НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АРЗУ РАМИЗ кызы САФАРОВА

БАЗИСНОСТЬ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1202.01 –Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2018

Работа выполнена на кафедре «**Математический анализ**» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана**.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, проф. **Садыг Велиев**

чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. **Билал Билалов**

Официальные оппоненты:

- профессор НАН Азербайджана, д.м.н. **Вугар Исмаилов**

(Института Математики и Механики НАНА);

- кандидат физико-математических наук, доц. **Рашид Алиев**

(Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 06 апреля 2018 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 16 феваралля 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д.01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из причин изучения аппроксимативных свойств конкретных систем функций в различных функциональных пространствах являются спектральные задачи относительно дискретных дифферен-циальных операторов. При рассмотрении обыкновенных дифференциальных операторов в большинстве случаев корневые элементы имеют асимптотики, главные части которых выражаются тригонометрическими системами. При решении серии уравнений в частных производных методом Фурье появляются аналогичные ситуации. Поэтому представляет особый научный интерес изучение аппроксимативных свойств, в частности базисных свойств (полнота, минимальность, базисность) систем типа экспонент, косинусов и синусов (а также их обобщений). В отличие от самосопряженного случая рассматриваемого оператора, если оператор является несамосопряженным, то картина более сложная. Даже имеет место случай, когда система из корневых элементов является полной и минимальной, но не образует базис в надлежащем пространстве. Поэтому представляет особый научный интерес изучение базисных свойств систем функций, связанных с дифференциальными операторами (являющиеся собственными функциями или же главными частями асимптотики собственных функций дифференциальных операторов), а также приобретение методы установления базисных свойств. Тема диссертационной работы имеет непосредственное отношение этим кругам вопросов. Рассматривается система экспонент с вырождающимися коэффициентами и связанная с ней краевая задача Римана. Поэтому она является актуальной и представляет особый научный интерес с точки зрения теории аппроксимации.

Приведем краткий обзор касающихся вопросов. Видимо первый пример базиса из экспонент с вырождающимся коэффициентом рассмотрен в работе К.И.Бабенко. Он доказал, что система $\left\{|t|^{\alpha} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ (Z -целые числа) образует базис в $L_2(-\pi,\pi)$ только тогда, когда $|\alpha|<\dfrac{1}{2}$. Этим он решил проблему Н.К.Бари о существовании нормированного базиса, не являющейся базисом Рисса. Причем при $\alpha\neq 0$ этот базис не является базисом Рисса.

Дальнейшее обобщение принадлежит Г.Ф.Гапошкину. П.И.Лизоркин и К.С.Казарян доказали, что система экспонент $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ образует базис в весовом пространстве $L_{2,\rho}(-\pi,\pi)$ тогда и только тогда, когда вес ρ удовлетворяет условию Макенхоупта. Отметим, что этот вопрос эквивалентен к вопросу о базисности системы $\left\{\omega e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ в $L_2(-\pi,\pi)$ с некоторым вырождением ω. Следует отметить, что базисные свойства системы экспонент с вырождающимся коэффициентом в обычном пространстве Лебега эквивалентны базисным свойствам системы экспонент в весовом пространстве Лебега с соответствующим весом. С этой точки зрения отметим работы Е.И.Моисеева, в которых найдены критерия базисности возмущенных систем синусов в весовом пространстве Лебега. Системы (тригонометрические) подобного вида возникают при решении методом Фурье серии уравнений в частных производных. Более подробно относительно этих результатов можно познакомиться в работах С.М.Пономарева, Е.И.Моисеева. Метод исследования базисности подобных систем впервые предложен А.В.Бицадзе. К этому кругу вопросов можно отнести работы В.А.Диткина, К.Шайдукова, А.Г.Тумаркина, А.А.Шкаликова, R.P.Feinerman, D.J.Neuman, C.J.Tranter, S.Martin, B.Noble, J.K.Whiteman, А.М.Седлецкий, Б.Т.Билалов.

Существенные результаты в этом направлении были получены в работах С.Г.Велиева. Им рассмотрена двойная система экспонент

$$\left\{A^{+}(t)\omega^{+}(t)e^{\mathrm{int}};\ A^{-}(t)\omega^{+}(t)e^{ikt}\right\}_{n\geq 0,\ k\geq 1}, \tag{1}$$

с вырождающимися коэффициентами $\omega^{\pm}$:

$$\omega^{\pm}(t)\equiv\prod_{i=1}^{l^{\pm}}\left\{\sin\left|\frac{t-\tau_i^{\pm}}{2}\right|^{\beta_i^{\pm}}\right\},$$

где $A^{\pm}$-комплекснозначные на $[-\pi,\pi]$ функции и $\left\{\tau_i^{\pm}\right\}\subset(-\pi,\pi)$, $\left\{\beta_i^{\pm}\right\}\subset R$ ($R-$действительная ось). С.Г.Велиевым найдены достаточные условия на вырождения $\omega^{\pm}$ и функции $A^{\pm}$, при выполнении которых система (1) образует базис (полна или минимальна) в $L_p(-\pi,\pi)$, $1\leq p<+\infty$. Если коэффициенты вырождения $\omega^{\pm}$ отсутствуют, то базисные свойства системы (1) в L_p полностью изучены в работах Б.Т.Билалова, найдены критерия относительно базисных свойств. Поэтому возникает вопрос о точности результатов, полученных в работах С.Г.Велиева. В диссертационной работе этот вопрос выясняется.

Цель работы. Получение необходимых условий относительно базисности вырождающейся системы экспонент; изучение полноты при более общем виде коэффициента; базисность Рисса вырождающейся системы экспонент в весовом пространстве; изучение разрешимости задачи Римана в весовых классах Харди с общим весом.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

-найдены необходимые условия на порядки вырождения относительно базисности вырождающейся системы экспонент в лебеговых пространствах;

-изучена полнота вырождающейся системы экспонент в лебеговых пространствах при более общем виде коэффициента вырождения;

-изучена базисность Рисса вырождающейся системы экспонент в весовом пространстве;

-определены весовые классы Харди с общим весом и доказаны их банаховость;

-найдено общее решение однородной задачи Римана в весовых пространствах Харди с общим весом;

-изучена разрешимость неоднородной задачи Римана в весовых пространствах Харди с общим весом.

Методы исследования. При получении основных результатов используются методы теории аппроксимации, методы теории базисов, методы теории краевых задач для аналитических функций в классах Харди.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер. Ими можно пользоваться в теории аппроксимации, а также при обосновании метода Фурье для решения уравнений в частных производных.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела “Негармонический анализ” ИММ НАНА (рук. чл.-корр. проф. Б.Т.Билалов), International conference on astronomy, physics and mathematics devoted to

International Astronomy Year (Nakhchivan, 2009), на межд. конф., посвящ. 80 лет. акад. Ф.Г.Максудова «Спектральная теория и ее приложения» (Баку, 2010), International Conference on Actual Problems of Mathematics and Informatics, dedicated to the 90th Anniversary of Heydar Aliyev (Baku, 2013), International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics “On Actual Problem of Mathematics and Mechanics”(Baku, 2014), 7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", MADEA-7 (Baku, 2015), International workshop on Non-harmonic analysis and Differential operators (Baku, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 73 наименования. Объем диссертации 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы.

В главе I рассматривается двойная система экспонент (1) с вырождениями $\omega^{\pm}(\cdot)$ и с комплекснозначными коэффициентами $A^{\pm}(\cdot)$. Получены необходимые условия для базисности этой системы в $L_p(-\pi,\pi)$. Более того, относительно полноты системы (1) в $L_p(-\pi,\pi)$ рассматривается наиболее общий случай , а именно вырождения на концах отрезки $[-\pi,\pi]$ тоже допускаются. Кроме того, рассматривается вопрос базисности Рисса вырождающейся системы (1) в весовом пространстве $L_{2,\rho}(-\pi,\pi)$. Доказывается, что в этом случае базисность Рисса может иметь место.

В 1.1 приводятся необходимые понятия и сведения, некоторые основные понятия и факты из теории базисов, используемые в диссертационной работе. Ради облегчения чтении приведем некоторые основные понятия теории базисов.

Полнота. Пусть $(X;\tau)-$ линейное топологическое пространство.

Система $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *называется полной в* X *, если* $\overline{L[\{x_n\}_{n\in N}]} = X$.

Критерием для полноты является следующая

Теорема 1. *Пусть* $(X;K;\|\cdot\|)-$ *нормированное пространство. Система* $\{x_n\}_{n\in N}$ *полна в* $X \Leftrightarrow$ *для* $\forall f \in X^*$: $f(x_n)=0$, $\forall n\in N$, *следует, что* $f=0$.

Минимальность. Пусть $(X;\tau)-$ линейное топологическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ $-$ некоторая система.

Она называется минимальной в X *, если* $x_k \notin \overline{L[\{x_n\}_{n\in N_k}]}$, $\forall k\in N$ *, где* $N_k = N\setminus\{k\}$.

Определение 2. *Система* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *называется базисом в* X *, если для* $\forall x\in X$, $\exists!\{\lambda_n\}_{n\in N} \subset K$:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n ,$$

т.е. $\sum_{n=1}^{m}\lambda_n x_n \to x$ *при* $m\to\infty$ *по топологии* X .

Нам понадобится также некоторые сведения из теории краевых задач для аналитических функций.

Класс Харди H_p^+. H_p^+ ($p>0$), состоит из аналитических внутри единичного круга $U\equiv\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt<+\infty .$$

Норма в H_p^+ при $p\ge 1$ определяется выражением

$$\|f\|_{H_p^+}=\sup_{0\le r<1}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p}<+\infty .$$

Относительно этой нормы H_p^+ является B-пространством (при $p=2$ H - пространством).

Определим класс ${}_mH_p^-$, аналитических вне единичного круга функций. Пусть $f(z)-$аналитическая вне U функция, которая имеет конечный порядок не выше m на бесконечности, т.е. $f(z)=\sum_{-\infty}^{m_0} a_k z^k$, $|z|>1$, где $m_0 \le m$. Итак, пусть $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где $f_1(z)-$главная часть, а $f_2(z)-$ правильная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Если функция $\varphi(z)\equiv \overline{f_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ принадлежит классу $H_p^+\ (p>0)$, то будем говорить, что $f(z)\in {}_mH_p^-$. Класс ${}_{-1}H_p^-$ обычно обозначают как H_p^-. Многие свойства функций из класса H_p^+ без труда переносятся на функции из ${}_mH_p^-$.

1.2 посвящен изучению необходимых условий базисности системы экспонент с вырождением.

Относительно системы (1) будем предполагать выполненными следующие условия.

1) $\left|A^{\pm}(t)\right|\in L_\infty(-\pi,\pi)$, и имеет место

$$\max\left\{\left\|A^{\pm}(t)\right\|_\infty;\left\|A^{\pm}(t)\right\|_\infty^{-1}\right\}<+\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty -$обычная норма в $L_\infty(-\pi,\pi)$;

2) $\alpha^{\pm}(t)-$кусочно-гельдеревы функции на отрезке $[-\pi,\pi]$: $\{s_k\}_1^r\subset(-\pi,\pi)$ множество точек разрывов функции $\theta(t)\equiv\alpha^-(t)-\alpha^+(t)$ на $[-\pi,\pi]$.

Пусть

$$h_k=\theta(s_k+0)-\theta(s_k-0),\ k=\overline{1,r};$$

скачки функции $\theta(t)$ в точках s_k.

3) имеют место следующие пересечения

$\{t_k^+\}_1^{r^+} \cap \{t_k^-\}_1^{r^-} = \varnothing$; $\{t_k^+\}_1^{r^+} \cap \{s_k\}_1^{r} = \varnothing$; $\{t_k^-\}_1^{r^-} \cap \{s_k\}_1^{r} = \varnothing$.

В этом параграфе доказывается необходимость выполнения условий типа неравенств относительно показателей $\beta_k^{\pm}$ вырождений $\omega^{\pm}(t)$ для базисности (1) в $L_p(-\pi,\pi)$.

Положим $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$. В работе С.Г. Велиева доказано, что если выполнены условия 1)-3) и имеют место неравенства

$$-\frac{1}{p} < \beta_k^{\pm} < \frac{1}{q},\ k = \overline{1, r^{\pm}}; \tag{2}$$

$$-\frac{2\pi}{q} < h_k < \frac{2\pi}{p},\ \ k = \overline{0, r},$$

то система (1) образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$. В этом параграфе доказывается, что выполнения неравенств (2) являются необходимыми для базисности системы (1) в $L_p(-\pi,\pi)$. А именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)-3). Если система (1) образует базис в* $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, *то относительно показателей* $\{\beta_k^{\pm}\}$ *выполнены неравенства (2).*

В 1.3 рассматривается наиболее общий случай степенного веса вида

$$\omega^{\pm}(t) \equiv |t-\pi|^{\beta^{\pm}} |t+\pi|^{\gamma^{\pm}} \prod_{k=1}^{r^{\pm}} |t - t_k^{\pm}|^{\beta_k^{\pm}},\ \{t_k^{\pm}\}_1^{r^{\pm}} \subset (-\pi,\pi).$$

Нам понадобятся весовые классы Харди $H_{q,\nu^{\pm}}^{\pm}$. Введем эти классы. Положим

$$\tilde{H}^{+} \equiv \left\{ f \in H_1^{+} : f^{+} \in L_{q,\nu^{+}} \right\},$$

где $H_1^{\pm}$ – обычные классы Харди внутри и вне единичного круга, соответственно, ν^{+} некоторая весовая функция, $L_{q,\nu^{+}}$ – обычный весовой класс Лебега на $(-\pi,\pi)$, $f^{+}(e^{it})$ – некасательные граничные значения функции $f \in H_1^{+}$. Введем норму в классе $\tilde{H}^{+}$:

$$\left\| f \right\|_{\widetilde{H}^+} \equiv \left\| f^+\left(e^{it}\right) \right\|_{q,\nu^+}, \tag{3}$$

где $\left\| \cdot \right\|_{p,\nu^+}$ – обычная норма в L_{p,ν^+}. Справедливо

Утверждение 4. *Пусть* $\left|\nu^+\right|^{-\frac{p}{q}} \in L_1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $1 \le q < +\infty$. *Тогда пространство* $\widetilde{H}^+$ *относительно нормы (3) является банаховым.*

Соответствующее банахово пространство обозначим через H^+_{q,ν^+}.

Пусть ${}_mH_1^-$ класс Харди аналитических вне единичного круга функций, имеющих на бесконечности порядок не выше m. Примем

$$\widetilde{H}^- \equiv \left\{ f \in {}_m H_1^- : f^-\left(e^{it}\right) \in L_{q,\nu^-} \right\},$$

где ν^- – некоторая весовая функция. Аналогичное утверждение имеет место и в этом случае.

Утверждение 5. *Пусть* $\left|\nu^-\right|^{-\frac{p}{q}} \in L_1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $1 \le q < +\infty$. *Тогда пространство* $\widetilde{H}^-$ *относительно нормы*

$$\left\| f \right\|_{\widetilde{H}^-} \equiv \left\| f^+\left(e^{it}\right) \right\|_{q,\nu^-},$$

является банаховым и его обозначим через ${}_mH^-_{q,\nu^-}$.

Положим

$$G\left(e^{it}\right) \equiv \frac{\omega^+(t)A^+(t)}{\omega^-(t)A^-(t)e^{-it}}.$$

Пусть $T^\pm \equiv \left\{t_k^\pm\right\}_{k=1}^{r^\pm}$, $S \equiv \left\{s_k\right\}_1^r$. Объединение $T^+ \cup T^- \cup S$ обозначим через $\left\{\sigma_k\right\}_1^m$. Через $T_k^\pm$ обозначаем одноточечное множество $\left\{t_k^\pm\right\}$ с элементом $t_k^\pm$. Аналогичные обозначения вводим для $S_k \equiv \left\{s_k\right\}$ и $\Omega_k = \left\{\sigma_k\right\}$. Нам понадобится следующая функция множеств

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & A \ne \varnothing, \\ 0, & A = \varnothing, \end{cases}$$

где $\varnothing -$пустое множество. Примем

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k^{\pm} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r^{\pm}} \beta_i^{\pm}\chi\left(T_i^{\pm}\cap\Omega_k\right),\ k=\overline{1,m}; \\ \lambda_k &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{r} h_i\chi\left(S_i\cap\Omega_k\right),\ k=\overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Окончательно для $Y(t)$ получаем

$$Y(t)\sim\left|t-\sigma_k\right|^{\gamma_k},\ \text{при}\ \ t\to\sigma_k,\ k=\overline{1,m}\,, \tag{5}$$

где

$$\gamma_k=\lambda_k^{+}+\lambda_k^{-}+\lambda_k\,.$$

Справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия 1); 2) и величины* $\{\gamma_k\}_1^{\partial}$ *определены из соотношений (4), (5). Если имеют место неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{p}<\gamma_k<\frac{1}{q},\ k=\overline{1,m}; \\ &-\frac{2}{p}<\beta^{+}+\beta^{-}+\frac{h_\pi}{\pi}<\frac{2}{q};-\frac{2}{p}<\gamma^{+}+\gamma^{-}+\frac{h_\pi}{\pi}<\frac{2}{q}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то общее решение задачи сопряжения

$$F^{+}(\tau)-G(\tau)F^{-}(\tau)=0,\ \left|\tau\right|=1, \tag{7}$$

в классе $H^{+}_{q,\nu^{+}}\times_m H^{-}_{q,\nu^{-}}$ *имеет вид*

$$F(z)=Z(z)P_m(z),$$

где $Z(z)-$ *каноническое решение,* $P_m(z)-$ *произвольный полином степени не выше* m .

Из этой теоремы непосредственно следует

Следствие 7. *Пусть выполнены все условия Теоремы 6. Тогда задача (7) в классе* $H^{+}_{q,\nu^{+}}\times_{-1} H^{-}_{q,\nu^{-}}$ *только тривиально разрешима.*

Итоговым результатом является следующая

Теорема 8. *Пусть выполнены условия 1); 2) и имеют место неравенства (6). Тогда система (1) полна в* L_p, $1<p<+\infty$, *если*

$$\beta^{\pm};\gamma^{\pm};\beta_k^{\pm} > -\frac{1}{p},\ k=\overline{1,r^{\pm}}\ .$$

В главе II рассматривается краевая задача Римана теории аналитических функций в весовых классах Харди с общим весом. При определенных условиях на коэффициент и вес доказывается фредгольмовость этой задачи.

В 2.1 приводятся краткий обзор касающихся вопросов и основные обозначения, используемые в этой главе.

Будем пользоваться условием Макенхоупта A_p для веса ν:

$$\sup_{I\subset[-\pi,\pi]}\left(\frac{1}{|I|}\int_I \nu(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I [\nu(t)]^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1} < +\infty,\ 1 < p < +\infty,$$

где sup берется по всем интервалам $I\subset[-\pi,\pi]$ и $|I|-$ лебегово мера I. Нам также понадобятся следующие весовые классы Харди.

Через H_p^+ обозначаем обычный класс Харди аналитических в ω функций. Пусть **A** σ-алгебра борелевых множеств из $[-\pi,\pi]$ и $\rho-$мера на **A** . $L_{p;d\rho}\equiv L_{p;d\rho}(-\pi,\pi)-$ банахово пространство **A** измеримых функций на $[-\pi,\pi]$ с нормой

$$\|f\|_{p;d\rho} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим

$$\tilde{H} \equiv \left\{f\in H_1^+ : f^+ \in L_{p;d\rho}\right\},$$

где $f^+(e^{it})$ некасательные граничные значения функции f на $\partial\omega$. Примем норму в $\tilde{H}$:

$$\|f\|_{\tilde{H}} = \left\|f^+(e^{it})\right\|_{p;d\rho}.$$

Справедлива

Теорема 9. *Пусть имеет место непрерывное вложение* $L_{p;d\rho}\subset L_1$, $1\le p<+\infty$. *Тогда* $H^+_{p,d\rho}$ *является банаховым пространством.*

Аналогичный весовой класс определяем относительно внешности круга ω. Пусть ${}_mH_p^-$ обычный класс Харди аналитических вне ω функций, имеющих полюс в бесконечно удаленной точке порядка не выше m. Примем

$$\tilde{H}^- \equiv \left\{ f \in {}_m H_1^- : f^-(e^{it}) \in L_{p,d\rho} \right\},$$

где $f^-\left(e^{it}\right) = f/_{\partial\omega} -$ некасательные граничные значения f на $\partial\omega$ извне ω. Определим норму в $\tilde{H}^-$:

$$\| f \|_{\tilde{H}^-} \equiv \left\| f^-\left(e^{it}\right) \right\|_{p;d\rho}, \ \forall f \in \tilde{H}^-.$$

Справедлива

Теорема 10. *Пусть* $L_{p;d\rho} \subset L_1$. *Тогда выше определенное пространство* ${}_mH_{p;d\rho}^-$ *является банаховым.*

В 2.2 рассматривается однородная задача Римана в весовых классах Харди и находится общее решение при определенных условиях на весовую функцию и коэффициент задачи.

В дальнейшем будем считать, что мера ρ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $[-\pi, \pi]$ и пусть $d\rho = \vartheta dx$. Соответствующие пространства будем обозначать через $L_{p;\vartheta}$ и $H_{p;\vartheta}^{\pm}$. Рассмотрим следующую однородную задачу Римана

$$F^+(\tau) - G(\tau)F^-(\tau) = 0, \ \tau \in \partial\omega, \tag{8}$$

где $G: \partial\omega \to C -$ некоторая комплекснозначная функция (коэффициент задачи).

Далее будем предполагать, что G удовлетворяет следующим условиям.

$\alpha)$ $G^{\pm 1} \in L_\infty(\partial\omega)$;

$\beta)$ $\theta(t) \equiv \arg G\left(e^{it}\right) -$ кусочно-гельдерева функция на $[-\pi, \pi]$ и $-\pi < s_1 < ... < s_r < \pi -$ соответствующие точки разрывов.

Предположим, что выполнено соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |w(t)|^q \vartheta^{-\frac{q}{p}} dt < +\infty \ , \tag{9}$$

где

$$w(t)=\left|\sin\frac{t-\pi}{2}\right|^{\frac{h_0}{2\pi}}\prod_{k=1}^{r}\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\frac{h_k}{2\pi}}. \qquad (10)$$

Требуем выполнения следующих неравенств

$$h_k<2\pi,\ k=\overline{0,r}. \qquad (11)$$

Пусть так же имеет место соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi}|w(t)|^{-p}\,\vartheta(t)dt<+\infty. \qquad (12)$$

Справедлива следующая

Теорема 11. *Пусть коэффициент* $G(\tau)$ *задачи (8) удовлетворяет условиям* $\alpha);\beta)$. *Предположим, что скачки функции* $\theta(t)\equiv\arg G(e^{it})$ *удовлетворяют соотношениям (9), (11), (12), где* $w(t)$ *определена выражением (10). Тогда общее решение однородной задачи Римана (8) в классах* $H^{+}_{p;\vartheta}\times_m H^{-}_{p;\vartheta}$ *представимо в виде* $F(z)\equiv Z(z)P_m(z)$, *где* $Z(z)-$ *каноническое решение,* $P_m(z)-$ *произвольный полином степени* $\le m$.

Из этой теоремы непосредственно следует следующее

Следствие 12. *Пусть выполнены все условия Теоремы 11. Тогда задача (8) в классах* $H^{+}_{p;\vartheta}\times_m H^{-}_{p;\vartheta}$ *при условии* $F^{-}(\infty)=0$ *имеет только тривиальное, т.е. нулевое решение.*

В 2.3 рассматривается неоднородная задача Римана в весовых классах Харди и находится общее решение при определенных условиях на весовую функцию и коэффициент задачи.

Рассмотрим неоднородную задачу Римана

$$F^{+}(\tau)-G(\tau)F^{-}(\tau)=g(\tau),\ \tau\in\partial\omega, \qquad (13)$$

где $g\in L_{p;\vartheta}-$ заданная функция. Под решением задачи (13) понимается пара

$$\left(F^{+}(z);F^{-}(z)\right)\in H^{+}_{p;\vartheta}\times_m H^{-}_{p;\vartheta},$$

для которой граничные значения $F^{\pm}(\tau)$ п.в. на $\partial\omega$ удовлетворяют соотношению (13).

Справедлива следующая

Теорема 13. *Пусть коэффициент* $G(\tau)$ *задачи (13) удовлетворяет условиям* $\alpha);\beta)$. *Предположим, что скачки функции* $\theta(t)\equiv\arg G(e^{it})$ *удовлетворяют соотношениям (9), (11), (12), где весовая функция* $w(t)$ *определена выражением (10). Пусть* $\nu\in A_p$, $1<p<+\infty$, *где* $\nu(t)=w^{-p}(t)\vartheta(t)$ *и* $\vartheta^{-\frac{q}{p}}\in L_1$. *Тогда неоднородная задача Римана (13) разрешима в классах* $H^+_{p;\vartheta}\times_m H^-_{p;\vartheta}$, *если имеют место условия ортогональности*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(e^{i\sigma})}{Z^+(e^{i\sigma})}e^{in\sigma}d\sigma=0,\ n=\overline{1,-m}. \tag{14}$$

При $m\geq 0$ *общее решение задачи (13) представимо в виде*

$$F(z)=Z(z)P_m(z)+F_1(z), \tag{15}$$

где $Z(z)-$ *каноническое решение однородной задачи,* $P_m(z)$ *произвольный полином степени* $\leq m$, *а* $F_1(z)$ *определяется выражением* $F_1(z)\equiv\frac{Z(z)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(e^{i\sigma})}{Z^+(e^{i\sigma})}\frac{d\sigma}{1-ze^{-i\sigma}}$. *Более того, при* $m\leq -1$ *задача (13) однозначно разрешима и при* $m=-1$ *она имеет решение при* $\forall g\in L_{p;\vartheta}$.

Рассмотрим частный случай

$$\vartheta(t)=\prod_{k=1}^{m}\left|t-t_k\right|^{\alpha_k}, \tag{16}$$

где $\{t_k\}_1^m\subset(-\pi,\pi)-$ различные точки. Для простоты вычислений будем считать, что имеет место

$$\{s_k\}_1^r\cap\{t_k\}_1^m=\varnothing. \tag{17}$$

В этом случае вес $\nu(t)$ имеет вид

$$\nu(t)\equiv\left|\sin\frac{t-\pi}{2}\right|^{-\frac{ph_0}{2\pi}}\prod_{k=1}^{r}\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{-\frac{ph_k}{2\pi}}\prod_{k=1}^{m}\left|t-t_k\right|^{\alpha_k}.$$

Известно, что $\nu\in A_p$ только тогда, когда

$$-1<-\frac{ph_k}{2\pi}<p-1,\ k=\overline{0,r};\ -1<\alpha_k<p-1,\ k=\overline{1,m}\ . \qquad (18)$$

Следовательно

$$-\frac{1}{q}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p},\ k=\overline{0,r}\ . \qquad (19)$$

Имеют место

$$-1<-\alpha_k\frac{q}{p}<q-1,\ k=\overline{1,m}\ .$$

Из этих соотношений непосредственно следует, что условия (9), (11), и (12) выполнены. Очевидно, что выполнено и соотношение $\vartheta\in L_1$. В результате из Теоремы 13 получаем следующее

Следствие 14. *Пусть* $G(\tau)$ *удовлетворяет условиям* $\alpha);\beta)$ *и имеют место соотношения (17)-(19). Тогда общее решение задачи Римана (13) выражается формулой (15) в классах* $H^{+}_{p;\vartheta}\times_m H^{-}_{p;\vartheta}$, *где вес* ϑ *имеет вид (16). При* $m<0$ *для разрешимости необходимо выполнение условий ортогональности (14). Тогда задача однозначно разрешима и в этом случае* $P_m(z)\equiv 0$. *При* $m\geq 0$ *однородная задача имеет* m *линейно независимых решений и неоднородная задача разрешима при* $\forall g\in L_{p;\vartheta}$. *При* $m=-1$ *неоднородная задача однозначно разрешима при* $\forall g\in L_{p;\vartheta}$.

В 2.4 рассматривается вопрос базисности частей экспонент

$$\left\{e^{\operatorname{int}}\right\}_{n\in Z_+},$$

$$\left\{e^{-\operatorname{int}}\right\}_{n\geq m},$$

в весовых пространствах $H^{+}_{p,d\rho}$ и ${}_mH^{-}_{p,d\rho}$, соответственно. Эти факты нужны при изучении базисности возмущенной системы экспонент с фазой в весовых пространствах Лебега $L_{p,d\rho}$. Следует отметить, что для базисности системы экспонент $\left\{e^{\operatorname{int}}\right\}_{n\in Z}$ в $L_{p,d\rho}$ необходимо, чтобы весовая функция $\rho(\cdot)$ была абсолютно непрерывной на $[-\pi,\pi]$.

Базисность системы экспонент в $L_{p,\nu}$. Рассмотрим весовое пространство $L_{p,\nu}$, $1<p<+\infty$, где $\nu(\cdot)-$некоторая весовая функция. Предположим, что $\nu(\cdot)$ удовлетворяет условию Макенхоупта

$$\sup_{I\subset[-\pi,\pi]}\left(\frac{1}{|I|}\int_I \nu(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I |\nu(t)|^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1}<+\infty .$$

Устанавливается, что справедливо следующее

Утверждение 15. *Пусть* $\nu\in A_p$. *Тогда система экспонент* $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ *образует базис (при* $p=2$ *она образует базис Рисса только тогда, когда* $\nu\sim 1$*) в* $L_{p,\nu}$.

Справедлива

Теорема 16. *Пусть* $\nu\in A_p, 1<p<+\infty$. *Тогда : i) система* $\{z^n\}_{n\in Z_+}$ *(*$\{e^{int}\}_{n\in Z_+}$*) образует базис в* $H^+_{p,\nu}$ *(в* $L^+_{p,\nu}$*); ii) система* $\{z^{-n}\}_{n\ge m}$ *(*$\{e^{-int}\}_{n\ge m}$*) образует базис в* ${}_mH^-_{p,\nu}$ *(*${}_mL^-_{p,\nu}$*). При* $p=2$ *эти базисы являются рисcовыми только тогда, когда* $\nu\sim 1$ *на* $[-\pi,\pi]$.

Базисы из возмущенной системы экспонент в $L_{p,\nu}$. Рассмотрим следующую систему экспонент

$$\left\{e^{i\left(nt-\frac{1}{2}\theta(t)sign\, n\right)}\right\}_{n\in Z_+}, \qquad (20)$$

где $\theta(t)-$кусочно-гельдерева функция на сегменте $[-\pi,\pi]$. Пусть $\{s_k\}_1^r$: $-\pi<s_1<...<s_r<\pi-$ точки разрыва функции $\theta(\cdot)$ и $h_k=\theta(s_k+0)-\theta(s_k-0)$, $k=\overline{1,r}$, соответствующие скачки $\theta(\cdot)$ в этих точках. Положим $h_0=\theta(-\pi)-\theta(\pi)$. Обозначим через $\omega(\cdot)$ следующую весовую функцию

$$\omega(t)\equiv\left|\sin\frac{t-\pi}{2}\right|^{\frac{h_0}{2\pi}}\prod_{k=1}^r\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\frac{h_k}{2\pi}} .$$

Справедлива следующая

Теорема 17. *Пусть выполнены следующие неравенства*

$$\{\nu;\omega^{-p}\nu\}\subset A_p\ ;\ h_k<2\pi, k=\overline{0,r};$$

где

$$\omega(t)=\prod_{k=0}^{r}\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{\frac{h_k}{2\pi}}\ ,\ s_0=\pi\ ;$$

$h_k, k=\overline{1,r}$ *– скачки функции* $\theta(\cdot)$ *в точках* $-\pi<s_1<\ldots<s_r<\pi$*;* $h_0=\theta(-\pi)-\theta(\pi)$*. Тогда система экспонент (20) образует базис в* $L_{p,\nu}$, $1<p<+\infty$*. При* $p=2$ *она образует базис Рисса в* $L_{2,\nu}$ *только тогда, когда* $\nu\sim 1$ *на* $[-\pi,\pi]$.

Рассмотрим некоторые частные случаи этой теоремы. Пусть весовая функция $\nu(\cdot)$ имеет вид

$$\nu(t)=\prod_{k=1}^{m}|t-t_k|^{\alpha_k}\ ,$$

где $\{t_k\}_1^m\subset(-\pi,\pi)$ – различные точки. Пусть имеет место условие

$$\{s_k\}_1^r\cap\{t_k\}_1^m=\varnothing. \tag{21}$$

В этом случае произведение $\omega^{-p}\nu$ имеет представление

$$\omega^{-p}(t)\nu(t)=\prod_{k=0}^{r}\left|\sin\frac{t-s_k}{2}\right|^{-\frac{ph_k}{2\pi}}\prod_{k=1}^{m}|t-t_k|^{\alpha_k}\ .$$

Нетрудно заметить, что $\omega^{-p}\nu\in A_p$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие неравенства

$$-1<-\frac{ph_k}{2\pi}<p-1,\ k=\overline{0,r};$$

$$-1<\alpha_k<p-1,\ k=\overline{1,m}\ .$$

Таким образом, справедливо следующее

Следствие 18. *Пусть имеет место условие (21) и выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{q}<\frac{h_k}{2\pi}<\frac{1}{p},\ k=\overline{0,r}\ ;\ \ -1<\alpha_k<p-1,\ k=\overline{1,m}\ .$$

Тогда система экспонент (20) образует базис в $L_{p,\nu}$, $1<p<+\infty$.

В заключение автор выражает признательность и почтение светлой памяти научного руководителя Садыга Велиева и искренне благодарен научному руководителю член-корр. НАН Азербайджана, проф. Билал Билалову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Vəliyev S.Q., Səfərova A.R. Cırlaşan eksponent sistemlərin bazisliyi üçün zəruri şərtlər// AMEA Naxçıvan bölməsi, Xəbərlər, təbiət və texnika elmlər seriyası, №4, 2009, səh. 207-214.
2. Велиев С.Г., Сафарова А.Р. Критерии полноты системы экспонент с вырождающимися коэффициентами// Proc. of international conference on astronomy, physics and mathematics devoted to International Astronomy Year, Nakhchivan, 2009, pp.46-47.
3. Veliyev S.G., Safarova A.R. On basicity of a system of exponents with degenerating coefficients// TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, vol., No 2, 2010, pp.257-263.
4. Veliyev S.G., Safarova A.R. On completeness of a system of exponents with degenerate coefficients// Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, vol. XXXII, 2010, pp.203-208.
5. Велиев С.Г., Сафарова А.Р. О полноте системы экспонент с вырождающимися коэффициентами// Спектральная теория и ее приложения Тезисы межд. конф. посвящ. 80л. акад. Ф.Г.Максудова, ИММ НАН Аз., Баку, 2010, с. 114.
6. Salmanov V.F., Safarova A.R. Basicity of Systems of Sines with Linear Phase in Weighted Sobolev Spaces// International Journal of Engineering Mathematics, vol. 2013, Article ID 612472, 4 pages, 2013.
7. Bilalov B.T., Safarova A.R. Frames from cosines with degenerate coefficients// International Conference on Actual Problems of Mathematics and Informatics, dedicated to the 90th Anniversary of Heydar Aliyev and organized by the Azerbaijan Mathematical Society, will be held on 29-31 May, 2013, in Baku, Azerbaijan, p. 24
8. Səfərova A.R. Çəkili Hardi fəzalarında bircins Riman sərhəd məsələsinin ümumi həlli// Naxçıvan Dövlət Universiteti. Elmi Əsərlər, 2013, №1 (51), s. 39-42
9. Safarova A.R. Riemann boundary value problems in weighted Hardy spaces// On Actual Problem of Mathematics and Mechanics, International conference devoted to the 55-th anniversary of the

Institute of Mathematics and Mechanics, May 15-16, 2014, Baku, Azerbaijan, pp.319-320

10. Sadigova S.R., Safarova A.R. Bases of the perturbed system of exponents in weighted Lebesgue space with a general weight//7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", MADEA -7, September 08-13, 2015, pp.146, Baku, Azerbaijan
11. Kasumov Z.A., Safarova A.R. Bases of the perturbed system of exponents in weighted Lebesgue space with a general weight// International workshop on Non-harmonic analysis and Differential operators, Baku, Azerbaijan, 2016, pp.61-62

ARZU RAMİZ qızı SƏFƏROVA

CIRLAŞMAYA MALİK İKİQAT EKSPONENT SİSTEMLƏRİN BAZİSLİYİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi ümumilikdə cırlaşma əmsalına malik ikiqat eksponent sistemlərinin bazislik xassələrinin və ümumi çəkiyə malik çəkili Hardi siniflərində Riman sərhəd məsələsinin həllolunmasının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

-cırlaşmanın tərtibləri üzərinə Lebeq fəzalarında cırlaşmaya malik eksponent sistemin bazisliyinə nəzərən zəruri şərtlər tapılmışdır;

-cırlaşma əmsalı daha ümumi şəkildə olduqda lebeq fəzalarında cırlaşmaya malik eksponent sisteminin tamlığı öyrənilmişdir;

-çəkili fəzada cırlaşmaya malik sistemin Riss bazisliyi öyrənilmişdir;

-ümumi çəkiyə malik çəkili Hardi sinifləri təyin olunmuş və onların Banax fəzası olduqları isbat olunmuşdur;

- ümumi çəkiyə malik çəkili Hardi fəzalarında bircins Riman məsələsinin ümumi həlli tapılmışdır;

-- ümumi çəkiyə malik çəkili Hardi fəzalarında qeyri-bircins Riman məsələsinin həllolunanlığı öyrənilmişdir.

ARZU RAMIZ qızı SAFAROVA

BASICITY OF DOUBLE SYSTEM OF EXPONENTS WITH DEGENERATE COEFFICIENTS

SUMMARY

This thesis, generally devoted to the study of basis properties of double system of exponents with degenerate coefficients and the solvability of the Riemann boundary value problems in weighted Hardy spaces with a general weight.

The following results are obtained:

- necessary conditions on the orders of the degeneration are obtained with respect to the basicity of the degenerate exponential systems in Lebesgue spaces;

-completeness of degenerate exponential system in Lebesgue spaces with more general form of degeneracy coefficient is studied;

Riesz basicity of degenerate exponential systems in weighted space is studied;

weighted Hardy classes are defined with a general weight and it is proved that they are Banach spaces;

-the general solution of a homogeneous Riemann problem in weighted Hardy spaces with a general weight is obtained;

-the solvability of the non-homogeneous Riemann problem in weighted Hardy spaces with a general weight is studied.