" şöbəsinin 2014-cü il üçün

## Elmi və elmi-təşkilatı işlərinin

### *H E S A B A T I*

#### **I. ELMİ HISSƏ**

Şöbədə aşağıdakı mövzu üzrə işlər aparılmışdır:

**Mövzu:** Funksional fəzalar və operatorlar nəzəriyyəsi. Analizin müasir problemləri.

Baxılan işlər aşağıdakılardır:

**İŞ A:** Kəsr maksimal operator, Riss potensialı və sinqulyar inteqral operatorların ümumiləşmiş Kampanato fəzalarında məhdudluğu.

İcraçı: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., b.e.i. V.S.Quliyev və e.i.v.i.e. F.İsayev.

**İŞ B:** Ümumiləşmiş çəkili Hölder fəzalarında ümumiləşmiş sürüşmə ilə sinqulyar operatorların məhdudluğu və onun tətbiqləri.

İcraçı: f.-r.e.d., prof., apar.e.i. S.K.Abdullayev.

**İŞ C:** İki birdəyişənli periodik funksiyaların Furye əmsallarının mütləq qiymətlərinin və müəyyən çəki ardıcılıqlarının elementlərinin hasillərindən qurulmuş sıraların qalıq həddləri terminlərində bu funksiyaların bürünməsinin hamarlıq modullarının azalma tərtiblərinin tədqiqatı (tərs teoremlər).

İcraçı: f.-r.e.n., dos., apar.e.i. N.Ə.İlyasov.

**İŞ D:** Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu maksimal, Riss potensialı və sinqulyar inteqral operatorların ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarda tədqiqi

İcraçı: f.-r.e.n., dos., apar.e.i. C.C.Həsənov və e.i.v.i.e. A.E.Abdullayeva.

**İŞ E:** Dəyişən dərəcəli Lebeq fəzalarında kompaktlıq haqqında Riss teoreminin analoqu və bəzi tətbiqlər.

İcraçı: f.-r.e.n., dos., apar.e.i. R.Ə.Bəndəliyev və e.i.v.i.e. A.N.Məmmədova.

**İŞ F:** Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu sinqulyar inteqral operatorlar üçün Lebeq fəzasında çəkili bərabərsizliklərin alınması.

İcraçı: f.-r.e.n., dos., apar. e.i. Z.V. Səfərov

**İŞ İ:** Qrup strukturlu fəzalarda sinqulyar inteqralların Lebeq fəzalarında məhdudluğu.

İcraçı: f.-r.e.n., dos., böy.e.i. M.Q.Hacıbəyov.

**İŞ G:** Funksiyanın lokal ossilyasiya xarakteristikaları ilə hamarlıq modulları arasında bərabərsizliklər və onların inteqral operatorların xassələrinin öyrənilməsinə tətbiqi.

İcraçı: k.e.i. v.i.e. L.Əliyeva.

**Aparılan tədqiqatlar nəticəsində "Riyazi analiz" şöbəsində aşağıdakı nəticələr əldə edilmişdir.**

**1. AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., b.e.i. V.S.Quliyev və e.i. v.i.e. F. İsayev.**

Təqdim olunan işdə kəsr maksimal operator, Riss potensialı və sinqulyar inteqral operatorların  $L_{comp}^q(\mathbb{R}^n)$  ümumiləşmiş Kampanato fəzalarında məhdudluğu araşdırılmışdır.

Mövzu üzrə elmi məqalə çap olunmuşdur.

Mənfi olmayan  $d$ -lər üçün fəzası  $L^q$ -funksiyalarının kompakt daşıyıcılarından təşkil olunmuş aşağıdakı fəzadır:

$$L_{comp}^{q,d}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in L_{comp}^q(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} f(x)x^\alpha dx = 0, |\alpha| \leq d \right\}.$$

$Q$  kubu üçün  $L^{q,d}(Q)$  fəzası aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$L^{q,d}(Q) \equiv \left\{ f \in L^q(Q) : \int_Q f(x)x^\alpha dx = 0, |\alpha| \leq d \right\}.$$

$\tilde{P}_d(\mathbb{R}^n)$  ilə dərəcəsi  $d$ -ni aşmayan çoxhədlilər çoxluğunu işarə edəcəyik.  $f$  lokal inteqrallanan funksiya üçün,  $Q$  kub və  $d$  mənfi olmayan tam ədəd olduqda  $P \in \tilde{P}_d(\mathbb{R}^n)$  unikal çoxhədli var ki, bütün  $q \in \tilde{P}_d(\mathbb{R}^n)$  üçün

$$\int_Q (f(x) - P(x))q(x) dx = 0. \quad (*)$$

(\*) şərtini ödəyən yeganə  $P$  çoxhədlisini  $P_Q^d f$  ilə işarə edəcəyik. Tərifdən görüldüyü kimi  $P_Q^d f = g$  əgər  $g \in \tilde{P}_d(\mathbb{R}^n)$ .

**Tərif 1.** ( $\tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$ ). Fərz edək ki,  $1 \leq q \leq \infty$ . Tutaq ki,  $\phi: Q' \rightarrow (0, \infty)$  təyin olunmuş funksiyadır və  $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$ . Onda

$$\|f\|_{\tilde{L}_{q,\phi,d}} \equiv \sup_{Q \in Q'} \frac{1}{\phi(Q)} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - P_Q^d f(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

belə ki,  $q < \infty$  və

$$\|f\|_{\tilde{L}_{q,\phi,d}} \equiv \sup_{Q \in Q'} \frac{1}{\phi(Q)} \|f - P_Q^d f\|_{L^q(Q)}$$

belə ki,  $q = \infty$ . Onda bütün  $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$  funksiyalar çoxluğu  $\tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$  Campanato fəzası adlanır, belə ki,  $\|f\|_{\tilde{L}_{q,\phi,d}} < \infty$ .  $\tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$  fəzasının elementləri  $d$  dərəcəli çoxhədlilər dəqiqliyi ilə faktor fəzadır, belə ki, bu mənada  $\tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$  fəzası Banax fəzasıdır. O zaman  $f \in \tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$  funksiyası ilə  $\{f + P : P \text{ çoxhədlisi } d \text{ dərəcəli çoxhədlidir}\}$  ailəsi ekvivalentdir.

$\tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$  fəzasının bir neçə xarakteristik xassələrini incələyək. Bir metod Littlewood-Paley xarakteristikasından istifadə etməklə alınır.

$\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  funksiyasını götürək, belə ki,

$$\chi_{B(4) \setminus B(2)} \leq \varphi \leq \chi_{B(8) \setminus B(1)}$$

və  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  və  $j \in \mathbb{Z}$  üçün

$$\varphi_j(D)f \equiv F^{-1}[\varphi(2^{-j} \cdot)Ff] \quad (f \in S'(\mathbb{R}^n)).$$

**Tərif 2.**  $(\mathcal{E}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n))$ . Fərz edək ki,  $1 \leq q \leq \infty$ . Tutaq ki,  $\phi : \mathcal{Q}' \rightarrow (0, \infty)$  təyin olunmuş funksiyadır.

$f \in S'(\mathbb{R}^n)$  funksiyası  $\mathcal{E}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  -yə daxildir əgər

$$\|f\|_{\mathcal{E}_{q,\phi}^D} \equiv \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ j \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{\phi(x, 2^{-j})} \left( \frac{1}{|Q(x, 2^{-j})|} \int_{Q(x, 2^{-j})} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi_j(D)f(y)|^2 \right)^{\frac{2}{q}} dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

burada  $\mathcal{Q}'$  kublar ailəsidir.

**Tərif 3.**  $(\tilde{L}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n))$ . Fərz edək ki,  $1 \leq q \leq \infty$ . Tutaq ki,  $\phi : \mathcal{Q}' \rightarrow (0, \infty)$  təyin olunmuş funksiyadır.  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  olan funksiyası  $L_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  -yə daxildir o zaman ki, əgər

$$\|f\|_{\tilde{L}_{q,\phi}^D} \equiv \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ j \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{\phi(x, 2^{-j})} \left( \frac{1}{|Q(x, 2^{-j})|} \int_{Q(x, 2^{-j})} |\varphi_j(D)f(y)|^q dy \right)^{1/q} < \infty$$

olsun.

Biz Hölder-Ziqmund normasından istifadə edərək başqa xarakteristikamı verə bilərik.

$\Delta_h^k$  operatorunu təyin edək, hansı ki, inductivliyi təyin olunub

$$\Delta_h^1 f = \Delta_h f \equiv f(\cdot + h) - f, \quad \Delta_h^k \equiv \Delta_h^1 \circ \Delta_h^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Fərz edək ki,  $\phi: \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  və  $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Onda  $\Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n)$  fəzası  $p(\cdot)$  exponent dəyişənli Hölder fəzası,  $f$  kəsilməz funksiyalardan təyin olunub, belə ki,  $\|f\|_{\Lambda_{\phi, d}} < \infty$ , harada ki,

$$\|f\|_{\Lambda_{\phi, d}} \equiv \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, \\ h \neq 0}} \frac{1}{\phi(x, |h|)} \left| \Delta_h^{d+1} f(x) \right|.$$

$\Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n)$  fəzasının elementləri  $d$  dərəcəli modul çoxhədlilərindən təşkil olunmuşdur, belə ki,  $\Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n)$  fəzası Banax fəzasıdır. O zaman  $f \in L_{\phi, d}(\mathbb{R}^n)$  funksiyası həmçinin  $\{f + P : P \text{ çoxhədlisi } d \text{ dərəcəli çoxhədlidir}\}$  ailəsindəndir.

**Teorem 1.** Fərz edək ki,  $\phi: \mathcal{Q}' \rightarrow (0, \infty)$  funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir.

(A1) İkiqat şərti.

$$(A2) \ C^{-1} \leq \frac{\phi(x, r)}{\phi(y, r)} \leq C, \quad (x, y \in \mathbb{R}^n, r > 0, |x - y| \leq r).$$

(A3)  $Z_1$  şərti.

Onda  $\Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n)$  və  $\tilde{L}_{q, \phi, d}(\mathbb{R}^n)$  fəzaları izomorfdurlar. Həmçini aşağıdakılar xassələr doğrudur:

$$1. \text{ Hər bir } f \in \Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n) \text{ üçün } \|f\|_{\tilde{L}_{q, \phi, d}} \leq \|f\|_{\Lambda_{\phi, d}}.$$

2.  $\tilde{L}_{q, \phi, d}(\mathbb{R}^n)$  hər bir elementini kəsilməz davam etdirmək olar. Belə ki, əgər

$$f \in \tilde{L}_{q, \phi, d}(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \text{ isə, onda } f \in \Lambda_{\phi, d}(\mathbb{R}^n) \text{ və } \|f\|_{\Lambda_{\phi, d}} \leq \|f\|_{\tilde{L}_{q, \phi, d}}.$$

**Teorem 2.** Fərz edək ki,  $\phi$  funksiyası (A1), (A2), (A3) şərtlərini ödəyir. Fərz edək ki,  $\phi$  funksiyası həmçinin aşağıdakı

$$(A4): \int_r^\infty \frac{\phi(x, t)}{t^{d+2}} dt \leq \frac{\phi(x, r)}{r^{d+1}} \text{ müəyyən tam } d \geq 0 \text{ və}$$

$$(A5): \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x, 1) < \infty$$

şərtlərini ödəyir. Onda aşağıdakılar doğrudur:

1.  $\tilde{L}_{q, \phi}^D(\mathbb{R}^n)$  və  $L_{q, \phi, d}(\mathbb{R}^n)$  fəzaları izomorfdur. Belə ki,

a) Fərz edək ki,  $f \in L_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$ . Onda,  $f$  funksiyasını elə  $L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$ -dən olan  $f$  funksiyasına tamamlamaq olar ki, və elə  $P \in \tilde{P}(\mathbb{R}^n)$  çoxhədlisi var ki, bu halda  $f - P \in \tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$ . Onda  $\|f - P\|_{\tilde{L}_{q,\phi,d}} \leq C\|f\|_{L_{q,\phi}^D}$  alarıq.

b) Əgər  $f \in \tilde{L}_{q,\phi,d}(\mathbb{R}^n)$ , onda  $f \in L_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  və  $\|f\|_{L_{q,\phi}^D} \leq C\|f\|_{\tilde{L}_{q,\phi,d}}$ .

$\tilde{L}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  fəzası  $\psi$  -nin seçilməsindən asılı deyil:  $\tilde{L}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  üçün hər bir  $\psi$  funksiyasını  $\chi_{Q(0,1)} \leq \psi \leq \chi_{Q(0,2)}$  münasibətdən müəyyən edəcəyik.

2.  $\tilde{L}_{q,\phi}^D(\mathbb{R}^n)$  fəzası  $q$ -dən asılı deyil.

## 2. f.-r.e.d., prof., a.e.i. S.K. Abdullayev.

İşdə Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu ümumiləşmiş sürüşmə ilə çoxölçülü sinqulyar operatorunun çəkili hölder fəzasında məhdudluğu məsələsi öyrənilmişdir. Buradaq nüvənin xarakteristikası polyusdan asılı olan hala baxılır.

Tutaq ki,  $R_m^+ = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in R_m : x_m > 0\}$ ,  $m \geq 2$ , evklid fəzasıdır,

$s_m^+ = \{x \in R_m^+ : |x| = 1\}$ ,  $T^s u(x) = C_\nu \int_0^\pi u(x' - s'; \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos \alpha + s_m^2}) \sin^{2\nu-1} \alpha d\alpha$  isə

$B_x^m = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{2\nu}{x_m} \frac{\partial}{\partial x_m}$  Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu ümumiləşmiş sürüşmədir,

burada  $\nu > 0$ ,  $x = (x', x_m)$ ,  $s = (s', s_m)$ ,  $x', s' \in R_{m-1}$ ,  $c_\nu = \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) / \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu)$

Tutaq  $\alpha > 0$ ,  $\beta$ - həqiqi ədəddir,  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \alpha - \gamma < 1$ ,  $0 < \beta + \gamma < m$  və

$\rho(x) = x_m^\alpha (1 + |x|)^{\beta-\alpha}$ ,  $x \in R_m^+$ .

Tərifə görə  $u \in H_{\alpha,\beta}^\gamma(R_m^+)$ , əgər  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)\rho(x) = 0$ ,  $\lim_{x_m \rightarrow 0} u(x)\rho(x) = 0$ , və

$$\|u\|_{H_{\alpha,\beta}^\gamma} = \sup_{x,y \in R_m^+} (|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| d^{-\gamma}(x,y)), d(x,y) = |x-y|(1+|x|)(1+|y|)^{-1}$$

norması sonludur.

İşdə aşağıdakı nəticə alınmışdır:

**Teorem.** Tutaq ki,  $0 < \gamma < \delta \leq 1$ ,  $0 < \alpha - \gamma < 1$ ,  $\beta + \gamma < m$ ,  $0 < \gamma \leq \mu$ ,  $f(x, \theta)$ ,  $x \in R_m^+$ ,  $\theta \in S_m^+$  məhduddur və

$$1) \forall x \in R_m^+, \int_{S_m^+} f(x, \theta) \theta_m^{2\nu} ds(\theta) = 0;$$

$$2) \text{ elə } K_\delta(f) > 0 \text{ var ki, } \forall x, y \in R_m^+, \forall \theta \in S_m^+, |f(x, \theta) - f(y, \theta)| < K_\delta(f) \cdot \varphi_\delta(x, y) \\ (\varphi_\delta = (|x - y| / \max(|x - y|, 1 + \min\{|x|; |y|\})))^\delta;$$

$$3) \text{ elə } C_f > 0 \text{ var ki, } \forall x \in R_m^+, \forall \theta_1, \theta_2 \in S_m^+ \quad |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| \leq c_f |\theta_1 - \theta_2|^\mu.$$

Onda ümumiləşmiş sürüşmə ilə

$$A: u \rightarrow Au(x) \equiv v.p. \int_{R_m^+} f(x, \theta) |s|^{-m-2\nu} [T^s u(x)] S_m^{2\nu} ds, \quad (2)$$

$$A_\varepsilon u(x) = \int_{\{s \in R_m^+ : |s| > \varepsilon\}} \frac{f(x, \theta)}{|s|^{m+2\nu}} [T^s u(x)] s_m^{2\nu} ds, \theta = s/|s|, \varepsilon > 0$$

çoxölçülü sinqulyar operatoru  $H_{\alpha, \beta}^\gamma(R_m^+)$ - çəkili Hölder fəzasında məhduddur.

### 3. f.-r.e.n., dos., apar. e.i. N.A. İlyasov.

Ики бирдәйишяшли периодик функцияларын Fурье əmsallarının mütləq qiymətlərinin və müəyyən çəki ardıcılıqlarının elementlərinin hasilərindən qurulmuş сыраларын qalıq hədləri terminlərində bu funksiyaların bürünməsinin hamarlıq modullarının yuxarıdan bəzi qiymətləndirilmələri alınmışdır. Müəyyən hallarda alınmış qiymətləndirmələrin tərtib mənada dəqiqliyi göstərilmişdir.

(II)  $L_p(T^m)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \geq 1$ ,  $T^m = (-\pi, \pi]^m$ ) fəzalarında periodik funksiyaların və onların törəmələrinin tam hamarlıq modulları üçün Marşo tipli bərabərsizliklərin verilmiş sinifdə tərtib mənasında dəqiqliyi göstərilmişdir.

Алынmış nəticələr “AMEA-ın Xəbərləri” jurnalında “ $L_p(T^m)$  fəzalarında Marşo tipli bərabərsizliklərin tərtib mənasında dəqiqliyi haqqında” adlı məqalə şəklində çap olunacaqdır (2014 il, LXXI cild, №3).

#### 4. f.-r.e.n., dos., apar. e.i. C.C. Həsənov və e.i. v.i.e. A.N. Məmmədova.

Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu maksimal, Riss potensialı və sinqulyar operatorların ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarda tədqiq edilmiş və onlar üçün çəkili bərabərsizliklər isbat edilmişdir.

$R^n$  fəzası  $n$  -ölçülü Evklid fəzasıdır, belə ki,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ ,  
 $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$ ,  $x = (x', x_n) \in R^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $R_+^n = \{x = (x', x_n) \in R^n; x_n > 0\}$ ,  
 $E(x, r) = \{y \in R_+^n : |x - y| < r\}$ ,  $E_r = E(0, r)$ ,  $\gamma > 0$ .

$E \subset R_+^n$  ölçülən çoxluğu üçün  $|E|_\gamma = \int_E x_n^\gamma dx$ , onda  $|E_r|_\gamma = \omega(n, \gamma)r^Q$ ,  $Q = n + \gamma$ , burada

$$\omega(n, \gamma) = \int_{E_1} x_n^\gamma dx = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

$T^x$  ümumiləşmiş sürüşmə (B-sürüşmə operatoru) operatorudur

$$T^x f(y) = C_\gamma \int_0^\pi f\left((x' - y'), (x_n^2 - 2x_n y_n \cos \beta + y_n^2)^{\frac{1}{2}}\right) d \sin^{\gamma-1} \beta d\beta,$$

burada,  $C_\gamma = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \omega(2n, \gamma)$ .

$B$  -maksimal operatoru aşağıdakı kimi təyin olunur

$$M_\gamma f(x) = \sup_{r>0} |E_r|_\gamma^{-1} \int_{E_r} [T^x |f(y)|] y_n^\gamma dy.$$

$B$  -Riss potensialı

$$I_{\alpha, \gamma} f(x) = \int_{R_+^n} [T^x f(y)] |y|^{\alpha-Q} y_n^\gamma dy, \quad 0 < \alpha < Q.$$

Fərz edək ki,  $\omega(x, r)$  funksiyası  $R_+^n \times (0, \infty)$  -da müsbət ölçülən çəki funksiyasıdır.

$M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasının norması aşağıdakı kimi təyin olunur

$$\|f\|_{M_{p, \omega, \gamma}} = \sup_{x \in R_+^n, t > 0} \frac{t^{-\frac{Q}{p}}}{\omega(x, t)} \|T^x |f|\|_{L_{p, \gamma}(E_t)}.$$

Əgər  $\omega(x, t) \equiv r^{-\frac{Q}{p}}$  olarsa onda  $M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n) \equiv L_{p, \gamma}(R_+^n)$ , əgər  $\omega(x, t) \equiv t^{-\frac{\lambda-Q}{p}}$ ,  $0 \leq \lambda < Q$ , onda

$M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n) \equiv M_{p, \lambda, \gamma}(R_+^n)$  olar.

**Teorem.** Fərz edək ki,  $1 \leq p < \infty$  və  $R_+^n \times (0, \infty)$ -da müsbət ölçülən  $\omega(x, r)$  çəki funksiyası aşağıdakı şərti ödəyir

$$\int_r^\infty \omega(x, t) \frac{dt}{t} \leq C\omega(x, r). \quad (1)$$

Onda  $p > 1$  üçün  $M_\gamma$  maksimal operatoru  $M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasından  $M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasına və  $p = 1$  olduqda  $M_\gamma$  maksimal operatoru  $M_{1, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasından  $WM_{1, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasına məhdud təsir edir.

$B$  - Morri fəzasında  $B$  -Riss potensialı üçün aşağıdakı Hardi-Litlvud-Sobolev teoremi doğrudur.

**Teorem.** Fərz edək ki,  $0 < \alpha < Q$  və  $1 \leq p < \frac{Q}{\alpha}$  şərti daxilində  $\omega$  funksiyası (1) şərtini ödəyir və

$$\int_t^\infty \omega(x, r) r^{\alpha-1} dr \leq C\omega(x, r) r^\alpha,$$

1) Əgər  $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$ ,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q}$  olarsa onda  $I_{\alpha, \gamma}$  operatoru  $M_{p, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasından  $M_{q, \omega^{q/p}, \gamma}(R_+^n)$  fəzasına məhdud təsir edir.

2) Əgər  $p = 1$ ,  $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q}$  olarsa onda  $I_{\alpha, \gamma}$  operatoru  $M_{1, \omega, \gamma}(R_+^n)$  fəzasından  $WM_{q, \omega^q, \gamma}(R_+^n)$  fəzasına məhdud təsir edir.

## 5. f.-r.e.n., dos., apar. e.i. R.Ə. Bəndəliyev və e.i. v.i.e. A.E. Abdullayeva.

Metrik fəzanın  $\varepsilon$ -örtüyü dedikdə diametrləri  $\varepsilon$ -dan böyük olan çoxluqları özündə saxlayan fəza nəzərdə tutulur. Əgər hər bir  $\varepsilon > 0$  üçün metrik fəzanın sonlu  $\varepsilon$ -örtüyü varsa onda deyirlər ki, bu fəza tamam məhduddur. Məlumdur ki, metrik fəzanın kompakt olması üçün zəruri və kafi şərt onun tamam məhdud olmasıdır.

Tutaq ki,  $p : R^n \rightarrow [1, \infty)$  olunmuş Lebeq mənada ölçülən funksiyadır və  $1 \leq \underline{p} \leq p(x) \leq \bar{p} \leq \infty$ , harada ki,  $\underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in R^n} p(x)$ ,  $\bar{p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in R^n} p(x)$  və  $\omega$  isə  $R^n$ -də təyin olunmuş çəki funksiyasıdır, yəni sanki bütün  $x \in R^n$  üçün  $0 < \omega(x) < \infty$  şərtini ödəyən ölçülən funksiyadır.

**Tərif.**  $L_{p(x), \omega}(R^n)$  ilə  $R^n$ -də təyin olunmuş və müəyyən bir  $\lambda_0 > 0$  üçün

$$\int_{R^n} \left( \frac{|f(x)|}{\lambda_0} \right)^{p(x)} \omega(x) dx < \infty$$

şərtini ödəyən ölçülən funksiyalar sinfini işarə edəcəyik. Bu fəzada norma

$$\|f\|_{L_{p(x),\omega}(R^n)} = \|f\|_{p(\cdot),\omega} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{R^n} \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} \omega(x) dx \leq 1 \right\}$$

ifadəsi vasitəsilə verilir. Bu fəza yuxarıda verilmiş normaya nəzərən Banax funksional fəzası təşkil edir.

$P^{\log}(R^n)$  ilə aşağıdakı şərtləri ödəyən dəyişən dərəcəli funksiyalar sinfini işarə edəcəyik:

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\ln|x-y|}, \quad 0 < |x-y| \leq \frac{1}{2} \quad \text{və} \quad |p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\ln(e+|x|)}, \quad |x| > 2.$$

Qeyd edim ki, bu şərtlərdən birincisi lokal Dini-Lipşits şərti, ikincisi isə bu şərtin sonsuzluq nöqtəsinin ətrafındakı analoqudur.

$A_{p(\cdot)} = \{ \omega \in L_1^{loc}(R^n) : \sup_B |B|^{-1} \|\omega^{1/p(\cdot)}\|_{L_{p(\cdot)}(B)} \|\omega^{-1/p(\cdot)}\|_{L_{p(\cdot)}(B)} < \infty \}$  -şərtini ödəyən çəki funksiyaları sinfini işarə edəcəyik. Bu sinif klassik Makenhoupt sinfinin dəyişən dərəcəli Lebeq fəzasındakı analoqudur.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

**Teorem 1.** Tutaq ki,  $p \in P^{\log}(R^n)$ ,  $\psi : R^n \rightarrow R$  və  $\psi \in L_1(R^n)$ . Fərz edək ki, istənilən

$\varepsilon > 0$  üçün  $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  və  $\Psi(x) := \sup_{|y| \geq |x|} |\psi(y)| \in L_1(R^n)$ . Onda aşağıdakı şərtlər doğrudur:

a)  $\Psi$  funksiyasından asılı olan  $\exists A > 0$  ədədi var ki, istənilən  $f \in L_{p(x),\omega}(R^n)$  üçün

$\sup_{\varepsilon > 0} |(f * \psi_\varepsilon)(x)| \leq 2A Mf(x)$ , harada ki,  $M$  Hardi-Littlvud maksimal operatorudur;

b) Əgər  $\int_{R^n} \psi(x) dx = 1$  olarsa, onda sanki bütün  $x \in R^n$  üçün  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \psi_\varepsilon = f * \psi$  olar.

Əlavə olaraq, əgər  $\bar{p} < \infty$  olarsa, onda  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \psi_\varepsilon - f\|_{p(\cdot),\omega} = 0$ .

**Teorem 2.** Tutaq ki,  $p \in P^{\log}(R^n)$ ,  $1 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$  və  $\omega \in A_{p(\cdot)}$ . Onda

$$\|f * \psi_\varepsilon\|_{p(\cdot),\omega} \leq 2A \|f\|_{p(x),\omega},$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki,  $A$  sabiti  $\varepsilon$  parametrindən və  $f$  funksiyasından asılı deyildir.

Dəyişən dərəcəli və çəkili Lebeq fəzasından olan çoxluğun kompaktlığı haqqında əsas teorem aşağıdakı şəkildədir.

**Teorem 3.** Tutaq ki,  $p \in P^{\log}(R^n)$ ,  $1 \leq \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ . Fərz edək ki,  $\omega(x)$  funksiyası  $R^n$ -də təyin olunmuş çəki funksiyasıdır və  $\omega \in A_{p(\cdot)}$ . Onda  $F$  çoxluğunun  $L_{p(x),\omega}(R^n)$  fəzasında tamam məhdud olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərin ödənməsidir:

- 1)  $F$  çoxluğu  $L_{p(x),\omega}(\mathbf{R}^n)$  fəzasında məhduddur, yəni  $\sup_{f \in F} \|f\|_{p(\cdot),\omega} < \infty$ ;
- 2) hər bir  $\varepsilon > 0$  üçün elə  $\eta > 0$  var ki, istənilən  $f \in F$  üçün  $\|f\|_{L_{p(\cdot),\omega}(|x|>\eta)} < \varepsilon$ ;
- 3) istənilən  $f \in F$  üçün  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \psi_\varepsilon - f\|_{p(\cdot),\omega} = 0$  münasibəti ödənilir.

### 6. f.-r.e.n., dos., apar. e.i. Z.V. Səfərov.

Hesabat dövründə Laplas-Bessel diferensial operatorunun doğurduğu sinqulyar inteqral operatorlar üçün Lebeq fəzasında çəkili bərabərsizliklər öyrənilmişdir. Sinqulyar inteqral operatorların bu fəzada məhdudluğunu göstərmək üçün çəki funksiyaları üzərinə kafi şərt tapılmışdır.

Qeyd edək ki, Laplas-Bessel diferensial operatoru aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \gamma_1 > 0, \dots, \gamma_k > 0, \quad k=1, \dots, n.$$

Tutaq ki,  $\mathbf{R}^n$   $n$ -ölçülü Evklid fəzası,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ -də vektorlar olsun,  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ ,  $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ ,  $x = (x', x'')$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ ,  $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-k}$ ,  $\mathbf{R}_{k,+}^n = \{x \in \mathbf{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_k > 0\}$ ,  $E(x, r) = \{y \in \mathbf{R}_{k,+}^n; |x - y| < r\}$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ ,  $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_k > 0$ ,  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ ,  $(x')^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\gamma_k}$ .

Fərz edək ki,  $S_{k,+} = \{x \in \mathbf{R}_{k,+}^n; |x| = 1\}$ , və Lebeq mənada ölçülən  $E \subset \mathbf{R}_{k,+}^n$  çoxluqları üçün  $|E|_\gamma = \int_E (x')^\gamma dx$ . Onda

$$|E(0, r)|_\gamma = \omega(n, k, \gamma) r^{n+|\gamma|},$$

burada  $\omega(n, k, \gamma) = |E(0, 1)|_\gamma$ .

Tutaq ki,  $\omega: \mathbf{R}_{k,+}^n \rightarrow \mathbf{R}$  funksiyası sanki hər yerdə müsbət və lokal cəmlənə bilən funksiyadır.

Belə funksiyaları çəki funksiyaları adlandıracağıq.  $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbf{R}_{k,+}^n)$  ilə  $\mathbf{R}_{k,+}^n$ -də təyin olunmuş, ölçülə bilən və aşağıdakı sonlu normaya malik  $f$  funksiyaları fəzasını işarə edəcəyik

$$\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}} = \left( \int_{\mathbf{R}_{k,+}^n} |f(x)|^p \omega(x) (x')^\gamma dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Ümumiləşmiş sürüşmə operatoru ( $B$  sürüşmə operatoru) aşağıdakı kimi təyin olunur

$$T^\gamma f(x) = C_{k,\gamma} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f((x', y')_\alpha, x'' - y'') d\nu(\alpha),$$

burada

$$C_{k,\gamma} = \pi^{\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}, \quad (x', x'') \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k},$$

$$(x', y')_{\alpha} = ((x_1, y_1)_{\alpha_1}, \dots, (x_k, y_k)_{\alpha_k}),$$

$$(x_i, y_i)_{\alpha_i} = \sqrt{x_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i + y_i^2}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

və  $d\nu(\alpha) = \prod_{i=1}^k \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_i$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Göstərmək olar ki, ümumiləşmiş sürüşmə operatoru

$T^\gamma$  Laplace-Bessel diferensial operatoru  $\Delta_B$  arasında sıx əlaqə var.

İşin əsas məqsədi ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun doğurduğu sinqulyar inteqral operatorun ( $B$  sinqulyar inteqral operatorun) norması üçün  $L_p$  -qiymətləndirməsi olmuşdur.

Sinqulyar inteqral aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$\begin{aligned} Tf(x) &= p.v. \int_{\mathbf{R}_{k,+}^n} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} [T^\gamma f(x)] (y')^\gamma dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}_{k,+}^n \setminus E(0,\varepsilon)} \frac{\Omega(\theta)}{|y|^{n+|\gamma|}} [T^\gamma f(x)] (y')^\gamma dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x), \end{aligned} \quad (1)$$

harada ki,  $\theta = y/|y|$ , və  $\Omega(\theta)$  xarakteristikası  $S_{k,+} = \{x \in \mathbf{R}_{k,+}^n : |x|=1\}$  yarımşferası üzərində təyin olunub və “ixtisar” şərtini ödəyir

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta) (\theta')^\gamma d\sigma(\theta) = 0.$$

**Teorem 1.** Fərz edək ki,  $B$  sinqulyar inteqralın  $\Omega(\theta)$  xarakteristikası üçün aşağıdakı xassələr doğrudur

$$\int_{S_{k,+}} \Omega(\theta) (\theta')^\gamma d\sigma(\theta) = 0, \quad C_0 = \sup_{\theta \in S_{k,+}} |\Omega(\theta)| < \infty. \quad (2)$$

Onda

$$\|Tf\|_{L_{p,\gamma}} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}}, \quad 1 < p < \infty,$$

burada  $C > 0$   $p$ ,  $k$ ,  $\gamma$  və  $n$ -dən asılıdır.

$B$  sinqulyar inteqralların çəkili  $L_p$  fəzasında məhdudluğu aşağıdakı teorem vasitəsilə verilir.

**Teorem 2.** Fərz edək ki,  $B$  sinqulyar inteqralın  $\Omega(\theta)$  xarakteristikası (2) xassələrini ödəyir. Bundan əlavə, fərz edək ki,  $\omega$  çəki funksiyasıdır və elə  $c_1 > 0$  sabiti var ki,

$$\sup_{2^{m-2} \leq |x| < 2^{m+1}} \omega(x) \leq c_1 \inf_{2^{m-2} \leq |x| < 2^{m+1}} \omega(x), \quad m \in \mathbb{Z}$$

və  $\omega \in A_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Onda aşağıdakı hökmlər doğrudur:

$i_1)$   $f$  və  $\varepsilon$ -dan asılı olmayan elə  $C_1$  sabiti var ki, ixtiyari  $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ ,  $1 < p < \infty$

üçün

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |T_\varepsilon f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx;$$

$i_2)$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f$  limiti  $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$  fəzasının norması mənasında başa düşülür

və  $Tf$  ilə işarə edəcəyik və

$$\int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |Tf(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)|^p \omega(x)(x')^\gamma dx.$$

$ii_1)$   $f$  və  $\varepsilon$ -dan asılı olmayan elə  $C_2$  sabiti var ki, ixtiyari  $f \in L_{1,\omega}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$  üçün

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n : |T_\varepsilon f(x)| > t\}} \omega(x)(x')^\gamma dx \leq \frac{C_2}{t} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)| \omega(x)(x')^\gamma dx.$$

$ii_2)$   $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f$  limiti  $L_{1,\omega,\gamma}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$  fəzasının norması mənasında başa düşülür

və  $Tf$  ilə işarə olunur və

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}_{k,+}^n : |Tf(x)| > t\}} \omega(x)(x')^\gamma dx \leq \frac{C_2}{t} \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} |f(x)| \omega(x)(x')^\gamma dx.$$

## 7. f.-r.e.n., dos., böy. e.i. M.Q. Hacıbəyov.

Bu il qrupun struktur xassələrini özündə saxlayan Jewett mənada kommutativ hiperqrupda ümumiləşmiş potensialın məhdudluq məsələləri öyrənilmişdir. Əldə olunan əsas nəticə belədir:

Tutaq ki,  $(K, *)$  Jewett mənada kommutativ hiperqrupdur,  $e$  hiperqrupun vahidi,  $\tilde{x}$  hiperqrupda  $x$ -in involyusiyası,  $T^x$  sürüşmə operatorudur və bu hiperqrupda  $\rho$  kvazi-metrikası və ikili şərtini ödəyən  $\lambda$  ölçüsü verilmişdir. Fərz edək ki, elə müsbət  $c_1, c_2$  və  $c_3$  sabitləri var ki, ixtiyari  $x, y \in K$  və  $r > 0$  üçün

$$\text{supp } T_{\chi^{B(e,r)}}^\lambda(\tilde{\cdot}) \subset B(x, c_1 r)$$

$$\lambda B(x, r) T_{\chi^{B(e, r)}}^{\lambda}(\tilde{y}) \leq c_2 \lambda B(x, r) \leq c_3 \lambda B(e, r)$$

şərtləri ödənilir. Əlavə olaraq fərz edək ki,  $1 < p < \infty$  və  $a = a(r)$  funksiyası  $[0, \infty)$ -da müsbət, sanki

artan, müəyyən  $0 < \beta < \frac{N}{p}$  üçün  $\frac{a(r)}{r^\beta}$  sanki azalandır və  $\int_0^1 \frac{a(t)}{t} dt < \infty$ . Onda

$$I_\alpha f(x) = \int_K T^x \left( \frac{a(\rho(e, y))}{\rho(e, y)^N} \right) f(\tilde{y}) d\lambda(y)$$

operatoru  $L^p(K, \lambda)$  Lebeq fəzasından  $L^\Phi(K, \lambda)$  fəzasına məhdud təsir edir, burada  $\Phi$  funksiyası özünün tərsi vasitəsilə təyin olunmuşdur:

$$\Phi^{-1}(r) = \int_0^r A \left( t^{-\frac{1}{N}} \right) t^{\frac{1}{p}-1} dt$$

$$\text{və } A(r) = \int_0^r \frac{a(t)}{t} dt.$$

### 8. k.e.i. v.i.e. L.R. Əliyeva.

Təqdim olunan işdə funksiyanın lokal ossilyasiya xarakteristikaları ilə hamarlıq modulları arasında bərabərsizliklər və onların inteqral operatorların xassələrinin öyrənilməsinə tətbiqi verilmişdir. Lokal cəmlənən funksiyanın lokal ossilyasiyası ilə onun  $L^p$  metrikasındakı hamarlıq modulu arasında bəzi bərabərsizliklər alınmışdır. Həmin bərabərsizliklərin köməyi ilə potensial tipli inteqral operator üçün müvafiq qiymətləndirmələr alınmışdır.

$\mathbf{R}^n$  ilə  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nöqtələrinin  $n$ -ölçülü hesabi fəzasını işarə edək. Fərz edək ki,  $B(a, r) := \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| \leq r\}$ , yəni  $B(a, r)$ -mərkəzi  $a \in \mathbf{R}^n$  nöqtəsində yerləşən və radiusu  $r > 0$  ədədinə bərabər olan qapalı kürədir. Qismən leksikoqrafik qaydada düzülmüş  $\{x^\nu\}$ ,  $|\nu| \leq k$ , qüvvət funksiyaları sistemində

$$(f, g) = \frac{1}{|B(0, 1)|} \int_{B(0, 1)} f(t) g(t) dt$$

skalyar hasilinə nəzərən ortoqonallaşdırma prosesini tətbiq edək; burada  $|E|$  ilə  $E \subset \mathbf{R}^n$

çoxluğunun Lebeq ölçüsü işarə edilmişdir,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ ,  $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$ ,

$|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$ ; həm də  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  və  $k$  ədədləri mənfi olmayan tam

ədədlərdir. Ortoqonallaşma prosesi nəticəsində alınan ortonormal sistemi  $\{\varphi_\nu\}$ ,  $|\nu| \leq k$ , kimi işarə edək.

$\mathbf{R}^n$ -də təyin olunmuş və modulunun  $p$ -ci qüvvəti ( $1 \leq p < \infty$ ) lokal cəmlənən olan bütün funksiyaların çoxluğunu  $L_{loc}^p(\mathbf{R}^n)$  ilə,  $\mathbf{R}^n$ -də lokal məhdud olan bütün funksiyaların çoxluğunu isə  $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}^n)$  ilə işarə edək.

$f \in L_{loc}^1(\mathbf{R}^n)$  funksiyasını götürək və aşağıdakı çoxhədliyə baxaq ([1], [2]):

$$P_{k,B(a,r)}f(x) := \sum_{|v| \leq k} \left( \frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} f(t) \varphi_v \left( \frac{t-a}{r} \right) dt \right) \varphi_v \left( \frac{x-a}{r} \right).$$

Asanlıqla görmək olar ki,  $P_{k,B(a,r)}f(x)$  çoxhədlisi  $\mathbf{R}^n$ -də verilmiş və dərəcəsi  $k$ -ni aşmayan çoxhədlidir. Belə çoxhədlilərin çoxluğunu  $P_k$  ilə işarə edək.

$f \in L_{loc}^p(\mathbf{R}^n)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) funksiyası üçün

$$O_k(f, B(a,r))_p = \|f - P_{k-1,B(a,r)}f\|_{L^p(B(a,r))}$$

işarələməsindən istifadə edəcəyik.  $O_k(f, B(a,r))_p$  kəmiyyətini  $f$  funksiyasının

$B(x,r)$  kürəsində  $L^p$  metrikasında  $k$  tətibli lokal ossilyasiyası adlandıracağıq.

$f \in L_{loc}^p(\mathbf{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $k \in \mathbf{N}$  götürək və aşağıdakı kəmiyyətə baxaq:

$$M_f^k(x;r)_p := \inf_{\pi \in P_{k-1}} |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \|f - \pi\|_{L^p(B(x,r))} \quad (r > 0, x \in \mathbf{R}^n).$$

Yoxlamaq olar ki,

$$\begin{aligned} M_f^k(x;r)_p \sim \Omega_k(f, B(x,r))_p &:= \left( \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - P_{k-1,B(x,r)}f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} O_k(f, B(x,r))_p. \end{aligned}$$

münasibəti doğrudur, yəni

$$\exists C_1 > 0, \exists C_2 > 0, \forall f \in L_{loc}^p(\mathbf{R}^n), \forall r > 0, \forall x \in \mathbf{R}^n:$$

$$C_1 \cdot M_f^k(x;r)_p \leq \Omega_k(f, B(x,r))_p \leq C_2 \cdot M_f^k(x;r)_p.$$

$\Omega_k(f, B(x,r))_p$  kəmiyyətinə  $f$  funksiyasının  $B(x,r)$  kürəsində  $L^p$  metrikasında  $k$  tətibli orta ossilyasiyası deyirlər.

Hesab edək ki,  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Aşağıdakı funksiyayı daxil edək:

$$M_f^k(r)_{pq} := \begin{cases} \|M_f^k(\cdot; r)_p\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}, & 1 \leq q < \infty \text{ olduqda,} \\ \sup_{x \in \mathbf{R}^n} M_f^k(x; r)_p, & q = \infty \text{ olduqda.} \end{cases}$$

Yoxlamaq olar ki,

$$f \in BMO(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow (f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n), M_f^1(\delta)_{1\infty} = O(1) \quad (\delta > 0)),$$

$$f \in BMO_\varphi \Leftrightarrow (f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n), M_f^1(\delta)_{1\infty} = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta > 0)).$$

$BMO(\mathbf{R}^n)$  və  $BMO_\varphi$  fəzalarının tərifləri üçün bax, məsələn, [2].

Məlumdur ki,  $f$  funksiyasının  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) metrikasında  $k$  tərtibli kəsilməzlik modulu (hamarlıq modulu) aşağıdakı bərabərliklə təyin edilir (bax: [3]):

$$\omega_f^k(\delta)_p := \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (\delta > 0),$$

burada  $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$ ,  $\Delta_h^k f = \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1} f)$ .

Hesabat dövründə aşağıdakı faktlar isbat edilmişdir.

**Teorem 1.** Hesab edək ki,  $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ , ( $1 \leq q \leq p \leq \infty$ ) ( $p = \infty$  halında hesab edilir ki,  $f$  funksiyası kəsilməz funksiyaya ekvivalentdir). Onda

$$M_f^k(\delta)_{qp} \leq C \cdot \omega_f^k(\delta)_p \quad (\delta > 0) \quad (1)$$

bərabərsizliyi doğrudur; burada  $C > 0$  sabiti  $f$  və  $\delta$ -dan asılı deyildir.

**Teorem 2.** Hesab edək ki,  $f \in L^q_{loc}(\mathbf{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q < \infty$  və

$$\int_0^1 \frac{M_f^k(t)_{qp}}{t} dt < +\infty.$$

Onda

$$\omega_f^k(\delta)_p \leq C \cdot \int_0^\delta \frac{M_f^k(t)_{qp}}{t} dt \quad (\delta > 0), \quad (2)$$

bərabərsizliyi doğrudur; burada  $C > 0$  sabiti  $f$  və  $\delta$ -dan asılı deyildir. Bundan əlavə,  $p = \infty$  halında  $f$  funksiyası kəsilməz funksiyaya ekvivalentdir.

**Teorem 3.** Əgər  $f \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)$ ,  $k \in \mathbf{N}$  olarsa, onda

$$\omega_f^k(\delta)_\infty \leq C \cdot M_f^k(\delta)_{\infty\infty} \quad (\delta > 0),$$

bərabərsizliyi doğrudur; burada  $C > 0$  sabiti  $f$  və  $\delta$ -dan asılı deyildir.

**Teorem 4.** Hesab edək ki,  $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$  və  $f$  funksiyası kəsilməz funksiya ekvivalentdir. Onda

$$C_1 \cdot \mathcal{M}_f^k(\delta)_{\infty\infty} \leq \omega_f^k(\delta)_\infty \leq C_2 \cdot \mathcal{M}_f^k(\delta)_{\infty\infty} \quad (\delta > 0),$$

bərabərsizliyi doğrudur; burada müsbət  $C_1$  və  $C_2$  sabitləri  $f$  və  $\delta$ -dan asılı deyildirlər.

İndi aşağıdakı potensial tipli inteqral operatora baxaq:

$$R_{\alpha,k}f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \left\{ K_\alpha(x-y) - \left( \sum_{|\nu| \leq k-1} \frac{x^\nu}{\nu!} D^\nu K_\alpha(-y) \right) X_{\{|t|>1\}}(y) \right\} f(y) dy,$$

burada  $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ ,  $0 < \alpha < n$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ ,  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  ədədləri mənfi olmayan tam ədədlərdir  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\nu! = \nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!$ ,

$$D^\nu g := \frac{\partial^{|\nu|} g}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \dots \partial x_n^{\nu_n}},$$

$X_{\{|t|>1\}}$  isə  $\{t \in \mathbf{R}^n : |t| > 1\}$  çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır.

Hesabat dövründə  $R_{\alpha,k}$  operatoru üçün  $M_f^k(r)_{pq}$  və  $\omega_f^k(\delta)_p$  metrik xarakteristikaları terminlərində A.Zygmund tipli qiymətləndirmələr alınmışdır.

L.R.Əliyeva 24.06.2014 tarixində riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru dissertasiyasını müdafiə etmişdir.

## II. TƏŞKİLATI HİSSƏ

- Hesabat müddətində şöbədə işlər təyin olunmuş elmi təşkilatı plana görə aparılıb. Şöbənin işçiləri ümuminstitut seminarlarında iştirak etmiş və məruzələrlə çıxış etmişlər.

- Şöbənin nəzdində fəaliyyət göstərən və akad. A.C.Hacıyevin rəhbərlik etdiyi "Harmonik analizin aktual məsələləri" adlı seminar müntəzəm olaraq hər həftənin ikinci günü işləyir. Bu seminar da S.K. Abdullayev, V.S. Quliyev, C.C. Həsənov, R.Ə. Bəndəliyev, A.E.Abdullayeva çıxış etmişlər. Burada, alınmış nəticələr və maraqlı mövzular müzakirə olunmuşdur. Bundan başqa, şöbənin nəzdində, iclasları həftədə bir dəfə keçirilən əlavə elmi seminar da fəaliyyət göstərir. Şöbənin seminarlarında V.S.Quliyev, C.C.Həsənov, R.Bəndəliyev, M.N.Ömərova, M.Hacıbəyov, Y.Məmmədov, A.E.Abdullayeva, A.N. Məmmədova və başqaları elmi məruzələrlə çıxış etmişlər.

- Şöbədə 10-u tam, 6-sı yarımştat olmaqla 16 əməkdaş çalışır. Şöbədə əməkdaşların 3-ü professor, 5-i dosent, 6-sı kiçik elmi işçi və vəzifəsini icra edən, 1- i böyük laborant və 1-i laborant vəzifəsində çalışır.

- Plana uyğun şöbədə 8 mövzuda tədqiqat işi aparılır.

- 2014-cü (2013) ildə şöbənin əməkdaşlarının 38 (33) işi çap olunmuş, 35 (25) iş isə çapa verilmişdir. Bunlardan 16 (13) məqalə indeksli jurnallarda, 6 (5) məqalə xarici nüfuzlu jurnallarda, 15 (5) məqalə respublika jurnallarında, 15 (10) tezis və material isə Respublika və Beynəlxalq miqyaslı konfransların məcmuələrində çap olunmuşdur. 2014-cü ildə şöbə əməkdaşlarının xarici elmi nüfuzlu jurnallarda 5 məqaləsi çapa qəbul olunmuşdur.

- Şöbənin əsas prioritet istiqaməti harmonik analizin müasir problemləridir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyevin 2014-cü ildə Ahi Evran universitetində Elmi araşdırmalar proyektini çərçivəsində BAP (PYO.FEN.4003.13.003; **4000 YTL**) və (PYO.FEN.4001.14.01; **4000 YTL**) qrant layihələri çalışmışdır. 2014-cü ildə şöbə əməkdaşlarının iştirakı ilə 1 layihə Elmin İnkişafı Fondunun və 1 layihə AMEA-nın keçirdiyi elmi tədqiqat proqramlarının müsabiqəsinə təqdim olunmuşdur.

- 2014-cü ildə şöbənin əməkdaşları AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Padova Universitetində (İtaliya) və Ahi Evran Universitetində (Türkiyə), dos. C.Həsənov RMİ-də, dos.M. Hacıbəyov RMİ-də oponent kimi müdafiə şurasında olmuşlar.

- Şöbənin aparıcı elmi işçisi dos.R. Bəndəliyev RMİ-nin doktorluq dissertasiya şurasının nəzdindəki xüsusi tematik seminarın elmi katibi, şöbənin aparıcı elmi işçisi dos. C.Həsənov isə bu seminarın üzvüdür.

- Şöbənin elmi işçisi L.R.Əliyeva 24.06.2014 tarixində riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru dissertasiyasını müdafiə etmişdir.

- Şöbənin aparıcı elmi işçisi dos. R. Bəndəliyev riyaziyyat üzrə elmlər doktoru dissertasiya işini RMİ-nin doktorluq dissertasiya şurasına təqdim etmiş, şuranın nəzdindəki xüsusi tematik seminardan keçmiş və ilin sonuna qədər müdafiəsi planlaşdırılır.

- Şöbənin doktorantı dos.Y.Məmmədov riyaziyyat üzrə elmlər doktoru dissertasiya işini RMİ-nin doktorluq dissertasiya şurasına təqdim etmişdir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Ankara Universiteti Matematik bölümündə (Ankara ş., Türkiyə) Ankara Universitetinin professoru Ayhan Serbetci, Kardif və Avrasiya Universitetlərinin professoru Viktor Burenkov və Kardif Universitetinin dosenti Dr. Tamara Tararykova ilə birgə elmi araşdırmalar aparmaq üçün 24.02.2014-07.03.2014 tarixlərində Ankara Universitetində elmi ezamiyyətdə olmuş və “Kəsr Hardi operatorunun Morri-tipli fəzalarda məhdudluğu” mövzusunda birgə elmi araşdırmalar aparılmışdır.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev 09.04.2014 tarixində AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında “Lokal və qlobal Morri tipli fəzalarda klassik inteqral operatorların məhdudluğu” mövzusunda çıxış etmişdir. Həmçinin, Prof. V.S.Quliyev 17.09.2014 tarixində AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında “Ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında klassik inteqral operatorların məhdudluğu və müəyyən tətbiqləri” mövzusunda çıxış etmişdir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Kırşehirdə (Türkiyə) Ahi Evran Universitetində mart ayında Prof. Yoshihiro Sawano (Tokio Metropoliten Universiteti, Yaponiya) ilə birlikdə "Workshop on Function Spaces and Applications" keçirmiş və birlikdə “*Generalized Hardy-Morrey spaces*” mövzusunda birgə elmi araşdırmalar aparılmışdır.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Kütahyada (Türkiyə) Dumlupınar Universitetində aprelin 14-dən 24-nə kimi Prof. Stefan Samko (Alvarge Universiteti, Portuqaliya) ilə birlikdə "Workshop on Function Spaces and Applications" keçirmiş və birlikdə “*Maximal, potential and singular operators in the generalized Orlicz - Morrey spaces*” mövzusunda birgə elmi araşdırmalar aparılmışdır. Bu çalışma əsnasında *F. Deringoz, V.S. Guliyev, Stefan Samko, Fractional Maximal and Potential Operators and Their Commutators in Vanishing Orlicz-Morrey Spaces. 2014, 1-19* məqaləsi hazırlanmış və Revista Matematica Complutense dərgisinə çapa verilmişdir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Kırşehirdə (Türkiyə) Ahi Evran Universitetində Department of Civil Engineering, Second University of Naples (Aversa, Italy) professoru Lubomira Softova ilə birgə elmi araşdırmalar aparmaq üçün 24.04.2014-08.05.2014 tarixlərində Ahi Evran Universitetində elmi ezamiyyətdə olmuş və bu araşdırma əsnasında *V.S. Guliyev, L. Softova, Generalized Morrey estimates for the gradient of divergence form parabolic operators with discontinuous coefficients. 2014, 1-19* məqaləsi hazırlanmış və çapa verilmişdir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Mayın 15-16-da Bakıda International Conference On Actual Problems On Mathematics And Informatics (**APMI 2013**), **Baku, Azerbaijan**, May 15-16, 2014 beynəlxalq konfransda iştirak etmiş və “*Boundedness of some classical operators on generalized Orlicz-Morrey spaces*” məruzə ilə çıxış etmişdir;

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Kırşehirdə (Türkiyə) 02.06.2014-06.06.2014 tarixlərində Ahi-Evran Universitetində elmi ezamiyyətdə olmuş, birgə elmi araşdırmalar aparılmışdır.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev iyunun 27-də İtaliyanın Padova Universitetində (Padova şəhəri) PhD fəlsəfə doktoru dissertasiya müdafiəsində komissar (opponent) kimi çıxış etmişdir. Qeyd edək ki, 2011 və 2013 –cü illərdə də Padova Universitetində (Padova şəhəri) PhD fəlsəfə doktoru dissertasiya müdafiəsində komissar (opponent) kimi çıxış etmişdir.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev İyunun 23-27-də Padova, İtaliyada *Mini-courses in Mathematical Analysis 2014*, Department of Pure and Applied Mathematics of the University of Padova, **Italy, June 23-27, 2014** (<http://minicourses.dmsa.unipd.it/>) beynəlxalq konfransda iştirak etmiş və “*Boundedness of some classical operators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces*” məruzə ilə çıxış etmişdir;

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev Kırşehirdə (Türkiyə) 09.10.2014-31.10.2014 tarixlərində Ahi-Evran Universitetində elmi ezamiyyətdə olmuş, birgə elmi araşdırmalar aparılmışdır. 15.10.2014 tarixində Ahi-Evran Universiteti Matematik bölümündə Okan Kuzunun “Schrodinqer operatorunun doğurduğu Marsinkeviç inteqral operatorunun Morri fəzalarında məhdudluğu” mövzusunda PhD fəlsəfə doktoru dissertasiyasının müdafiə komissiyasının üzvü olmuşdur.

- 2014-cü ildə AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev 0,656 impact factorlu “**Journal of function spaces**” jurnalının “**Morrey spaces and related function spaces**” xüsusi buraxılışının beynəlxalq redaksiya heyətinin üzvü olmuşdur.

- Akademik A.C. Hacıyevin əsas elmi nəticələri onun 100-dən çox impakt faktorlu və digər nüfuzlu beynəlxalq jurnallarda çap olunmuş məqalələrində öz əksini tapmışdır: **MathSciNet Mathematical reviews** də elmi əsərlərinə istinadlar **185**, **Google Scholar**da isə elmi əsərlərinə istinadların sayı **620** dir;

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyevin əsas elmi nəticələri onun 140-dən çox impakt faktorlu və digər nüfuzlu beynəlxalq jurnallarda çap olunmuş məqalələrində öz əksini tapmışdır: **MathSciNet Mathematical reviews** də elmi əsərlərinə istinadlar **270 (196)**, **Google Scholar**da isə elmi əsərlərinə istinadların sayı 1134 (**785**) dir;

- Dos. C.C. Həsənovun əsas elmi nəticələri onun 10-dən çox impakt faktorlu və digər nüfuzlu beynəlxalq jurnallarda çap olunmuş məqalələrində öz əksini tapmışdır: **MathSciNet**

**Mathematical reviews** də elmi əsərlərinə istinadlar **60**, **Google Scholar**da isə elmi əsərlərinə istinadların sayı 155-dir;

- Dos. R.Ə. Bəndəliyevin əsas elmi nəticələri onun 10-dən çox impakt faktorlu və digər nüfuzlu beynəlxalq jurnallarda çap olunmuş məqalələrində öz əksini tapmışdır: **MathSciNet Mathematical reviews** də elmi əsərlərinə istinadlar **11**, **Google Scholar**da isə elmi əsərlərinə istinadların sayı 65-dir;

- Riyazi analiz şöbəsinin əməkdaşlarına 2014-cü ildə olan isnadların sayı 400-dən çoxdur.

- Dos. R.Ə. Bəndəliyev 27.05.2014-03.06.2014 tarixində Rusiyanın Novorossiysk şəhərində keçirilən “**Ряды Фурье и их приложения**” adlı Beynəlxalq konfransda «Об ограниченности некоторых сублинейных операторов в весовых пространствах Лебега с переменными показателями» mövzusunda məruzəsi olmuşdur;

- Dos. R.Ə. Bəndəliyev 05.09.2014-06.09.2014 tarixində Gürcüstan Respublikasının Tbilisi şəhərində keçirilən “**Caucasian Mathematics Conference. CMC I**” adlı Beynəlxalq konfransda dəvətli gənc məruzəçi qismində “On a two-weighted inequality for certain sublinear operator in weighted Musielak-Orlicz spaces” məruzəsi ilə çıxış etmişdir.

#### **Şöbənin əməkdaşlarının xarici və yerli jurnallardan gələn məqalələrə yazdığı rəylər:**

1. Akademik A.Naciyev: 2 məqalə **Journal of Mathematical Inequalities** (Impact Factor – 0.770); 1 məqalə **Integral Transforms And Special Functions** (Impact Factor – 0.814); 2 məqalə **Positivity** (Impact Factor-0,682); 2 məqalə **Turkish Mathematical of Journal**, (Impact Factor-0,333); 1 məqalə **Journal of Applied Mathematics** (Impact Factor – 0.830) rəy verilmişdir;
2. AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev: 6 məqalə **Journal of Mathematical Inequalities** (Impact Factor – 0.770); 1 məqalə **Integral Transforms And Special Functions** (Impact Factor – 0.814); 1 məqalə **The Scientific World Journal** (Impact Factor – 1.730); 4 məqalə **Journal of Function Spaces** (Impact Factor – 0.656); 1 məqalə **Mathematische Nachrichten** (Impact Factor – 0.658); 1 məqalə **Complex Variables and Elliptic Equations** (Impact Factor – 0.650); 1 məqalə **Journal of Mathematical Analysis and Applications** (Impact Factor –1.119); 4 məqalə **Proc. Inst. Math. & Mech. (PIMM)** rəy verilmişdir;
3. Dos. R.Ə. Bəndəliyevə **Azerbaijan Journal of Mathematics** dərgidən 2 məqaləyə, **Journal of Mathematics Researcher** dərgidən 5 məqaləyə, **Proc. Inst. Math. & Mech. (PIMM)** dərgidən 2 məqaləyə, **Trans. of Nat. Acad. of Sci. of Azerb.** dərgidən 1 məqaləyə rəy verilmişdir;

4. Dos. C.C Həsənov **Turkish Journal of Mathematics** dərgidən 1 məqaləyə, **The Scientific World Journal** dərgidən 1 məqaləyə, **Journal of Inequalities and Applications** dərgidən 1 məqaləyə, **Pioneer Scientific Publisher** dərgidən 1 məqaləyə, **Journal of Function Spaces** (Impact Factor – 0.656) dərgidən 2 məqaləyə, **Journal of Mathematical Inequalities** (Impact Factor – 0.770) dərgidən 1 məqaləyə, **Proc. Inst. Math. & Mech. (PIMM)** dərgidən 1 məqaləyə, **Trans. of Nat. Acad. of Sci. of Azerb.** dərgidən 1 məqaləyə rəy vermişdir.

- Akademik A.C. Hacıyev "Azerbaijan Journal of Mathematics", "Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences" jurnallarının baş redaktoru, "Механико машин, механизмов и материалов" (Белорусия) beynəlxalq jurnalının və "Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Xəbərləri məcmuəsi" jurnalının redaksiya heyətinin üzvüdür.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev 2011-ci ildən indiyə kimi Respublika Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının riyaziyyat və mexanika üzrə ekspert şurasının üzvüdür.

- AMEA-nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev "Eurasian Mathematical Journals" beynəlxalq jurnalının, "Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan" respublika jurnalının, "AMEA-nın Xəbərləri" (Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası) jurnalının riyaziyyat və mexanika buraxılışının redaksiya heyətinin üzvüdür.

- Dos. R.Ə. Bəndəliyev Kanada elm və təhsil mərkəzi tərəfindən çap olunan "Journal of Mathematics Reshearch" beynəlxalq jurnalının redaksiya heyətinin üzvüdür.

**“Riyazi analiz” şöbəsinin müdiri**

**AMEA-nın müxbir üzvü,  
prof., V.S.QULIYEV**