**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА**
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

*На правах рукописи*

**ХУМАЙ ШАМШАДДИН кызы РЗАЕВА**

# ЛОКАЛЬНАЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1211.01 – Дифференциальные уравнения

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку – 2018

Работа выполнена на кафедре «Математического анализа» **Гянджинского Государственного Университета**

**Научный руководитель:**
доктор наук по математике, профессор **Зиятхан Алиев**

**Официальные оппоненты:**

- доктор физико-математических наук, проф. **Низамеддин Искендеров**

(Бакинский Государственный Университет);

- доктор физико-математических наук, проф. **Назим Керимов**

(Университет Хазар)

**Ведущая организация:**

**Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра "Математический анализ"**

Защита диссертации состоится 11 мая 2018 г. в $14^{00}$ часов на заседании Диссертационного Совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

Автореферат разослан 30 марта 2018 года.

**Ученый секретарь**
**Диссертационного Совета**
**Д. 01.111 ИММ НАНА доц. Тамилла Гасанова**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Одним из важных разделов нелинейного анализа является теория бифуркации нелинейных задач на собственные значения. Задачи подобного типа возникают в теории колебаний, в теории тепловой конвекции, в гидродинамике, в теории критических режимов работы атомных и химических реакторов, в теории критических нагрузок, в теории упругости. За последнее время достигнуты большие успехи в этом направлении, которые отражены в сборнике под редакцией Дж.Б. Келлера и Э. Антмана, в монографиях М.А. Красносельского, М.А. Красносельского и П.П. Забрейко, Л. Ниренберга, Р.В. Дикки, С.Н. Чау и С. Хейла, А.П. Махмудова, Дж. Лопеза-Гомеза и др.

В работах М.А. Красносельского и П. Рабиновича разработана локальная и глобальная теории бифуркации нелинейных задач на собственные значения. Рабинович также устанавил, что существуют два семейства континуумов решений линеаризируемой задачи Штурма-Лиувилля, бифурцирующих из точек прямой тривиальных решений, соответствующих собственным значениям линейной задачи, которые обладают обычными осцилляционными свойствами и являются неограниченными в $R \times C^1$.В дальнейшем структура непрерывных ветвей множетва решений бифурцирующих из отрезков прямой тривиальных решений нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля исследованы Г. Берестицким, К. Шмидтом и Х.Л. Смитом, Р. Чиопинелли, Дж. Прзбучиным, Б.П. Ринни, Г. Дайя, З.С. Алиевым и Г.М. Мамедовой. Результаты о глобальной бифуркации нелинейных задач на собственные значения для дифференциальных уравнений четвертого порядка получены А.П. Махмудовым и З.С. Алиевым, Дж. Прзбучиным, З.С. Алиевым.

Бифуркация решений нелинейной одномерной системы Дирака рассмотрена лишь К. Шмидтом и Х.Л. Смитом, но им не удалось изучить структуру непрерывных ветвей множества решений бифурцирующих из точек и отрезков прямой тривиальных решений. Основной причиной этого является то, что в то время не была исследована осцилляционные свойства линейной одномерной системы Дирака.

Релятивистское волновое уравнение, предложенное Дираком 1928 году и позднее названное в его честь, играет фундаментальную роль в различных областях современной физики и математики. В релятивистской квантовой механике и квантовой теории поля уравнение Дирака применяется для описания частиц со спином $1/2$ (т.е. фермионов). Богатая математическая структура уравнения Дирака привлекла интерес многих математиков и были получены удивительные результаты, которые были включены в систематическому изложению теории Дирака. В 1973 году М. Абловиц, Д. Кауп, А. Ньюэлл и Х. Сегур обнаружили, что уравнение Дирака связано с нелинейным волновым уравнением ("модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза")таким же образом, как уравнение Шредингера связано с уравнением Кортевега-де Фриза, и это стимулировало растущий интерес к прямым и обратным задачам для оператора Дирака, как в физической, так и математической литературе. В 1966 году, М.Г. Гасымов и Б.М. Левитан решили обратную задачу для оператора Дирака на $R^{+}$, используя спектральную функцию и фазу рассеяния. Их исследования были продолжены и получили дальнейшее развитие во многих направлениях.

Спектральные свойства одномерного оператора Дирака, за исключением осцилляционных свойств компонентов собственных вектор-функций, изложена в монографии Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна. В частности, доказано, что собственные значения задачи оператора Дирака являются вещественными, простыми и могут быть пронумерованы в порядке возрастания, принимая значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Лишь в работе Дж.Ф. Янга и З. Я. Хуангаисследованы осцилляционные свойства собственных вектор-функций одномерной системы Дирака, но к сожалению, найденное там, число нулей компонентов собственных вектор-функций не является точным. В работах Н.Б.Керимова,В.Н. Пивоварчика иДж.Ф. Янга изучены осцилляционные свойства собственных вектор-функцийодномерной системы Дирака со спектральным параметром в граничных условиях. Следует отметить, что в этих работах не найдены точное количество нулей компонентов собственных вектор-функций.

Из приведенных выше рассуждении видно, что до сих пор не изучены осцилляционные свойства собственных вектор-функций линейного одномерного оператора Дирака и бифуркация решений нелинейных задач Дирака. Следовательно, исследование вопроса о числе нулей компонентов собственных вектор-функций линейного одномерного оператора Дирака и изучение бифуркации решений нелинейных задач на собственные значения для одномерной системы Дирака является актуальным.

**Цель работы.** Изучение общей характеристики расположения собственных значений на вещественной оси и осцилляционных свойств собственных функций линейной одномерной системы Дирака; исследование структуры точек бифуркации, структуры множества решений и осцилляционных свойств собственных функций нелинейных задач для одномерной системы Дирака.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие основные результаты: для линейной одномерной системы Дирака

- найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси;
- полностью изучены осцилляционные свойства компонентов собственных вектор-функций;
- уточнены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций;

для нелинейных задач Дирака

- построены классы вектор-функций компоненты которых обладают осцилляционными свойствами компонентов собственных вектор-функций соответствующих линейных задач, играющие решающую роль при изучении локальной и глобальной бифуркации;
- полностью описаны структура и поведение континуумов решений линеаризируемых и нелинеаризируемых задач, содержащихся в этих классах.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теории функций и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, спектральной теорий дифференциальных операторов, теории возмущений, нелинейного анализа и теории бифуркации.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных вопросах спектральной теории дифференциальных операторов, при изучении различных задач механики, физики и математической физики.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отделов «Дифференциальные уравнения» (проф. А.Б.Алиев) и "Функциональный анализ" (проф. Г.И. Асланов) ИММ НАН Азербайджана, на семинарах кафедры «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета (доц.

Б.А.Мустафаев), на международной конференции "Последние достижения чистой и прикладной математики", ICRAPAM-2014 (Анталия, Турция, 2014), на международной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения" MADEA-7, Азербайджан-Турция-Украина (Баку, 2015), на первой международной конференции молодых ученых (Гянджа, 2016), на международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики» (Сумгаит, 2017).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 9 работ, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащий 67 наименований**.** Основное содержание изложено на 115 страницах.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава состаящая из пяти параграфов посвящена изучению осцилляционных свойств компонентов собственных вектор-функций одномерной системы Дирака.

В 1.1 изложена постановка задачи. Рассмотрим одномерное уравнение Дирака

$$\ell\, w(x) \equiv Bw'(x) - P(x)\,w(x) = \lambda\, w(x),\ 0 < x < \pi, \tag{1}$$

с граничными условиями $U(w) = \begin{pmatrix} U_1(w) \\ U_2(w) \end{pmatrix} = 0$ заданных следующим

образом:

$$U_1(w) = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w(0) = \vartheta(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$U_2(w) = \begin{pmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w(\pi) = \vartheta(0\pi)\cos\beta + u(\pi)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

где $\lambda \in C -$спектральный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \text{ и } w(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ \vartheta(x) \end{pmatrix},$$

$p(x),\ r(x)-$ непрерывные на отрезке $[0,\ \pi]$ вещественнозначные функции, $\alpha, \beta-$ действительные постоянные, причем $0 \le \alpha,\ \beta < \pi.$

Заметим, что уравнение (1) эквивалентно системе двух совместных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \vartheta'(x) - \{\lambda + p(x)\}u(x) = 0, \\ u'(x) + \{\lambda + p(x)\}\vartheta(x) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Спектральные свойства оператора Дирака, за исключением осцилляционных свойств собственных вектор-функций, изложена в монографии Левитана и Саргсяна. В частности, доказано, что собственные значения задачи (1)-(3) являются вещественными, простыми и могут быть пронумерованы в порядке возрастания, принимая значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Так как граничные условия (2)-(3) предписывает значения отношения $\vartheta/u$ при $x = 0, \pi$ мы изучаем в 1.2 свойства функций $\vartheta/u$, $u/\vartheta$ и $\theta = \arctan \vartheta/u$ как функции от переменных $x$ и $\lambda$. Эти функции связаны очевидным образом с нулями функции $u$ и $\vartheta$.

Для изучения бифуркации решений нелинейных возмущений задачи (1)-(3) нам необходимо исследование осцилляционных свойств собственных вектор-функций не только линейной задачи (1)-(3), но и линейной задачи более общего вида

$$\tilde{\ell}(w(x)) \equiv Bw'(x) - \tilde{P}(x)w(x) = \lambda w(x),\ 0 < x < \pi, \tag{5}$$

$$U(w) = 0, \tag{6}$$

где $\tilde{P}(x) = \begin{pmatrix} p(x) & s(x) \\ q(x) & r(x) \end{pmatrix}$, $q(x), s(x) \in C([0,\pi];\ R)$, и нерущая общности можно считать, что $q(x) \equiv s(x)$.

Существует единственное решение $w(x,\lambda) = \begin{pmatrix} u(x,\lambda) \\ \vartheta(x,\lambda) \end{pmatrix}$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(0,\lambda) = \cos\alpha,\ \ \vartheta(0,\lambda) = -\sin\alpha, \tag{7}$$

причем, для каждого фиксированного $x \in [0,\pi]$ функции $u(x,\lambda)$ и $\vartheta(x,\lambda)$ являются целыми функциями аргумента $\lambda$.

Для изучения осцилляционных свойств собственных вектор-функций задачи (5)-(6) введем угловую функцию

$$\theta(x,\lambda)=\arg\{u(x,\lambda)+i\vartheta(x,\lambda)\} \tag{8}$$

(см., напр., [4, гл. 8, п. 8.4]). Учитывая (7), определим начальное значение следующим образом:

$$\theta(0,\lambda)=-\alpha. \tag{9}$$

Для других $x$ и $\lambda$ функция $\theta(x,\lambda)$ задается формулой (8) с точностью до произвольного слагаемого, кратного $2\pi$, поскольку функции $u(x,\lambda)$ и $\vartheta(x,\lambda)$ не могут обратиться в нуль одновременно. Это выражение, кратное $2\pi$, надлежит зафиксировать так, чтобы функция $\theta(x,\lambda)$ удовлетворяла условию (9) и была непрерывной по $x,\ \lambda$. Так как область изменения переменных $x,\ \lambda.$, т.е. $0\le x\le\pi, -\infty<\lambda<+\infty,$ односвязна, то этим функция $\theta(x,\lambda)$ определяется единственным образом.

**Замечание 1.** Из (8) видно, что нули функции $u(x,\lambda)$ и $\vartheta(x,\lambda)$ совпадают с точками, в которых $\theta(x,\lambda)$ принимает значения нечетно и четно кратным $\pi/2$ , соответственно.

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения: i) функция $\theta(x,\lambda)$ относительно переменной $x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\theta'(x,\lambda)=\lambda+p(x)\cos^2(x,\lambda)+\ r(x)\sin^2(x,\lambda)+q(x)\sin 2\theta(x,\lambda); \tag{10}$$

*(ii) если $\lambda+p(x)>0,\ \lambda+r(x)>0, x\in[0,\pi],$ то когда $x$ возрастает, $\theta$ не может стремится сверху к числу, кратному $\pi/2$, когда $x$ убывает, $\theta$ не может стремится к кратному $\pi/2$, снизу; а если $\lambda+p(x)<0,\ \lambda+r(x)<0,\ x\in[0,\pi],$ то когда $x$ возрастает, $x$ не может стремится снизу к числу, кратному $\pi/2$, когда $x$ убывает, $\theta$ не может стремится кратному $\pi/2$, сверху; (iii) когда $\lambda$ возрастает при фиксированном $x$, $\theta-$возрастающая функция; в частности, $\theta(\pi,\lambda)$ является строго возрастающей функцией аргумента $\lambda$.*

В 1.3, которая состоит из 5 пунктов изучается осцилляционные свойства компонентов собственных вектор-функций краевой задачи (5)-(6).Обозначим через $s(g)$ число нулей функции $g\in C([0,\pi];R)$ в интервале $(0,\pi)$. В 1.3.1 дается формулировка основного результата данной главы.

**Теорема 2.** *(i)Собственные значения* $\lambda_k, k\in Z,$ *задачи* (5)-(6) *могут быть пронумерованы в порядке возрастания на вещественной оси, так что соответствующая угловая функция* $\theta(x,\lambda_k)$ *в точке* $x=\pi$ *удовлетворяют условию*

$$\theta(\pi,\lambda_k)=-\beta+\pi k; \tag{11}$$

*(ii) собственные вектор-функции*

$$w_k(x)=w(x,\lambda_k)=\begin{pmatrix} u(x,\lambda_k) \\ \vartheta(x,\lambda_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_k(x) \\ \vartheta_k(x)\end{pmatrix}, k\in Z,$$

(*за исключением, при* $k=0$ *случаев* $\alpha=\beta=0$ *и* $\alpha=\beta=\pi/2$) *обладают, при надлежащей их интерпретации, следующими осцилляционными свойствами:*

$$\begin{pmatrix} s(u_k) \\ s(\vartheta_k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |k|-1+\chi(\alpha-\pi/2)\,\omega_{\alpha,\beta}(k)+\chi((\pi/2-\beta)\,\omega_{\alpha,\beta}(k)) \\ |k|-1+\operatorname{sgn}\alpha\,\chi(\omega_{\alpha,\beta}(k))+\operatorname{sgn}\beta\,\chi(-\omega_{\alpha,\beta}(k))\end{pmatrix}, \tag{12}$$

*где функции* $\chi(x)$ *и* $\omega_{\alpha,\beta}(x),\ x\in R,$ *определяются следующим образом:*

$$\chi(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0, \\ 1, \text{ если } x>0, \end{cases}$$

$$\omega_{\alpha,\beta}=\begin{cases} -1, \text{ если } x<0 \text{ или } x=0, \alpha<\beta, \\ 1, \text{ если } x>0 \text{ или } x=0, \alpha\ge\beta. \end{cases} \tag{13}$$

*Кроме того, функции* $u_k(x)$ *и* $\vartheta_k(x), k\in Z,$ *имеют только узловые нули в интервале* $(0,\pi)$.

В 1.3.2 доказывается утверждения (i) теоремы 2 с использованием теоремы 1. В 1.3.3 доказывается утверждение (ii) теоремы 2при $p(x)\equiv r(x)\equiv q(x)\equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (5) при $p(x)\equiv r(x)\equiv q(x)\equiv 0$. В этом случае функции $u(x,\lambda)$ и $\vartheta(x,\lambda)$ имеют следующий вид

$$u(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha),\quad \vartheta(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha). \tag{14}$$

Следовательно, в силу (3), собственные значения спектральной задачи (5)-(6) совпадают с корнями уравнения

$$\vartheta(\pi,\lambda)\cos\beta + u(\pi,\lambda) = \sin\beta = 0. \qquad (15)$$

Тогда, учитывая (9), из (15) получаем $\sin(\lambda\pi - \alpha + \beta) = 0,$ откуда следует, что собственные значения задачи (5)-(6) при $p(x) \equiv r(x) \equiv q(x) \equiv 0$ являются

$$\tau_k = k + (\alpha - \beta)/\pi,\ k \in Z, \qquad (16)$$

**Замечание 2.** Из (16) видно, что $\tau_k < 0,$ если $k < 0;$ $\tau_k > 0,$ если $k > 0;$ кроме того, $\tau_0 < 0,$ если $\alpha < \beta,$ $\tau_0 = 0,$ если $\alpha = \beta,$ и $\tau_0 > 0,$ если $\alpha > \beta.$

Здесь применением теоремы 1, замечания 1-2 и утверждения (i) теоремы 2 доказывается, что собственные вектор-функциизадачи (5)-(6) при $p(x) \equiv r(x) \equiv q(x) \equiv 0$ обладают осцилляционными свойствами (12).

В 1.3.4 изучается глобальная бифуркация решений линеаризируемых возмущений линейной задачи Дирака (1)-(3) или (5)-(6) без потенциала.

Рассмотрим следующую нелинейную систему Дирака

$$\begin{cases} \hat{\ell}w(x) = \lambda w(x) + g(x, w(x), \lambda),\ 0 < x < \pi, \\ U(w) = 0, \end{cases} \qquad (17)$$

где $\hat{\ell}\,w(x) = Bw'(x),$ нелинейный член $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in C([0,\pi] \times R^2 \times R : R^2)$

удовлетворяет условию

$$g(x, y, \lambda) \to 0 \text{ при } |y| \to 0,$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$ и $\lambda \in \Lambda,$ для каждого компактного интервала $\Lambda \subset R$ (здесь $|\cdot|$ обозначает норму в $R^2$), где $y = (y_1,\ y_2)^t$.

Пусть $E-$банахово пространство $C([0,\pi]; R^2) \cap \{w : U(w) = 0\},$ с обычной нормой $\|w\| = \left\| \begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix} \right\| = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |u(x)| + \max\limits_{x\in[0,\pi]} |\vartheta(x)|.$

Обозначим:

$$S = \{ w \in E : |u(x)| + |\vartheta(x)| > 0, x \in [0,\pi] \}.$$

Для каждого $w \in S$ определим непрерывную на $[0, \pi]$ функцию $\theta(w, x)$ следующим образом:

$$\theta(w, x) = \operatorname{arctan} \frac{\vartheta(x)}{u(x)},\ \theta(w, 0) = -\alpha.$$

Пусть $S_k^+$, $k \in Z$, есть множество функций $w \in S$, которые удовлетворяют условиям: (i) $\theta(w, \pi) = -\beta + k\pi$; (ii) функция $u(x)$ положительна в окрестности точки $x = 0$; (iii) если $k > 0$ и $k = 0,\ \alpha \geq \beta$, (за исключением случаев $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = \pi/2$), то функция $\theta$ при фиксированном $y$, когда $x$ возрастает от $0$ до $\pi$, возрастая принимает значение, кратное $\pi/2$, причем функция $\theta$ не может при убывающем $x$, возрастая, принимать значение, кратному $\pi/2$; если $k < 0$ и $k = 0,\ \alpha < \beta$, то функция $\theta$ при фиксированном $y$, когда $x$ возрастает от $0$ до $\pi$, убывая принимает значение, кратное $\pi/2$, причем функция $\theta$ не может при убывающем $x$, убывая, принимать значение, кратному $\pi/2$.

Пусть $S_k^- = -S_k^+$ и $S_k = S_k^+ \bigcup S_k^-$.

В дальнейшем через $\nu$ обозначим элемент множества $\{+, -\}$, т.е., либо $\nu = +$ либо $\nu = -$.

**Теорема 3.** *Для каждого* $k$ *и каждого* $\nu$ *существует континуум* $C_k^\nu$ *решений задачи (17), который содержит* $(\tau_k, 0)$, *содержится в* $(R \times S_k^\nu) \bigcup \{(\tau_k, 0)\}$ *и неограничен в* $R \times E$.

Глобальная бифуркация решений задачи (17) в случае $\alpha = \beta = 0$ и $g_2(x, 0, y_2, \lambda) \equiv 0,\ x \in [0, \pi],\ y_2 \in R,\ \lambda \in R$, была изучена К. Шмидтом и Х.Л. Смитом.

Отметим, что локальная и глобальная бифуркации множества решений нелинейных задач Дирака будет детально исследована в главе II.

В 1.3.5 доказывается вторая часть утверждения теоремы 2. Пусть

$$m_{-1} = \max\{k \in Z : \lambda_k + p(x) < 0, \lambda_k + r(x) < 0,\ x \in [0, \pi]\},$$

$$m_1 = \min\{k \in Z : \lambda_k + p(x) > 0, \lambda_k + r(x) > 0,\ x \in [0, \pi]\}.$$

В силу формулы (11) и теоремы 1, утверждение (ii) теоремы 2 при $k \geq m_1$ ( $k \leq m_{-1}$ ) следует из I-IV (см. 1.3.3). При $m_{-1} < k < m_1$ наряду с линейной задачей (5)-(6) рассмотрим следующую нелинейную "аппроксимационную" задачу

$$\hat{\ell} w - \| w \|^{\varepsilon} \, \widetilde{P} w = \lambda w, \; U(w) = 0, \tag{18}$$

где $\varepsilon \in (0, 1]$.

Применением теоремы 3 доказана следующая

**Теорема 4.***Для любых* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $k \in (m_{-1}, m_1) \bigcap Z$ *задача* (18) *не имеет решение* $(\lambda, w)$ *удовлетвояющего условиям:* $dist\{\lambda, J_k\} > 0$, $w \in S_k^{\nu}$ и $\| w \| < 1$, где $J_k = [\tau_k - K, \tau_k + K]$, $K = M/\pi$.

При $k \in (m_{-1}, m_1) \bigcap Z$ утверждение (ii) теоремы 2 получается из (18) с помощью предельного перехода, с учетем теоремы 4.

В 1.4 дается уточнение асимптотических формул для собственных значений задачи (5)-(6).Отметим, что в асимптотической формуле для собственных значений в монографии Б.М.Левитана и И.С. Саргсянаимеется погрешность, которая видно из следующего утверждения.

**Теорема 5.***Для достаточно больших* $|k|$ *собственные значения задачи* (1)-(3) *имеют следующую асимптотику*

$$\lambda_k = k + \frac{\alpha - \beta - (1/2)\int\limits_0^{\pi} \{p(x) + r(x)\} dx}{\pi} + O\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right), \tag{19}$$

*где* $\omega(\delta) = \delta + \omega_1(\delta)$ *и* $\omega_1(\delta)$ *-модуль непрерывности функции* $p - r$ *в промежутке* $[0, \pi]$.

В 1.5 с использованием формулы Пиконе доказаны теоремы сравнения для одномерной стационарной системы Дирака. Далее пользуясь этими теоремами доказывается утверждение теоремы 2 без привлечения угловых функции.

Глава II состоящая из 7 параграфов посвящена исследованию локальной и глобальной бифуркаций множества решений нелинейных одномерных систем Дирака.

В 2.1 дается постановка задачи. Рассмотрим следующую нелинейную уравнению Дирака

$$\ell w(x) \equiv B w'(x) + P(x) w(x) = \lambda w(x) + h(x, w(x), \lambda), \; x \in (0, \pi), \tag{20}$$

с граничными условиями

$$U_1(w) = (\sin\alpha,\, \cos\alpha)\, w(0) = \vartheta(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0, \quad (21)$$

$$U_2(w) = (\sin\beta,\, \cos\beta)\, w(\pi) = \vartheta(\pi)\cos\beta + u(\pi)\sin\beta = 0, \quad (22)$$

где коэффициенты уравнений и граничных условий удовлетворяет условиям главы I. Нелинейный член $h$ представим в виде $h = f + g,$ где вектор-функции

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in C([0,\pi]\times R^2 \times R; R)$$

удовлетворяют следующим условиям: существует числа $K > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} |\, f_1(x, w, \lambda)\,| \le K\,|\,w\,|,\ \ |\, f_2(x, w, \lambda)\,| \le M\,|\,w\,|, \\ x \in [0,\pi],\ 0 < |\,w\,| \le 1,\ \lambda \in R; \end{gathered} \quad (23)$$

$$g(x,\, w, \lambda) = 0\left(|\,w\,|\right) \text{ при } |\,w\,| \to 0 \quad (24)$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$ и $\lambda \in \Lambda$ для каждого компактного промежутка $\Lambda \subset R$ (здесь, через $|\cdot|$ обозначена норма в $R^2$).

Отметим, что нелинейная задача (20)-(22) в случае $p \equiv r \equiv 0$ и $K + M < 1/2,$ рассмотрена К. Шмидтом и Х.Л. Смитом, которые доказали, что существует натуральное число $k_0 \in \mathrm{N}$ такое, что для каждого целого $k, |\,k\,| > k_0,$ связная компонента $D_k$ множества решений задачи (20)-(22), ветвляющиейся из отрезка тривиальных решений, содержащего $k$-е собственное значение задачи (1)-(3), либо неограничен в $R \times C([0,\pi]; R^2),$ либо пересекает другой отрезок.

В 2.2 дано необходимые сведения из теории бифуркации нелинейных задач на собственные значения.

В 2.3 изучается некоторые свойства решений задачи (20)-(22) содержащихся в замыкании множества $S_k^\nu$. Кроме того, задача (20)-(22) сводится к интегральному уравнению.

Из определениямножества $S_k, k \in Z,$ следует, что они являются открытыми подмножествами в $E$ и $S_k \cap S_m = \varnothing,\ k, m \in Z,\ k \ne m.$ Кроме того, если $w \in \partial S_k^\nu\,(\partial S_k),$ то существует точка $\xi \in [0,\pi]$ такая, что $|\,w(\xi)\,| = 0,$ т.е. $u(\xi) = \vartheta(\xi) = 0.$

**Лемма 1.** *Если* $(\lambda, w) \in R \times E$ *является решением задачи (20)-(22) и* $w \in \partial S_k^{\nu}$, *то* $w \equiv 0$.

Предположим, что $\lambda = 0$ не является собственным значением (1)-(3). Тогда задача (20)-(22) может быть преобразована в эквивалентное интегральное уравнение

$$w(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\, w(t)\, dt + \int_0^{\pi} K(x,t)\, h(t, w(t), \lambda)\, dt, \tag{25}$$

где $K(x,t) = K(x,t,0)$ является соответствующая матрица Грина.

Обозначим

$$Lw(x) = \int_0^{\pi} K(x,t)\, w(t) dt, \tag{26}$$

$$F(\lambda, w)(x) = \int_0^{\pi} K(x,t)\, f(t, w(t), \lambda) dt, \tag{27}$$

$$G(\lambda, w)(x) = \int_0^{\pi} K(x,t)\, g(t, w(t), \lambda) dt, \tag{28}$$

Матрица Грина $K(x,t)$ непрерывна в $[0,\pi;\, 0,\pi]$ всюду, кроме диагонали $x = t$, где она имеет скачок $K(x, x+0) - K(x, x-0) = B$. Следовательно, оператор $L$ вполне непрерывен в $E$. Нелинейные операторы $F$ и $G$ можно представить в виде композиции оператора $L$ и операторов суперпозиции

$$\hat{f}(\lambda, w)(x) = f(x, w(x), \lambda) \ \text{ и } \ \hat{g}(\lambda, w)(x) = g(x, w(x), \lambda),$$

соответственно. Так как $f, g \in C([0,\pi] \times R^2 \times R : R^2)$, то операторы $\hat{f}$ и $\hat{g}$ отображают $R \times E$ в $C([0,\pi] : R^2)$ и непрерывны. Следователь-но, операторы $F : R \times E \to E$ и $G : R \times E \to E$ являются вполне непрерывными. Кроме того, в силу (24) имеем

$$G(\lambda, w) = o(\| w \|) \ \text{ при } \ \| w \| \to 0, \tag{29}$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda$.

На основании (25)-(28) задачу (20)-(22) можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$w = \lambda L w + F(\lambda, w) + G(\lambda, w), \tag{30}$$

и, поэтому, достаточно исследовать структуру множества решений (20)-(22) в $R\times E.$

В 2.4 изучена бифуркация решении линеаризируемой задачи (20)-(22) при $f\equiv 0.$ Обозначим через $\Upsilon\subset R\times E$ замыкание множества нетривиальных решений задачи (20)-(22).

Пусть $Y_k^\nu = Y\bigcap(R\times S_k^\nu),\ k\in \mathrm{Z}.$

**Теорема 6.** *Предположим, что* $f\equiv 0.$ *Тогда для каждого* $k\in\mathrm{Z}$ *и каждого* $\nu$ *существует континуум* $C_k^\nu$ *решений задачи (20)-(22) в* $Y_k^\nu\bigcup\{(\lambda_k,0)\}$, *который содержит* $(\lambda_k,0)$ *и неограничен в* $R\times E$ .

В 2.5 исследована локальная и глобальная бифуркация решений задачи (20)-(22) при $g\equiv 0.$ В этом случае задача (20)-(22) принимает вид

$$\begin{cases}\ell\, w(x)=\lambda w(x)+\ f(x,w(x),\lambda),\ 0<x<\pi,\\ U(w)=0.\end{cases}\tag{31}$$

Наряду задачей (31) рассмотрим следующую аппроксимационную задачу

$$\begin{cases}\ell\, w(x)=\lambda w(x)+\ f(x,|\,w(x)|^{\varepsilon}\ w(x),\lambda),\ 0<x<\pi,\\ U(w)=0.\end{cases}\tag{32}$$

где $\varepsilon\in(0,1].$ В силу (23) нелинейный член $f(x,|\,w|^{\varepsilon}\ w,\lambda)$ в (32) удовлетворяет условию (24). Следовательно, для этой задачи справедливо утверждение теоремы 9. С помощью предельного перехода из (32) получается следующая

**Лемма 2.** *Для каждого* $k\in\mathrm{Z},$ *каждого* $\nu$ *и для любого* $0<\chi<1$ *существует решение* $(\lambda_\chi, w_\chi)$ *задачи (31) такое, что* $w_\chi\in S_k^\nu, \lambda_\chi\in J_k$ *и* $\|\,w_\chi\,\|=\chi,$ *где*

$$J_k=[\lambda_k-((K+M)/2+c_k),\lambda_k+(K+M)/2+c_k)],\ c_k=O(1/k).$$

Будем говорить, что точка $(\lambda,0)$ является точкой бифуркации задачи (20)-(22) по множеству $R\times S_k^\nu,\ k\in\mathrm{Z},$ если в каждой малой окрестности точки $(\lambda,0)$ существует решение этой задачи содержащееся в $R\times S_k^\nu$.

**Следствие 1.** *Множество точек бифуркации задачи (31) не пусто, причем если* $(\lambda, 0)$ *является точкой бифуркации этой задачи по множеству* $R \times S_k^{\nu}$, *то* $\lambda \in J_k$.

Отрезок $J_k \times \{0\} \subset R \times E,\ k \in Z,$ называется отрезком бифуркации (относительно прямой тривиальных решений) задачи (31) по множеству $R \times S_k^{\nu}$.

Для каждого $k \in \mathrm{N}$ и каждого $\nu$ обозначим через $\tilde{D}_k^{\nu}$ объединение всех связных компонент $\tilde{D}_{k,\lambda}^{\nu}$ множества решений задачи (36) ответвляющихся из точек бифуркации $(\lambda, 0) \in J_k \times \{0\}$ по множеству $R \times S_k^{\nu}$. Очевидно, что $\tilde{D}_k^{\nu} \neq \emptyset$. Заметим, что $\tilde{D}_k^{\nu}$ может не быть связным множеством в $R \times E$, но $D_k^{\nu} = \tilde{D}_k^{\nu} \bigcup J_k \times \{0\}$ является связным множеством в $R \times E$..

**Теорема 7.** *Для каждого* $k \in Z$ *и каждого* $\nu$ *связная компонента* $D_k^{\nu}$ *множества* $Y \subset R \times E$, *содержащая* $J_k \times \{0\}$, *содержится в* $(R \times S_k^{\nu}) \bigcup J_k \times \{0\}$ *и неограничена в* $R \times E$.

**Теорема 8.** *Пусть функция* $f(x, w, \lambda)$ *удовлетворяет условию (23) для любых* $(x, w, \lambda) \in [0, \pi\} \times R^2 \times R$. *Тогда для каждого* $k \in Z$ *и каждого* $\nu$ *связная компонента* $D_k^{\nu}$ *множества* $Y$ *содержащая* $J_k \times \{0\}$, *содержится в полосе* $J_k \times S_k^{\nu}$ *и неограничена в* $R \times E$.

В 2.6 изучается локальная и глобальная бифуркация решений задачи (20)-(22) в общем случае.

Наряду с задачей (20)-(22) рассматривается следующая аппроксимационная задача

$$\begin{cases} \ell(w) = \lambda w + f(x, |w|^{\varepsilon}\ w, \lambda) + g(x, w, \lambda), \\ U(w) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

где $\varepsilon \in (0,1]$.

**Лемма 3.** *Для каждого* $k \in Z$, *каждого* $\nu$ *и для достаточно малых* $\tau > 0$ *существует решение* $(\lambda_\tau, w_\tau)$ *задачи (20)-(22) такое, что* $w_\tau \in S_k^{\nu}$ и $\| w_\tau \| = \tau$.

**Следствие 2.** *Множество точек бифуркации задачи (20)-(22)*

*по множеству* $R\times S_k^{\nu}$ *не пусто.*

**Лемма 4.** *Пусть* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\,1]$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$ *Если* $(\lambda_{\varepsilon_n},w_{\varepsilon_n})\in R\times S_k^{\nu}$ *является решением задачи* (33) *при* $\varepsilon=\varepsilon_n$ *и* $\{(\lambda_{\varepsilon_n},w_{\varepsilon_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к* $(\lambda,\,0)$ *в* $R\times E$, *то* $\lambda\in J_k$.

**Следствие 3.** *Если* $(\lambda,0)$ *является точкой бифуркации задачи (20)-(22) по множеству* $R\times S_k^{\nu}$, *то* $\lambda\in J_k$.

Для каждого $k\in Z$ и каждого $\nu$ обозначим через $\tilde{T}_k^{\nu}$ объединение всех связных компонент $\tilde{T}_{k,\lambda}^{\nu}$ множества решений задачи (20)-(22) ответвляющихся из точек бифуркации $(\lambda,0)\in J_k\times\{0\}$ по множеству $R\times S_k^{\nu}$. Пусть $T_k^{\nu}=\tilde{T}_k^{\nu}\cup J_k\times\{0\}$

**Теорема 9.** *Для каждого* $k\in Z$ *и каждого* $\nu$ *связная компонента* $T_k^{\nu}$ *множества* $Y\subset R\times E$ *содержащая* $J_k\times\{0\}$, *содержится в* $(R\times S_k^{\nu})\cup(J_k\times\{0\})$ *и неограничена в* $R\times E$.

В 2.7 построены осцилляционные классыбез привлечения угловых функций (как в случае нелинейных задач Штурма-Лиувилля), исследована локальная и глобальная бифуркация решений задачи (20)-(22) в этих классах и получены аналогичные результаты.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору наук по математике, профессору З.С.Алиеву запостановку задач и постоянное внимание к работе.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**

1.Aliyev Z.S., Rzayeva H.Sh. Oscillation properties of the eigenvector-functions of the one-dimensional Dirac's canonical system, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, In memory of M.G.Gasymov on his 75th birthday, 2014, v. 40, special issue, p.36-48.

2.Aliyev Z.S., RzayevaH.Sh. Oscillation theorem of one spectral problem, International Conference of Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 6-9 november 2014, Antalya, Turkey, Icrapam-2014, Abstracts, p.25

3. Aliyev Z.S., Rzayeva H.Sh. Oscillation properties for the equation of the relativistic quantum theory, Applied Mathematics and Computation, 2015, v. 271, p. 308-316.
4. Rzayeva H.Sh. Global bifurcation of solutions of nonlinearizable one-dimensional Dirac system, Abstracts of Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International Conference MADEA-7 of "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Appli-cations", 2015, September 08-13, p.141.
5. RzayevaH.Sh. Global bifurcation of solutions of nonlinear one-dimensional Dirac system, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2015, v. 41, №2, p. 36-46
6. Алиев З.С., Рзаева Х.Ш., Об осцилляции собственных вектор-функции одномерного оператора Дирака, Доклады РАН, 2016, т. 469, № 3, с. 273–277.
7. Aliyev Z.S., Rzayeva H.Sh.. Global bifurcation for nonlinear Dirac problems. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2016, № 46,p.1–14.
8.Рзаева Х.Ш. Бифуркационные теоремы для одной нелинейной краевой задачи Дирака /Gənc alimlərin I Beynəlxalq elmi konfransı, 17-18 oktyabr 2016-cı il, Konfrans materialları, I hissə, s. 352-356.
9. Рзаева Х.Ш.. Глобальная бифуркация решений нелинейных задач на собственные значения для одномерной системы Дирака / Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики», 25-26 мая 2017 г.Сумгаит с.89-90.

**HUMAY ŞƏMŞƏDDIN qızı RZAYEVA**

# BƏZİ DİFERENSİAL OPERATORLAR ÜÇÜN MƏXSUSİ QİYMƏT MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLƏRİNİN LOKAL VƏ QLOBAL STRUKTURU

## XÜLASƏ

Dissertasiya işi birölçülü qeyri-xətti Dirak məsələlərinin həllərinin lokal və qlobal strukturunun tədqiqinə həsr olunmuşdur. Xətti Dirak məsələsinin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri, qeyri-xətti Dirak məsələlərinin həllərinin lokal və qlobal bifurkasiyası öyrənilmişdir.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

xətti Dirak məsələsi üçün:

- məxsusi ədədlərin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xatakteristikası verilmişdir;
- məxsusi vektor-funksiyalarının komponentlərinin osillyasiya xassələri tam öyrənilmişdir;
- məxsusi ədədlər və məxsusi funksiyalar üçün asimptotik düsturlar dəqiqləşdirilmişdir.

qeyri-xətti Dirak məsələləri üçün:

- lokal və qlobal bifurkasiyanın tədqiqində mühüm rol oynayan və komponentləri xətti məsələnin məxsusi vektor-funksiyalarının komponentlərinin osillyasiya xassələrinə malik olan vektor-funksiyalar sinifləri qurulmuşdur;
- həllər çoxluğunun bu siniflərdə yerləşən əlaqəli komponentlərinin strukturu və özünü aparması tam tədqiq olunmuşdur.

**HUMAY SHAMSHADDİN qızı RZAYEVA**

# LOCAL AND GLOBAL STRUCTURE OF SOLUTİONS OF NONLİNEAR EİGENVALUE PROBLEMS FOR CERTAİN DİFFERENTİAL OPERATORS

## SUMMARY

The dissertation is devoted to the study of the local and global structure of solutions of the one-dimensional nonlinear Dirac problems. The oscillatory properties of the eigenvector functions of the linear Dirac problem and the local and global bifurcations of solutions of nonlinear Dirac problems have been studied.

The following main results were obtained in the dissertation:

for the linear Dirac system:

- the general characteristic of the location of eigenvalues on the real axis is given;
- the oscillation properties of the components of eigenvector-functions are completely studied;
- the asymptotic formulas for eigenvalues and eigenvector-functions are refined;

for the nonlinear Dirac problems:

- constructed classes of vector-functions (which play an important role in the study of local and global bifurcation of solutions), whose components possess the oscillatory properties of the components of the eigenvector-functions of the linear problem;
- the structure and behaviour of the connected components of the set of solutions contained in these classes have studied in detail.

**AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI**
**RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU**

*Əlyazması hüququnda*

**Humay Şamşaddin qızı Rzayeva**

# BƏZİ DİFERENSİAL OPERATORLAR ÜÇÜN MƏXSUSİ QİYMƏT MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLƏRİNİN LOKAL VƏ QLOBAL STRUKTURU

1211.01 – Differensial tənliklər

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

**A V T O R E F E R A T I**

**Bakı – 2018**