НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ТЕЛЬМАН БЕНСЕР оглы КАСУМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ РАЗРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1202.01 –Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук по математике

Баку – 2018

Работа выполнена в отделе **«Негармонический анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный консультант:
член-корреспондент НАН Азербайджана, проф. **Билал Билалов**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Сабир Мирзоев**
(Бакинский Государственный Университет);
- доктор физико-математических наук, проф. **Агил Ханмамедов**
(Институт Математики и Механики НАНА);
- доктор физико-математических наук, проф. **Рауф Амиров**
(Университет Джумхурийет, Турция).

Ведущая организация:
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет кафедра «Математический анализ».

Защита диссертации состоится 01 июня 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии по математике при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 25 апреля 2018 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета
Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие вопросы современной математики, механики и физики требуют новых подходов к решению дифферен-циальных уравнений в частных производных, описывающих определ-енные физические процессы. В большинстве случаев таким методом является метод разделения переменных. Обоснование метода Фурье при решении дифференциальных уравнений в частных производных приводит к изучению спектральных свойств соответствующих диф-ференциальных операторов. Эта задача включает в себя, в частности, вопросы полноты, минимальности и базисности собственных и присоединенных функций (СПФ) обыкновенных дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах. В последнее время наряду с вышеуказанными свойствами стали изучать также свойства фреймовости систем и в частности свойства атомарного разложения для систем, состоящих из СПФ дифференциальных операторов не только в классических функциональных пространствах как C, L_p, W_p^n, так и в неклассических пространствах, как $L_{p(x)}$, $W_{p(x)}^n$, $M^{p,\alpha}$.

К настоящему времени наиболее продвинутой является спектральная теория самосопряженных дифференциальных операторов благодаря работам Дж. фон Неймана, Д.Гильберта, Э.Шмидта. Фундаментальные результаты в этом направлении получены Е.Титчмаршом, Б.М.Левитаном, М.А.Наймарком, М.Г.Крейном, И.М.Глазманом, А.Г. Костюченко, Ю.М.Березанским. Одновременно развивалась и спек-тральная теория несамосопряженных дифференциальных операторов.

Остановимся подробнее на работах некоторых авторов, которые имеют непосредственное отношение к теме диссертации. Рассмотрим краевую задачу, порождаемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda y \qquad (1)$$

и линейно-независимыми краевыми условиями

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(0) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(1) = 0,\ \nu = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Развитие спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов было начато в работах А.Пуанкаре, Г.Биркгофа, Р.Лангера, Я.Тамаркина, К.Уайлдера и др.

Вопросы базисности, базисности Рисса, базисности Рисса со скобками СПФ регулярных задач, а также сходимость спектральных разложений по СПФ нерегулярных задач (1), (2) изучены в работах В.П.Михайлова, Г.М.Кесельмана, Н.Данфорда, Дж.Т.Шварца, А.А.Шкаликова, Р.Тёрнера, Г.Бензингера, Л.Уорда, М.Стоуна, В.Эбергарда, Э.Коддингтона, А.Н.Кролла, А.П.Хромова, Дж.Фрайлинга и других авторов.

Другой подход к исследованию базисности систем СПФ несамосопряженных операторов предложен В.А.Ильиным. Это направление было развито в работах Е.И.Моисеева, В.Д.Будаева, Н.Б.Керимова, В.М.Курбанова, И.С.Ломова, Л.Крицкова и других.

В исследовании спектральных задач для пучков обыкновенных дифференциальных операторов основополагающими являются результаты работ Я.Д.Тамаркина и М.В.Келдыша. М.В.Келдыш заметил, что для обоснования метода Фурье при решении задачи Коши для уравнений с частными производными естественным образом возникает вопросы об n-кратной полноте и им же доказана такая теорема в случае абстрактных операторных пучков. Для операторных пучков n-кратная полнота и сходимость n-кратных разложений изучены также в работах Дж.Э.Аллахвердиева, М.Г.Гасымова, А.Г.Костюченко, А.С. Маркуса, В.И.Мацаева, Ф.Г.Максудова, М.Г.Джавадова, Р.Джабарзаде, А.О.Кравицкого, М.Б.Оразова, А.А. Шкаликова, С.Я.Якубова, С.С.Мирзоева, Г.В.Радзиевского, А.М.Ахмедова и др.

Спектральные свойства задач со спектральным параметром в граничных условиях изучены в работах Ж.Уолтера, Ч.Т.Фултона, А.Шнайдера, Е.М.Руссаковского, Д.Хинтона, А.Диксма, П.Байдинга, П.Дж.Брауна, Б.А.Ватсона. В работе А.А.Шкаликова построена общая теория спектральных задач (1),(2), в случае, когда коэффициенты уравнения и граничных условий полиномиально зависят от спектрального параметра. В этой работе выделены классы регулярных, почти-регулярных и нормальных задач. Построены специальные пространства, в которых эти задачи допускают естественную линеаризацию, и доказаны теоремы о полноте, разложении и базисности Рисса со скобками и о базисности Рисса в этих пространствах. В работе Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина для задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии впервые было замечено, что система СПФ спектральной задачи, после удаления произвольной собственной функции, образуют базис Рисса в пространстве L_2. Различные обобщения этих результатов получены в работах Н.Б.Керимова, В.С.Мирзоева, З.С.Алиева. Р.Г.Поладова, Д.Б.Марченкова, Я.Н.Алиева.

В более общей форме абстрактные аналоги этих задач рассмотрены в работе Б.Т.Билалова и Т.Р.Мурадова. Этой работе предшествовали работы И.Ц.Гохберга и А.С.Маркуса, А.А.Шкаликова, где изучались дефектные базисы. В диссертационной работе более подробно изучены эти задачи в абстрактной постановке и найдены конструктивные необходимые и достаточные условия.

При установлении базисных свойств системы СПФ дифференциальных операторов наряду с методами теории возмущения операторов используются также методы теории базисов систем в гильбертовых и банаховых пространствах и вопросы их устойчивости. Теория исследования базисных свойств близких систем берет свое начало с основополагающей работы Пэли и Винера. Затем Левинсон уточнил этот результат, а Кадец получил не улучшаемую оценку. В работе М.Г.Крейна, Д.П.Мильмана и М.А.Рутмана впервые было указано свойство устойчивости базиса банахова пространства. Н.К.Бари показала, что в случае гильбертова пространства достаточным условием для базисности Рисса системы является условие квадратичной близости к ортонормированной системе и условие $\omega-$линейной независимости. В работах Б.Т.Билалова даны обобщения теорем Пэли-Винера и Н.К.Бари на случай банахова пространства. Б.Т.Билаловым замечено, что условие ω-линейной независимости в подобных теоремах эквивалентно к полноте, минимальности и базисности в том числе. Базисным свойствам систем функций типа экспонент, синусов и косинусов посвящены работы А.М.Седлецкого, Е.И.Моисеева, А.И. Барменкова , А.Ю.Казмина, Г.Г.Девдериани Б.Т.Билалова и других.

Естественным обобщением обыкновенных дифференциальных операторов являются квазидифференциальные операторы. Спектральная задача для квазидифференциальных операторов на отрезке $[0,1]$ задается уравнением

$$y^{[n]} = \lambda y, \tag{3}$$

и граничными условиями

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_{\nu j} y^{[j]}(0) + \beta_{\nu j} y^{[j]}(1)\right) = 0, \ \nu = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $y^{[j]}$, $j=\overline{0,n}$ - квазипроизводные функции $y(x)$, определяемые формулами

$$y^{[0]}=p_{00}y\,,\ y^{[k]}=p_{kk}\frac{d}{dx}y^{[k-1]}+\sum_{j=1}^{k-1}p_{kj}y^{[j]}\,,\ k=\overline{1,n}\,. \qquad (5)$$

Квазипроизводные (5) впервые были введены Д.Шином. В работах В.С.Рыхлова в случае $p_{kk}(x)\equiv 1$, $k=\overline{0,n}$, изучены вопросы сходимости спектральных разложений по СПФ регулярных задач (3), (4), а также доказана теорема о безусловной базисности СПФ усиленно регулярных задач (3), (4) в пространстве $L_2(0,1)$. В работах автора для квазидифференциального уравнения (3) рассматривались нелокальные разрывные краевые условия. Нелокальные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов рассматривались многими авторами. В последнее время растущий интерес к нелокальным краевым задачам в значительной степени объясняется потребностями физики. В этой связи отметим работу А.В.Бицадзе и А.А.Самарского, где впервые были изучены математические модели, приводящие к рассмотрению нелокальных краевых условий. Впоследствии эта проблематика получила развитие в работах ряда авторов. А.А.Шкаликов определил понятие регулярности в случае общих краевых условий с интегралом Стилтьеса и доказал теорему о базисности Рисса СПФ в $L_2(0,1)$. Нелокальные краевые задачи для дифференциального оператора второго порядка изучали В.А.Ильин и Е.И.Моисеев. Дифференциальные операторы с интегральными краевыми условиями изучал А.М.Кралл. Аналоги теорем о базисности Рисса в L_2 и о базисности в L_p для обыкновенных дифференциальных и квазидифференциальных операторов с разрывными многоточечными и общими интегральными краевыми условиями доказаны в работах автора. Другие обобщения этих результатов получены также в работе А.М.Гомилько и Г.В.Радзиевского. Из последних отметим работы А.В. Махней, Р.М. Таций, А.А.Шкаликов, А.М.Савчук, И.Гусейнов и Р.Пашаев, где рассматриваются дифференциальные операторы с обобщенными потенциалами и которые трактуются с помощью квазидифференциальных операторов.

Следует отдельно отметить дифференциальные операторы, порожденные регулярными, но не усиленно регулярными граничными условиями. Вопросы базиности Рисса и базисности Рисса со скобками

СПФ таких операторов в L_2 исследованы в работах А.А.Шкаликова, Н.Б.Керимова, Х.Р.Мамедова, А.С.Макина, Н.Дернек, О.А. Велиева, П.Е. Джакова Б.С.Митягина, В.М.Курбанова.

К вопросам сходимости спектральных разложений тесно примыкает теория дробных степеней позитивных операторов. В этой связи отметим работы М.А.Красносельского , Е.И.Пустыльника, Ш.А.Алимова, М.С.Аграновича и других. Важным является вопрос об описании областей определения дробных степеней позитивных операторов. Этому вопросу посвящены работы Д.Фудзивары, П.Гривара, Р.Сили, И.Д.Евзерова и П.Е.Соболевского.

Как следует из вышеизложенных, спектральные свойства обыкновенных дифференциальных и квазидифференциальных операторов в основном были изучены для двухточечных и интегральных граничных условий. А разрывные дифференциальные и квазидифференциальные операторы с разрывными многоточечными и разрывными интегральными граничными условиями в общей постановке не были изучены. В диссертационной работе дается общий подход к изучению разрывных дифференциальных операторов, предлагается новые методы исследования вопросов базисности СПФ разрывных дифференциальных операторов, дается описание областей определения дробных степеней таких операторов. Некоторые из полученных результатов являются новыми и в случае обыкновенных дифференциальных операторов с двухточечными и интегральными краевыми условиями. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет собой научный интерес.

Цель работы. 1. Разработать абстрактные методы, позволяющие исследовать базисные свойства СПФ спектральных задач для дифференциальных операторов содержащих спектральный параметр в граничных условиях.

2. Разработать абстрактные методы для исследования спектральных свойств разрывных дифференциальных операторов.

3. Описать все правильные операторы, порожденные разрывными дифференциальными операторами, имеющие разные порядки на разных частях основного интервала, построить функцию Грина таких дифференциальных операторов с общими интегральными краевыми условиями.

4. Исследовать базисные свойства СПФ разрывных дифференциальных операторов с регулярными многоточечными и интегральными краевыми условиями.

5. Описать области определения дробных степеней разрывных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями.

6. Изучить спектральные свойства некоторых модельных задач математической физики и механики, приводящие к спектральным задачам для разрывных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

- получены необходимые и достаточные условия для полноты, минимальности и базисности дефектных систем банахова пространства;
- доказаны теоремы о полноте, минимальности, базисности и фреймовости систем из прямой суммы банаховых пространств исходя из соответствующих систем из подпространств;
- дано описание разрешимых расширений минимального и правильных сужений максимального операторов, и в частности, всех правильных операторов, порожденных разрывными дифференциальными операторами, построена функция Грина таких операторов с общими интегральными краевыми условиями;
- выделены классы регулярных многоточечных и интегральных краевых условий для разрывных дифференциальных операторов, получены асимптотические формулы для собственных значений и доказаны теоремы о базисности в L_p, а также базисности Рисса в L_2 СПФ регулярных краевых задач;
- доказана позитивность разрывных дифференциальных операторов с общими интегральными краевыми условиями, получена оценка комплексных степеней таких операторов;
- дано описание областей определения дробных степеней разрывных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями, а также конструктивное описание областей определения полуцелых дробных степеней в случае многоточечных краевых условий;
- доказаны теоремы о базисности СПФ некоторых модельных дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в граничных условиях;
- предложен новый подход к изучению базисных свойств СПФ некоторых разрывных дифференциальных операторов со спектральным параметром в условиях разрыва и доказана базисность СПФ в

пространствах Лебега $L_p, 1 < p < +\infty$, а также в пространствах типа Морри $M^{p,\alpha}, 1 < p < +\infty; 0 < \alpha \leq 1$.

Общая методика исследования. В работе применяются методы теории функций действительного и комплексного переменных, теории дифференциальных уравнений, методы функционального анализа, в частности, теории линейных операторов в гильбертовом и банаховом пространствах, методы теории базисов и фреймов, методы теории аппроксимации.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, при обосновании метода Фурье для решения различных задач математической физики и механики, в частности, задач теории колебаний, гидромеханики, теории упругости, приводящие к изучению несамосопряженных дифференциальных операторов. Результаты также могут быть использованы в теории аппроксимации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах академика М.Г.Гасымова «Функциональный анализ и его приложения», на общеинститутском семинаре ИММ НАНА, на семинарах отделов «Негармонический анализ» (чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), «Дифференциальные уравнения» (проф. А.Б.Алиев), «Функциональный анализ» (проф. Г.И. Асланов), «Теория функций» (профессор НАНА, д.н.м. В.Э.Исмайлов), на семинаре кафедры « Теория функций и функциональный анализ» БГУ (проф. А.М.Ахмедов), на Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию чл.-корр. НАНА, проф. И.Т.Мамедова (Баку, 2005 г.), на 12-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летнему юбилею чл.-корр. НАНА, проф. Б.А.Искендерова (Баку, 2006 г.), на 13-й Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летию акад. НАНА А.Д.Гаджиева (Баку, 2007 г.), на Международной конференции по математике и маханике, посвященной 50-летию ИММ НАНА (Баку, 2009 г.), на научной конференции, посвященной 100-летию заслуженного деятеля науки, академика А.И.Гусейнова (Баку, 2007 г.), на Международной конференции «Функциональный анализ и его приложения», посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку, 2011 г.), на Международной конференции «Спектральная теория операторов и ее приложения», посвященной памяти проф. А.Г.Костюченко (Уфа, Россия, 2011 г.), на Международной конференции МАДЕА-7 (Баку, 2015 г.), на VI конференции Грузинского Математического Общества (Батуми, Грузия, 2015 г.), на Международной Workshop «Негармонический анализ и дифференциальные уравнения» (Баку,2016г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 46 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 249 наименований. Объем диссертации 262 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена некоторым вопросам теории базисов и фреймов в банаховых пространствах.

В 1.1 приведены стандартные обозначения, основные понятия теории базисов, а также известные критерии полноты, минимальности, базисности и базисности со скобками.

В 1.2 изучаются дефектные базисы. Последователь-ность $\{x_n\}_{n\in N}$ элементов банахова пространства X называется дефектным базисом, если из нее можно исключить конечное число элементов так, что оставшаяся последовательность будет базисом своей замкнутой линейной оболочки.

Пусть X_0 некоторое банахово пространство и $X = X_0 \oplus C^m$, где $C^m - m$-копия множества комплексных чисел. Тогда X также будет банаховым пространством относительно нормы

$$\|\hat{u}\|_X = \left(\|u\|_{X_0}^2 + \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\hat{u} = (u; \alpha_1, ..., \alpha_m) \in X$, $u \in X_0$, $\alpha_k \in C$, $k \in 1:m$. Тогда $X^* = X_0^* \oplus C^m$. Основными результатами параграфа 1.2 являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$, *где* $\hat{u}_n=(u_n;\alpha_{n1},...,\alpha_{nm})$, *минимальная система в* $X=X_0\oplus C^m$, *а* $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n\in N}$, *где* $\hat{\vartheta}_n=(\vartheta_n;\beta_{n1},...,\beta_{nm})\in X^*$, *биортогональная система,* $J=\{n_1,...,n_m\}\subset N$ *− набор различных* m *натуральных чисел,* $N_J=N\setminus J$. *Положим* $\delta=\det\left\|\beta_{n_k j}\right\|_{k,\,j=1}^{m}$. *Если* $\delta\neq 0$, *то система* $\{u_n\}_{n\in N_J}$ *является минимальной в* X_0. *При этом биортогональная система имеет вид*

$$\vartheta_n^*=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}\vartheta_n & \vartheta_{n_1} & \dots & \vartheta_{n_m}\\ \beta_{n1} & \beta_{n_1 1} & \dots & \beta_{n_m 1}\\ . & . & . & . \quad .\\ \beta_{nm} & \beta_{n_1 m} & \dots & \beta_{n_m m}\end{vmatrix}.$$

Если же $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ *полна и минимальна в* X *и* $\delta=0$, *то система* $\{u_n\}_{n\in N_J}$ *не полна в* X_0.

Теорема 2. *Пусть* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ *полна и минимальна в* X. *Если* $\delta\neq 0$, *то система* $\{u_n\}_{n\in N_J}$ *полна и минимальна в* X_0.

Теорема 3. *Пусть* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ *базис пространства* X. *Тогда для базисности системы* $\{u_n\}_{n\in N_J}$ *в пространстве* X_0 *необходимо и достаточно выполнения условия* $\delta\neq 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\hat{u}_n\}_{n\in N}$ *базис Рисса в пространстве* $X=X_0\oplus C^m$, *где* X_0*- гильбертово пространство. Тогда для базисности Рисса системы* $\{u_n\}_{n\in N_J}$ *в* X_0 *необходимо и достаточно выполнения условия* $\delta\neq 0$.

В 1.3 получены необходимы и достаточные условия для полноты, минимальности и базисности систем в банаховом пространстве, которые получаются от исходной системы путем изменения конечного числа элементов, а также указаны связи доказанных теорем с результатами параграфа 1.2.

В 1.4 рассматривается разложение банахова прост-ранства по подпространствам и предлагается один способ образования базиса пространства исходя из базисов подпространств. Этот метод образования базиса имеет применений в спектральной теории разрывных дифференциальных операторов. Пусть имеет место прямое разложение $X = X_1 \oplus ... \oplus X_m$, где X_i, $i \in 1:m$, некоторые банаховы пространства. Норму в X определим по формуле

$$\|x\|_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_{X_i}^2} ,$$

где $x \in X \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_k \in X_k$, $k \in 1:m$. Тогда $X^* = X_1^* \oplus \ldots \oplus X_m^*$ и для $f \in X^*$, $x \in X$ имеет место

$$< x, f >= \sum_{i=1}^{m} < x_i, f_i >,$$

где $f = (f_1, ..., f_m)$ и для нормы f справедливо

$$\| f \|_{X^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{X_i^*}^2} .$$

Пусть при каждом $i \in 1:m$ в пространстве X_i задана некоторая система $\{u_n^{(i)}\}_{n \in N}$. Рассмотрим в пространстве X следующую систему

$$\hat{u}_n^{(i)} = \left(a_{i1} u_n^{(1)}, a_{i2} u_n^{(2)}, \ldots, a_{im} u_n^{(m)}\right), i \in 1:m; n \in N, \tag{6}$$

где a_{ij} комплексные числа. Положим $\Delta = \det\left(a_{ij}\right)_{i,j \in 1:m}$. Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть система* $\{u_n^{(i)}\}_{n \in N}$ *полна (минимальна) в пространстве* X_i, $i \in 1:m$. *Если* $\Delta \neq 0$, *то система* $\{\hat{u}_n^{(i)}\}_{i \in 1:m; n \in N}$ *также полна (минимальна) в пространстве* X.

В случае $\Delta = 0$ теорема перестает быть верной и доказаны соответствующие теоремы в этом случае. Далее исследуется вопрос базисности системы (6) в пространстве X. Отдельно рассматривается два случая. В первом случае предполагается, что подпространства X_i, $i \in 1:m$, попарно изоморфны. В этом случае справедлива

Теорема 6. *Пусть банаховы пространства* $X_i, i \in 1:m$*, попарно изоморфны и системы* $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n\in N}$ *изоморфные базисы в них, соответственно. Если* $\Delta \neq 0$*, то система* $\left\{\hat{u}_n^{(i)}\right\}_{i\in 1:m;\, n\in N}$ *образует базис в* X*, изоморфный базису* $\left\{\tilde{u}_n^{(i)}\right\}_{i\in 1:m;\, n\in N}$.

Далее рассматривается случай, когда изоморфизм подпространств X_i, $i \in 1:m$, не требуется. В этом случае доказана

Теорема 7. *Пусть система* $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n\in N}$ *образует базис* X_i, $i \in 1:m$. *Если* $\Delta \neq 0$*, то система* $\left\{\hat{u}_n^{(i)}\right\}_{i\in 1:m;\, n\in N}$ *является базисом со скобками в пространстве* X. *Если, кроме того, выполняются условия* $\sup\limits_n\left\{\left\|u_n^{(i)}\right\|;\left\|\vartheta_n^{(i)}\right\|\right\} < +\infty, i \in 1:m,$ *где* $\left\{\vartheta_n^{(i)}\right\}_{n\in N}$ *биортогональная к* $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n\in N}$ *система, то система* $\left\{\hat{u}_n^{(i)}\right\}_{i\in 1:m;\, n\in N}$ *образует базис в* X .

В 1.5, как и в предыдущем параграфе, рассматривается прямое разложение $B-$пространства по подпространствам и предлагается один способ образования атомарного разложения исходя из атомарных разложений подпространств. Пусть имеет место прямое разложение $X = X_1 \oplus ... \oplus X_m$, где X_i, $i \in 1:m$, некоторые $B-$пространства и при каждом $i \in 1:m$ задана система $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n\in N} \subset X_i$. Рассмотрим в пространстве X следующую систему

$$u_{in}^0 = (\underbrace{0,\ldots,0,u_n^{(i)}}_{i},0,\ldots,0), i \in 1:m;\ n \in N .$$

Пусть K - некоторое пространство коэффициентов и $K_m = K^m$ и для $\left\{\vec{\lambda}_n\right\} = \left\{\lambda_n^{(1)},...,\lambda_n^{(m)}\right\} \in K^m$ норму определим как $\left\|\vec{\lambda}_n\right\| = \sum\limits_{k=1}^{m}\left\|\left\{\lambda_n^{(k)}\right\}\right\|_K$.

Возьмем $\vartheta = \left(\vartheta^{(1)},..., \vartheta^{(m)}\right) \in X^*$ и положим

$$\vec{\vartheta}(x) = \left(\vartheta^{(1)}(x_1),\ldots,\vartheta^{(m)}(x_m)\right), \quad \forall x \in X,\ x = (x_1,..., x_m).$$

Кроме того, положим $\vec{\vartheta}(x)y = \left(\vartheta^{(1)}(x_1)y_1,\ldots,\vartheta^{(m)}(x_m)y_m\right) \in X$ для $y = (y_1,\ldots,y_m) \in X$ и примем следующее

Определение 1. *Будем говорить, что пара* $\left(\{u_n\};\{\vec{\vartheta}_n\}\right)$, $\left(u_n \in X, \vec{\vartheta}_n \in X^*\right)$ *является атомарным разложением* X *относительно пространства коэффициентов* K_m, *если выполнены:*

i) $\left\{\vec{\vartheta}_n(x)\right\} \in K_m, \ \forall x \in X$;

ii) $\exists A, B > 0;\ A\left\|\left\{\vec{\vartheta}_n(x)\right\}\right\|_{K_m} \le \|x\|_X \le B\left\|\left\{\vec{\vartheta}_n(x)\right\}\right\|_{K_m}, \ \forall x \in X$;

iii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\vartheta}_n(x) u_n, \ \ \forall x \in X$.

Рассмотрим систему $\vec{u}_{in} = \left(a_{i1}u_n^{(1)}, \dots, a_{im}u_n^{(m)}\right), \ i \in 1:m; \ \ n \in N$, где a_{ij} некоторые числа и положим $A = \left(a_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{m}$, $\Delta = \det A$. Доказана следующая основная

Теорема 8. *Пусть имеет место прямое разложение* $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$, *пара* $\left(\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n \in N}; \left\{\vartheta_n^{(i)}\right\}_{n \in N}\right)$ *является атомарным разложением* X_i, $i \in 1:m$, *относительно* K, $T_{ij} \in L\left(X_i, X_j\right)$*-изоморфизм и* $T_{ij}u_n^{(i)} = u_n^{(j)}$, $\forall n \in N$, *при* $i \ne j$. *Предположим, что операторы* T_{ij}, $i, j \in 1:m$, *удовлетворяют условию A),* $\Delta \ne 0$ *и оператор* $T \in L(X)$ *определяется матрицей* $\left(a_{ij}T_{ij}\right)_{i,\,j=1}^{m}$, *.Тогда пара* $\left(\left\{\left\{Tu_{in}^0\right\}_{n \in N}\right\}_{i \in 1:m}; \left\{\left\{\left(T^*\right)^{-1}\vartheta_{in}^0\right\}_{n \in N}\right\}_{i \in 1:m}\right)$ *тоже является атомарным разложением* X *относительно пространства* K_m.

Вторая глава состоит из пяти параграфов и посвящена некоторым общим вопросам теории краевых задач для разрывных диффере-нциальных операторов. В параграфе 2.1 изучаются квазидифферен-циальные операторы и приведены некоторые необходимые определе-ния и факты из общей теории.

В 2.2 изучаются разрывные квазидифференциальные операторы. Пусть $-\infty < a = x_0 < x_1 < x \ldots < x_l = b < +\infty$ и на каждом интервале $\left(x_{s-1}, x_s\right)$ задано квазидифференциальное выражение

$$l_s(y) = y^{[n_s]},$$

коэффициенты $p_{skj}(x)$ которых удовлетворяют условиям A) на каждом интервале (x_{s-1}, x_s). Порядки квазидифференциальных выражений $n_1, ..., n_l$, вообще говоря, различны. Пусть $\chi_s(x)$ – характеристическая функция интервала (x_{s-1}, x_s), а $f(x) \in L_q(a,b)$. Рассмотрим уравнение

$$l(y) \overset{def}{=} \sum_{s=1}^{l} \chi_s(x) l_s(y) = f(x). \tag{7}$$

Обозначим

$$W_{p,q}^{[n_1,...,n_l]}(x_0, x_1, ..., x_l) = W_{p,q}^{[n_1]}(x_0, x_1) \dot{+} ... \dot{+} W_{p,q}^{[n_l]}(x_{l-1}, x_l),$$

где $W_{p,q}^{[k]}(x_{s-1}, x_s), s = 1:l, \ k \in 1:n$, пространство функций $y(x) \in L_p(x_{s-1}, x_s)$ квазипроизводные которых до $(k-1)$ – го порядка абсолютно непрерывны на (x_{s-1}, x_s), а квазипроизводная $y^{[k]}(x)$ принадлежит $L_q(x_{s-1}, x_s)$. Под решением уравнения (7) понимается функция $y(x) \in W_{p,q}^{[n_1,...,n_l]}(x_0, x_1, \ldots, x_l)$, удовлетворяющая почти всюду в (a,b) уравнению (7). Используя определения прямой суммы операторов, положим

$$\widetilde{L} = \widetilde{L}_1 \dot{+} ... \dot{+} \widetilde{L}_l \text{ и } L_0 = L_{01} \dot{+} ... \dot{+} L_{0l}, \tag{8}$$

где $\widetilde{L}_s$ и L_{0s} соответственно максимальный и минимальный операторы, порожденные квазидифференциальным выражением

$l_s(y) = y^{[n_s]}$. Аналогично определяются операторы

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}_1 \dot{+} ... \dot{+} \widetilde{T}_l \text{ и } T_0 = T_{01} \dot{+} ... \dot{+} T_{0l}, \tag{9}$$

где $\widetilde{T}_s$ и T_{0s} максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным квазидифференциальным выражением $l_s^*(z) = z^{\{n_s\}}$, а сопряженное к (8) уравнение имеет вид

$$l^*(z) \overset{def}{=} \sum_{s=}^{l} \chi_s(x) l_s^*(z) = g(x), \ \ g \in L_{p'}(a,b).$$

Теорема 9. *Операторы* $\widetilde{L}, L_0, \widetilde{T}, T_0$, *определяемые (8), (9), являются замкнутыми плотно заданными операторами и удовлетворяют соотношениям*

1) $\widetilde{L}^* = T_0,\ T_0^* = \widetilde{L},\ \widetilde{T}^* = L_0,\ L_0^* = \widetilde{T}$ *;*

2) $\operatorname{Im} L_0 = \left(Ker\widetilde{T}\right)^{\perp},\ \operatorname{Im} T_0 = \left(Ker\widetilde{L}\right)^{\perp}$.

В 2.3 дается описание всех правильных операторов, порожденных разрывным квазидифференциальным уравнением (7). Приведем некоторые определения.

Определение 2. *Оператор* L *называется правильным сужением максимального оператора* $\widetilde{L}$, *если* L *является сужением оператора* $\widetilde{L}$ $\left(L \subset \widetilde{L}\right)$ *и существует обратный оператор* L^{-1}, *ограниченный на всем* $L_q(a,b)$.

Определение 3. *Оператор* L *называется разрешимым расширением минимального оператора* L_0, *если* L *является расширением оператора* $L_0\left(L \supset L_0\right)$ *и существует обратный оператор* L^{-1}, *ограниченный на всем* $L_q(a,b)$.

Определение 4. *Замкнутый оператор* L, *являющийся одновременно разрешимым расширением* L_0 *и правильным сужением* $\widetilde{L}$, *называется правильным оператором, порожденным уравнением (7).*

Пусть L_{cs} оператор, порожденный квазидифференциальным выражением $l_s(y) = y^{[n_s]}$ и начальными условиями $y^{[k]}\left(x_{s-1}+0\right) = 0$, $k \in 1:n_s - 1$. Очевидно, что $L_{0s} \subset L_{cs} \subset \widetilde{L}_s$ и существует оператор L_{cs}^{-1}, ограниченный на всем $L_q\left(x_{s-1}, x_s\right)$. Обозначим $L_c = L_{c1} \dot{+} \ldots \dot{+} L_{cl}$. Тогда L_c является правильным оператором, порожденным уравнением (7). Доказаны следующие теоремы.

Теорема 10. *Оператор* L *является правильным сужением максимального оператора* $\widetilde{L}$ *тогда и только тогда, когда он допускает представления*

$$\left(L^{-1} f\right)(x) = \left(L_c^{-1} f\right)(x) + \sum_{s=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_s} < f, g_{sj} > \chi_s(x) y_{sj}(x), \qquad (10)$$

где $f(x)$ – *произвольная функция из* $L_q(a,b)$, $g_{sj}(x)$ – *некоторые функции из* $L_{q'}(a,b)$, $y_{sj}(x)$, $j \in 1:n_s$, *фундаментальная система решений уравнения* $y^{[n_s]}=0$, *удовлетворяющие условиям*

$$y_{sj}^{[k-1]}(x_{s-1}+0)=\delta_{kj}, \quad k,j \in 1:n_s .$$

При этом область определения $D(L)$ *правильного сужения* L *состоит из функций* $y \in D(\tilde{L})$, *удовлетворяющих граничным условиям*

$$y^{[j-1]}(x_{s-1}+0)=<\tilde{L}y, g_{sj}>, \quad j \in 1:n_s, \quad s \in 1:l .$$

Теорема 11. *Правильное сужение* $L \subset \tilde{L}$ *является разрешимым расширением минимального оператора* L_0 *тогда и только тогда, когда функции* g_{sj} *из (10) принадлежат* $Ker\tilde{T}$.

Теорема 12. *Любой правильный оператор* L, *порожденный уравнением (7), описывается заданием области определения* $D(L)$ *с помощью условий*

$$y^{[j-1]}(x_{s-1}+0)=\sum_{\tau=1}^{l}\sum_{k=0}^{n_\tau-1}\left(a_{sj\tau k}y^{[k]}(x_{\tau-1}+0)+b_{sj\tau k}y^{[k]}(x_\tau-0)\right),$$

которым должен быть подчинен элемент из $D(\tilde{L})$.

В случае $p=2$ для обыкновенных дифференциальных операторов соответствующая теорема доказана А.А.Дезиным.

В 2.4 рассматривается оператор L, порожденный уранением (7) и линейно независимыми краевыми условиями

$$U_\nu(y)=\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=0}^{n_s}\int_{x_{s-1}}^{x_s} y^{[j]}(x)g_{\nu sj}(x)dx=0, \quad \nu \in 1:n,$$

где $n=n_1+...+n_l$. При предположении, что коэффициенты квазидифференциального выражения удовлетворяют на каждом интервале (x_{s-1},x_s) условиям A) с $p=q$, построена функция Грина оператора $L-\lambda I$.

В 2.5 дается описание сопряженного оператора L, порожденого уравнением (7) и разрывными многоточечными краевыми условиями.

Третья глава посвящена изучению базисных свойств СПФ разрывных квазидифференциальных операторов, порожденных регулярными краевыми условиями в пространствах $L_p(a,b)$. Эта глава состоит из пяти параграфов.

В 3.1 рассматривается уравнение

$$y^{[n]}+\rho^n y=0, \quad x\in(a,b), \tag{11}$$

где квазипроизводные определены равенствами (5), а коэффициенты $p_{kj}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\text{Б)}\ \ p_{kk}\in W_1^1\left(x_0,\ldots,x_l\right),$$

$$p_{kj}\in L_1\left(a,b\right),k\in 1:n,\ j\in 1:k-1;\ \prod_{k=1}^{n}p_{kk}\left(x\right)>0, \quad x\in\left[a,b\right];$$

$a=x_0<x_1<\ldots<x_l=b$, через $W_1^1(x_0,\ldots,x_l)$ обозначено множество функций, которые абсолютно непрерывны на каждом интервале (x_{s-1},x_s), $s\in 1:l$. Разобьем комплексную $\rho-$плоскость на секторы S_γ, определяемые неравенством

$$\frac{\gamma\pi}{n}\le\arg\rho\le\frac{(\gamma+1)\pi}{n},\ \gamma\in 0:(2n-1).$$

Обозначим через $\omega_1,\ldots,\omega_n$ корни $n-$ой степени из -1 занумерованные так, что для всех $\rho\in S_\gamma$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\rho\omega_1\le\operatorname{Re}\rho\omega_2\le\ldots\le\operatorname{Re}\rho\omega_n.$$

В каждом секторе S_γ комплексной $\rho-$плоскости и в каждом интервале $\left(x_{s-1},x_s\right)$ уравнение (11) имеет n линейно независимых решений $y_{s1}(x,\rho),y_{s2}(x,\rho),\ldots,y_{sn}(x,\rho)$, регулярных по $\rho\in S_\gamma$ и при $|\rho|$ достаточно большом имеющих асимптотику

$$y_{sk}^{[j]}(x,\rho)=(\rho\omega_k)^j V_{sj}(x)e^{\rho\omega_k\alpha_s'(x)}\left(1+h_{skj}(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

$$s=\overline{1,l},\ k=\overline{1,n},\ j=\overline{0,n-1},$$

здесь $V_{sj}(x),\alpha_s(x),h_{skj}(x)$ - некоторые функции, явно выражаемые через коэффициенты уравнения.

Определение 5. *Нормированными будем называть краевые условия вида*

$$U_\nu(y)=\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=0}^{æ_\nu}\int_{x_{s-1}}^{x_s} y^{[j]}(t)d\sigma_{\nu sj}(t)=0,\ \nu\in 1:nl, \tag{12}$$

где $n-1\ge æ_1\ge æ_2\ge ...\ge æ_{nl}\ge 0$, $æ_\nu > æ_{\nu+2l}$, $\sigma_{\nu sj}(t)$ *– функции ограниченной вариации, причем* $\prod_{\nu=1}^{nl}\sum_{s=1}^{l}\left|\sigma_{\nu sæ_\nu}(t)\right|\ne 0$.

Пусть $\alpha_{\nu sj}$, $\beta_{\nu sj}$ скачки функции $\sigma_{\nu sj}(t)$, соответственно, в точках x_{s-1}, x_s. Положим также $a_{\nu k}^s=\alpha_{\nu sæ_\nu}\omega_k^{æ_\nu}V_{sæ_\nu}(x_{s-1})$ и $b_{\nu k}^s=\beta_{\nu sæ_\nu}\omega_k^{æ_\nu}V_{sæ_\nu}(x_s)$. Для определения понятия регулярности краевых условий, отдельно рассмотрим случаи четного и нечетного n. Пусть $n=2\mu$. Определим числа η_1 и η_{-1} следующим образом:

$$\eta_1=\det\left\|A_1^1\ldots A_1^l\right\|,\ \eta_{-1}=\det\left\|A_{-1}^1\ldots A_{-1}^l\right\|, \tag{13}$$

где $A_1^s=\left(c_{ik}^{1,s}\right)_{i\in 1:nl;k\in 1:n}$, $c_{ik}^{1,s}=a_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in\{1,...,\mu-1,\mu+1\}$ и $c_{ik}^{1,s}=b_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in\{\mu,\mu+2,...,n\}$; $A_{-1}^s=\left(c_{ik}^{-1,s}\right)_{i\in 1:nl;k\in 1:n}$, $c_{ik}^{-1,s}=a_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in 1:\mu$, и $c_{ik}^{-1,s}=b_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in(\mu+1):n$, $s\in 1:l$.

В случае $n=2\mu-1$ определим числа η_0 и η_1 следующим образом:

$$\eta_0=\det\left\|A_0^1\ldots A_0^l\right\|,\ \eta_1=\det\left\|A_1^1\ldots A_1^l\right\|, \tag{14}$$

где $A_0^s=\left(c_{ik}^{0,s}\right)_{i\in 1:nl;k\in 1:n}$, $c_{ik}^{0,s}=a_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in 1:\mu$ и $c_{ik}^{1,s}=b_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in(\mu+1):n$; $A_1^s=\left(c_{ik}^{1,s}\right)_{i\in 1:nl;k\in 1:n}$, $c_{ik}^{1,s}=a_{ik}^s$ при $i\in 1:nl$, $k\in 1:(\mu-1)$ и $c_{ik}^{1,s}=b_{ik}^s$ при $i\in 1:nl, k\in(\mu+1):n$, $s\in 1:l$.

Определение 6. *Краевые условия (12) называются регулярными, если при* $n=2\mu$ *числа* η_1 *и* η_{-1}, *определяемые равенствами (13), а при* $n=2\mu-1$ *числа* η_0 *и* η_1, *определяемые равенствами (14) отличны от нуля.*

Обозначим через $\Delta(\rho)$ характеристический определитель задачи (11), (12), т.е.

$$\Delta(\rho)=\det\left\|U_{vs}\left(y_{sk}\right)\right\|_{v\in 1:nl,\, s\in 1:l,\, k\in 1:n},$$

где $y_{s1}(x,\rho),\ldots,y_{sn}(x,\rho)$ фундаментальная система решений уравнения (11) на интервале $\left(x_{s-1},x_s\right)$, а U_{vs} формы, определяемые равенством

$$U_{vs}(y)=\sum_{j=0}^{\kappa_v}\int_{x_{s-1}}^{x_s}y^{[j]}(t)d\sigma_{vsj}(t).$$

Определение 7. *Краевые условия (12) называются усиленно регулярными, если они регулярны и нули характеристического определителя* $\Delta(\rho)$ *асимптотически просты и отделены некоторым числом* .

Определение регулярности не зависит от выбора сектора S_γ, припомощи которого занумерованы числа ω_k. Для регулярных задач получена асимптотика нулей функции $\Delta(\rho)$ в следующем виде

$$\rho_{m,1}=\frac{\pi}{\alpha}m+\mathrm{O}(1), \tag{15}$$

а остальные серии определяются равенствами $\rho_{m,\,j+1}=\rho_{m,1}e^{i2\pi j/n}$, $j\in 1:(n-1)$.

В 3.2 получена асимптотическое представление для функции Грина оператора $L-\lambda I$ и доказана теорема о полноте собс-твенных функций разрывного квазидифференциального оператора L с регулярными интегральными краевыми условиями.

3.3 посвящен вопросам базисности СПФ оператора L в пространстве $L_p(a,b)$, $1<p<\infty$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 13. *СПФ оператора* L, *порожденного квазидифференци-альным выражением* $l(y)=y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (12), образуют базис со скобками в пространстве* $L_p(a,b)$ *и обычный базис в этом пространстве, если краевые условия усиленно регулярны.*

В случае, когда краевые условия регулярны, но не усиленно регулярны, доказана теорема, которая дает критерий базисности СПФ.

3.4 посвящен безусловной базисности СПФ регулярной задачи в пространстве $L_2(a,b)$. При доказательстве основного резуль-тата этого параграфа существенно используются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* X_s, $s\in 1:l$, *гильбертовы пространства и* $X = X_1 \oplus ... \oplus X_l$. *Предположим, что в* X *задан ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m \,, \qquad (16)$$

такой, что проекция f_{sm} *каждого элемента* f_m *на подпространство* X_s *представляется в виде* $f_{sm} = c_{sm}\varphi_{sm}$, *где* $\{c_{sm}\}_{m\in N} \in l_2$, *а* $\{\varphi_{sm}\}_{m\in N}$ *– бесселева система в* X_s, $s\in 1:l$. *Тогда ряд (16) безусловно сходится в* X .

Лемма 2. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\omega \le 0$, *а последовательность чисел* ρ_m *имеет асимптотику (15). Предположим также, что* $V(x)$ *– ограниченная измеримая, а* $\rho^{-1}(x)$*- положительная ограниченная измеримая функции на* $[a,b]$ *и* $\alpha(x)=\int_a^x \rho(t)dt$. *Тогда система функций*

$$\varphi_m(x)=V(x)e^{\rho_m\alpha(x)}, \quad m=1,2,\ldots$$

бесселева в пространстве $L_2(a,b)$.

Лемма 3. *Пусть* ω, ρ_m, $V(x)$ *и* $\alpha(x)$ *те же самые, что и в Лемме 2 а* $\theta(t)$ *– функция ограниченной вариации. Тогда система функций*

$$\varphi_m(x)=\int_a^x V(x)e^{\rho_m\omega(\alpha(x)-\alpha(t))}d\theta(t),\ m=1,2,\ldots$$

бесселева в пространстве $L_2(a,b)$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 14. *СПФ оператора* L, *порожденного квазидифференци-альным выражением* $l(y)= y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (16) образуют базис Рисса со скобками в пространстве* $L_2(a,b)$ *и* *обычный базис Рисса в этом пространстве, если краевые условия усиленно регулярны и СПФ нормированы.*

В случае, когда краевые условия регулярны, но не усиленно регулярны, доказан критерий базисности Рисса СПФ.

В четвертой главе изучаются дробные степени разрывных квази-дифференциальных операторов. Дробные степени, так и комплексные степени операторов играют важную роль в интерполяционной теории операторов, а также в теории интерполяции пространств.

В 4.1 приводятся необходимые сведения о позитивных операторах, о дробных и комплексных степеней позитивных операторов, а также об интерполяционных пространствах.

В 4.2. получена оценка резольвенты оператора L порожденного квазидифференциальным выражением и регулярными краевыми условиями.

Определение 8. *Луч* $l=\{\lambda : \arg\lambda = \varphi\}$ *называется лучом минимального роста резольвенты оператора* L*, если резольвента* $R(\lambda)=(L-\lambda I)^{-1}$ *существует на этом луче достаточно далеко от начала и удовлетворяет неравенству*

$$\|R(\lambda)\| \le \frac{c}{|\lambda|}.$$

Теорема 15. *Пусть* ρ *принимает значения на луче, на котором* $\operatorname{Re}\rho\omega_k \ne 0$ *при всех* $k \in 1:n$. *Тогда для резольвенты оператора* L, *порожденного квазидифференциальным выражением* $l(y)=y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (12) при больших* $|\rho|$ *справедлива оценка*

$$\|R(-\rho^n)\|_{L_p \to L_p} \le \frac{c}{|\rho|^n}.$$

Для обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными по Биркгофу краевыми условиями аналогичные оценки получены в работе И.Д Евзерова и П.Е. Соболевского.

В 4.3 получена оценка для комплексных степеней оператора, порожденного задачей (11), (12). Из теоремы 14 следует, что для достаточно больших $h>0$ оператор $A=\delta L+hI$ является позитивным, где $\delta = 1$ при $n = 2\mu - 1$ или $n = 4\mu$, и $\delta = -1$ при $n = 4\mu - 2$.

Теорема 16. *Пусть оператор* L *порожден квазидифференциальным выражением* $l(y) = y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (12) и* $A = \delta\mathrm{L} + hI$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| A^z \right\| \le c e^{\pi|\mathrm{Im}\, z|}, \quad -\infty < \mathrm{Re}\, z < 0,$$

где $c > 0$ *– постоянное, не зависящее от* z.

В 4.4 дается описание областей определения дробных степеней оператора A с помощью интерполяционных пространств. Обозначая через $X_{\theta,U}$ интерполяционные пространства между $L_p(a,b)$ и $W_{p,U}^{[n]}(x_0,\ldots,x_l)$, т.е. $X_{\theta,U} = \left[L_p(a,b),\ W_{p,U}^{[n]}(x_0,\ldots,x_l)\right]_\theta$.

Доказана слудующая

Теорема 17. *Пусть оператор* L *порожден квазидифференциальным выражением* $l(y) = y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (12) и* $A = \delta\mathrm{L} + hI$. *Тогда справедливо соотношение*

$$D\left(A^{\theta+i\beta}\right) = X_{\theta,U},\ 0 < \theta < 1,\ -\infty < \beta < \infty.$$

В 4.5 рассматривается краевая задача для уравнения (11) с нормированными многоточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y) = \sum_{s=1}^{l} \sum_{j=0}^{æ_\nu} \left(\alpha_{\nu sj} y^{[j]}(x_{s-1}+0) + \beta_{\nu sj} y^{[j]}(x_s - 0) \right) = 0, \qquad (17)$$

$\nu \in 1:nl$, $n-1 \ge æ_1 \ge æ_2 \ge \ldots \ge æ_{nl} \ge 0$, $æ_\nu > æ_{\nu+2l}$.

Пусть $W_{p,U}^{[m]}(x_0,\ldots,x_l)$ множество функций из $W_p^{[m]}(x_0,\ldots,x_l)$, которые удовлетворяют условиям $U_\nu(y) = 0$, порядок которых меньше чем m, т.е. $æ_\nu < m$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 18. *Пусть оператор* L *порожден квазидифференциальным выражением* $l(y) = y^{[n]}$ *и регулярными краевыми условиями (17) и* $A = \delta\mathrm{L} + hI$. *Тогда справедливы соотношения*

$$D\left(A^{\frac{m}{n}}\right)=W_{p,U}^{[m]}\left(x_0,\ldots,x_l\right), m\in 0:n.$$

В пятой главе изучаются спектральные свойства некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов с применением результатов и методов предыдущих глав.

В 5.1 рассматривается спектральная задача

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda y, \quad x\in(a,x_1)\cup(x_1,b), \tag{18}$$

с краевыми условиями

$$U_\nu(y)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{j=0}^{æ_\nu}\left(\alpha_{\nu sj}y^{(j)}(x_{s-1}+0)+\beta_{\nu sj}y^{(j)}(x_s-0)\right)=0, \tag{19}$$

где $\nu\in 1:4$, $a=x_0<x_1<x_2=b$, $2\ge æ_1\ge æ_2\ge æ_3\ge æ_4\ge 0$; относительно коэффициентов уравнения предполагается, что выполнены следующие условия $p_0(x)\in W_1^1(x_0,x_1)\oplus W_1^1(x_1,x_2)$, $p_0(x)\ne 0$; $p_1(x), p_2(x)\in L_1(a,b)$, $\arg p_0(x)$ кусочно – постоянная функция и принимает разные значения при $x\in(x_{s-1},x_s)$, $s=1,2$.

Приведены определения регулярности и усиленной регулярности, найдены асимптотические формулы для нулей характеристического определителя. Относительно собственных функций регулярной задачи (18), (19) доказана следующая

Теорема 19. *СПФ регулярной задачи (18), (19) образуют базис со скобками в пространстве $L_p(a,b)$, и обычный базис в этом пространстве, если краевые условия усиленно регулярны.*

В 5.2 рассматривается спектральная задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$l(y)=-y''+q(x)y=\lambda y, \quad 0<x<1, \tag{20}$$

с краевыми условиями

$$(a_1\lambda+b_1)y(0)=(c_1\lambda+d_1)y'(0), \tag{21}$$

$$(a_2\lambda+b_2)y(1)=(c_2\lambda+d_2)y'(1), \tag{22}$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – комплекснозначная суммируемая функция, a_k, b_k, c_k, d_k, $(k=1,2)$ – комплексные числа. Пусть выполнены условия $\delta_1=a_1d_1-b_1c_1\ne 0$, $\delta_2=a_2d_2-b_2c_2\ne 0$. Обозначим

$$U_{11}(y)=b_1y(0)-d_1y'(0),\quad U_{12}(y)=c_1y'(0)-a_1y(0),$$
$$U_{21}(y)=b_2y(1)-d_2y'(1),\quad U_{22}(y)=c_2y'(1)-a_2y(1).$$

Рассмотрим, для определенности, случай $c_1c_2\neq 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Для собственных функций задачи (20)-(22) верна асимптотическая формула

$$u_k(x)=\sqrt{2}\cos\pi kx+\mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Линеаризующий оператор L для задачи (20)-(22) определяется следующим образом:

$$D(\mathrm{L})=\left\{\hat{y}=(y;\alpha_1,\alpha_2)\in W_p^2(0,1)\oplus C^2:\alpha_1=U_{12}(y),\alpha_2=U_{21}(y)\right\},$$
$$\forall\hat{y}\in D(\mathrm{L}):\mathrm{L}\hat{y}=(l(y),U_{11}(y),U_{21}(y)).$$

L является замкнутым плотно определенным оператором. Его СПФ являются

$$\hat{u}_k=(u_k(x);U_{12}(u_k),U_{22}(u_k)),$$

где $u_k(x)-$ собственная или присоединенная функция задачи (20)-(22). Обозначим

$$e_k(x)=\sqrt{2}\cos\pi kx,\quad k=0,1,2,\ldots$$

и рассмотрим систему

$$\{\hat{e}_{-2},\hat{e}_{-1}\}\cup\{\hat{e}_k\}_{k=0}^{\infty},$$

где

$$\hat{e}_{-2}=(0;0,1),\ \hat{e}_{-1}=(0;1,0),\ \hat{e}_k=(e_k;0,0),\ k=0,1,2,\ldots,$$

Положим

$$\Delta_{ml}=V_{12}(\vartheta_m)V_{22}(\vartheta_l)-V_{12}(\vartheta_l)V_{22}(\vartheta_m),$$

где $\vartheta_k(x)$ - СПФ сопряженной задачи, а $V_{ij}(\cdot)-$ соответствующие формы из сопряженных граничных условий.

Теорема 20. *Система $\{\hat{u}_k\}$ собственных и присоединенных векторов оператора L образуют базис в пространстве $L_p(0,1)\oplus C^2$ изоморфной к системе $\{\hat{e}_k\}$, а при $p=2$ этот базис является базисом Рисса.*

Теорема 21. *Для того, чтобы система* $\{u_k(x)\}_{k\in N_{-2};k\neq m,k\neq l}$ *была базисом в пространстве* $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, *изоморфной к системе* $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\Delta_{ml}\neq 0$. *Если же* $\Delta_{ml}=0$, *то система* $\{u_k(x)\}_{k\in N_{-2};k\neq m,k\neq l}$ *не полна и не минимальна в* $L_p(0,1)$.

В 5.3 рассматривается разрывный дифференциальный оператор второго порядка со спектральным параметром в условиях разрыва:

$$l(y)=-y''+q(x)y=\lambda y\,,\ x\in(-1,0)\cup(0,1). \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=y(1)=0 \\ y(-0)=y(+0) \\ y'(-0)-y'(+0)=\lambda m y(0) \end{array}\right\}. \tag{24}$$

здесь $q(x)-$комплекснозначная суммируемая функция, $m\neq 0-$ комплексное число, а $\lambda-$спектральный параметр.

Линеаризующий оператор L в пространстве $L_p(-1,1)\oplus C$ строится следующим образом:

$$D(\mathrm{L})=\{\hat{u}\in L_p(-1,1)\oplus C:\hat{u}=(u;mu(0)),$$
$$u\in W_p^2(-1,0)\oplus W_p^2(0,1),\ u(-1)=u(1)=0,\ u(-0)=u(+0)\}$$

и для $\hat{u}\in D(\mathrm{L})$

$$\mathrm{L}\ \hat{u}=\left(-u''+q(x)u;u'(-0)-u'(+0)\right).$$

Обозначим

$$q_1=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}q(t)dt\,,\ \ q_2=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}q(t)dt\,,$$

и положим $d=4+(mq_2)^2+(mq_1)^2+8mq_2-2m^2q_1q_2$.

Теорема 22. *Если* $d\neq 0$, *то спектр задачи (23), (24) состоит из двух серий асимптотически простых собственных значений* $\lambda_{1,n}=(\rho_{1n})^2$ *и* $\lambda_{2,n}=(\rho_{2,n})^2$, *где* $\rho_{1,n}$ *и* $\rho_{2,n}$ *имеют асимптотику*

$$\rho_{i,n}=\pi n+\frac{\alpha_i}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), i=1,2,$$

соответственно, где α_1 *и* α_2 $-$ *разные комплексные числа.*

Теорема 23. *В условиях теоремы 21 собственные функции* $y_{1,n}(x)$ *и* $y_{2,n}(x)$ *спектральной задачи (23), (24), соответствующие собственным значениям* $\lambda_{1,n}$ *и* $\lambda_{2,n}$ *имеют следующую асимптотику*

$$y_{i,n}(x)=\begin{cases}\sin \pi n x+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right), \ x\in[-1,0], \\ \gamma_{i,n}\sin \pi n x+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right), \ x\in[0,1],\end{cases} \quad i=1,2,$$

где $\gamma_{1,n}\neq\gamma_{2,n}$.

Применяя теорему 6 получаем, что справедлива

Теорема 24. *В условиях теоремы 21 собственные и присоединенные векторы оператора* L*, линеаризующего задачи (23), (24) образуют базис пространства* $L_p(-1,1)\oplus C$*, а при* $p=2$ *этот базис является базисом Рисса.*

Как отмечено в теореме 22 $\alpha_1\neq\alpha_2$, поэтому один из этих чисел не равен нулю. С учетом этого и применяя результаты §1.2 получаем, что верна следующая

Теорема 25. *Если* $\alpha_1\neq 0$*, то при больших значениях* n_0 *исключив функцию* $y_{1,n_0}(x)$*, а если* $\alpha_2\neq 0$*, то при больших значениях* n_0 *исключив функцию* $y_{2,n_0}(x)$ *из системы СПФ задачи (23), (24), получим базис в* $L_p(-1,1)$*, а при* $p=2$ *базис Рисса в* $L_2(-1,1)$.

Отдельно рассматривается случай $q(x)\equiv 0$:

$$y''(x)+\lambda y(x)=0. \tag{25}$$

Относительно спектральной задачи (25), (24) справедлива

Теорема 26. *Если из системы* $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *собственных функций задачи (24), (25) исключить любую функцию* $u_{n_0}(x)$ *с четным номером* n_0*, то полученная система будет базисом в* $L_p(-1,1)$*,* $1<p<\infty$*, и базисом Рисса в пространстве* $L_2(-1,1)$*. Если же из этой системы исключить какую-нибудь функцию* $u_{n_0}(x)$ *с нечетным* *номером n_0, то полученная система не будет не полной и не минимальной в пространстве $L_p(-1,1)$.*

5.4 посвящен изучению свойств собственных значений и собственных функций одной спектральной задачи. Рассматривается следующая краевая задача

$$-y'' + q(x)y(\alpha x) = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \tag{26}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{27}$$

в предположении, что $q(x) \in C^1[0,\pi]$ - комплекснозначная функция и $0 < \alpha < 1$. Найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных фунций задачи (26), (27). Основным результатом этого параграфа является

Теорема 27. *Для собственных значений спектральной задачи (26), (27) справедлива следующая формула регуляризованного следа*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n - n^2\right) = \frac{q(0)}{1-\alpha^2}.$$

Относительно базисных свойств собственных функций доказана следующая

Теорема 28. *СПФ задачи (26),(27) образуют базис в $L_p(0,\pi)$, $1 < p < \infty$, эквивалентный тригонометрической системе $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$. В частности, при $p = 2$ этот базис является базисом Рисса.*

Отметим, что регуляризованные суммы собственных значений дискретных операторов, в том числе, дифференциальных операторов изучали И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, Л.А.Дикий В.Б.Лидский, В.А. Садовничий, М.Байрамоглы, В.А.Любишкин, В.Е.Подольский и др.

В 5.5 изучаются базисность некоторых систем синусов, косинусов и экспонент в пространствах типа Морри. Одним из мето-дов изучения базисных свойств таких систем является метод краевых задач теории аналитических функций. В работе [41] рассматривается краевая задача Римана в пространствах Харди типа Морри. Полученные результаты применяются в этом параграфе к изучению базисных свойств двойной системы экспонент с комплексными коэффициентами в пространствах типа Морри.

Приведем некоторые сведения из теории пространств типа Морри. Пусть Γ некоторая спрямляемая кривая Жордана на комплексной плоскости C. Через $|M|_\Gamma$ обозначаем линейную меру Лебега множества $M \subset \Gamma$. Относительно нормы

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} = \sup_B \left(|B \cap \Gamma|_\Gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\Gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p} < +\infty$$

$L^{p,\alpha}(\Gamma)$ является банаховым и $L^{p,1}(\Gamma) = L_p(\Gamma)$, $L^{p,0}(\Gamma) = L_\infty(\Gamma)$.

Обозначим через $\widetilde{L}^{p,\alpha}$ линейное подпространство $L^{p,\alpha}$ функций, сдвиги которых непрерывны в $L^{p,\alpha}$, т.е. $\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} \to 0$, при $\delta \to 0$. Берем замыкание $\widetilde{L}^{p,\alpha}$ в $L^{p,\alpha}$ и обозначим его через $M^{p,\alpha}$. Справедлива следующая

Теорема 29. *Система экспонент $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ образует базис в $M^{p,\alpha}$ при $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha \le 1$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что справедливо

Следствие . *Каждая из тригонометрических систем $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $M^{p,\alpha}(0,\pi)$ при $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha \le 1$.*

Рассмотрим следующую двойную систему экспонент

$$\{A(t)e^{int}; B(t)e^{-int}\}_{n\in Z_+, k\in N}, \tag{28}$$

с комплекснозначными коэффициентами

$$A(t) = |A(t)|e^{i\alpha(t)};\ B(t) = |B(t)|e^{i\beta(t)},$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$. Будем требовать выполнение следующих условий

α) $A^{\pm}; B^{\pm} \in L_\infty \equiv L_\infty(-\pi,\pi)$;

β) $\theta(t) \equiv \beta(t) - \alpha(t)$ *- кусочно-непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция с точками разрывов $\{s_k\}_1^r : -\pi < s_1 < \ldots < s_r < \pi$, и $h_k = \theta(s_k+0) - \theta(s_k-0)$, $k = \overline{1,r}$ - скачки этой функции в точках s_k, и пусть $h_0 = \theta(-\pi) - \theta(\pi)$.*

Положим

$$G(e^{it}) = \frac{A(t)}{B(t)},\ t \in [-\pi,\pi].$$

Возьмем $\forall f \in M^{p,\alpha}$ и рассмотрим следующую краевую задачу Римана в классе $MH_{+}^{p,\alpha} \times_{-1} MH_{-}^{p,\alpha}$:

$$F^{+}(\tau) - G(\tau)F^{-}(\tau) = A^{-1}(\arg\tau) f(\arg\tau),\ \tau \in \gamma. \tag{29}$$

Предположим, что имеет место следующие неравенства

$$-\frac{1-\alpha}{q} \le \frac{h_k}{2\pi} < \frac{1-\alpha}{p},\ k = \overline{0,r}. \tag{30}$$

Как следует из [41], задача (29) однозначно разрешима в классе $MH_{+}^{p,\alpha} \times_{-1} MH_{-}^{p,\alpha}$, если выполнены неравенства (30). Справедлива

Теорема 30. *Пусть функции* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* $\alpha)$ *и* $\beta)$. *Если выполнены неравенства (30) то система (28) образует базис в* $M^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha \le 1$.

Затем рассматривается вопрос о базисности собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ задачи (24), (25) в пространствах $M^{p,\alpha}(-1,1) \oplus C$ и $M^{p,\alpha}(-1,1)$. Пусть системы $\{\hat{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\hat{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ те же самые, что и в §5.4.

Теорема 31. *Система* $\{\hat{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис пространства* $M^{p,\alpha}(-1,1) \oplus C$, *1<p<∞,0<α≤1, эквивалентный к системе* $\{\hat{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Относительно базисности системы $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $M^{p,\alpha}(-1,1)$ справедлива

Теорема 32. *Если n₀ -произвольное четное число, то система* $\{u_n(x)\}_{n=0;n\ne n_0}^{\infty}$ *образует базис пространства* $M^{p,\alpha}(-1,1)$, *1<p<∞ , 0<α≤1, эквивалентный к системе* $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. *Если же* n_0 *– произвольное нечетное число, то система* $\{u_n(x)\}_{n=0;n\ne n_0}^{\infty}$ *не является базисом в пространстве* $M^{p,\alpha}(-1,1)$, *более того она не полна и не минимальна в этом пространстве.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту, члену-корреспонденту НАНА, профессору Б.Т.Билалову за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1.Касумов Т.Б. Краевые задачи для одного класса квазидифференциальных уравнений // Экстремальные задачи, функциональный анализ и их приложения. МГУ, М.,1988, с. 72-74.

2. Касумов Т.Б. Дробные степени квазидифференциальных операторов и теоремы о базисности // Дифференц. уравнения. 1989, т.25, №4, с.729 -731.

3. Gasymov T.B. On a class of discontinuous boundary value problems // Proc. of IMM of Azerb. AS, v.XXII (XX), 2000, p. 35-44.

4. Gasymov T.B. On basicness of eigenfunctions discontinuous second order differential operator // Trans. NAS of Azerb. 2002, v. XXII, №1, p. 75-84.

5.Касумов Т.Б. О дробных степенях дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / Матер. Науч. Конф. ”Дифференц. уравнения и их прилож.”. Баку, 2002, с. 48-50.

6. Касумов Т.Б. О комплексных степенях дифференциального оператора второго порядка / Тезисы научной конф., посвящ. 70- летию проф. Г.К.Намазова. Баку, 2002, с.74-76.

7. Касумов Т.Б. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром при краевом условии / Тезисы X межд. конф. по мат. и мех.повящ. 45-летию ИММ. Баку, 2004, с.86.

8.Касумов Т.Б. О базисности собственных функций одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях / Тезисы научной конф., посвящ. 70-летию чл.корр. НАНА проф. А.А.Бабаева. Баку, 2004, с.93- 94.

9.КасумовТ.Б., Мамедова Ш.Д. О базисности собственных функций разрывного дифференциального оператора со спектральным параметром в краевых условиях / Тезисы межд. конф. по мат. и мех.посвящ. 50-летию чл.корр.НАНА проф. И.Т.Мамедова. Баку, 2005, с.109.

10.Касумов Т.Б., Юсифов М.Р. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов с обобщенными коэффициентами /

Тезисы XII межд. конф. по мат. и мех.посвящ. 70-летию чл.корр.НАНА проф. Б.А. Искендерова. Баку, 2006, с.91.

11. Gasymov T.B., Mammadova Sh.J. On convergence of spectral expansions for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. Of NAS of Azerb. 2006, v. XXVI, №4, p. 103-116.

12. Gasymov T.B. On necessary and sufficient conditions of basicity of some defective systems in Banach spaces // Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci., math. mech., 2006, v. 26, №1, p. 65-70.

13. Касумов Т.Б., Мирзоев В.С .Об одном обобщении примера Ионкина / Тезисы научной конф.посвящ. 100-летию акад.А.И. Гусейнова. Баку, 2007, с.87.

14. Gasymov T.B., Garayev T.Z. On defective bases from the root elements of differential operators containing a spectral parameter in the boundary conditions // Trans. NAS Azerb., ser. phys.-tech. math. sci., math. mech., 2007, v.27, №1, p. 51-54.

15. Gasymov T.B., Huseynli A.A. The basis properties of some defective systems in Banach spaces / Abst. of Intern. Conf. on math. and mech. Devoted to the 70-th anniversary of acad. of NAS A.D.Gadjiev. Baku, 2007, p.63.

16. Касумов Т.Б., Гараев Т.З. Критерии базисности дефектных систем в банаховых пространствах / Тезисы Межд. Конф. по мат. и мех. посвящ. 70-летию акад. А.Д.Гаджиева. Баку, 2007, с. 87.

17. Gasymov T.B., Garayev T.Z. On necessary and sufficient conditions for obtaining the bases of banach spaces // Proc. of IMM of NAS of Azerb. 2007, v. XXVI (XXXIV), p. 93-98.

18. Bilalov B.T., Gasymov T.B. On basicity of a part of a systems with infinite defect // Trans. Of NAS of Azerb. 2007,v. XXVII, №7, p. 53-58.

19. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. Об устойчивости базисов из подпространств банахова пространства / Тезисы межд. симп. совр. пробл. мат.,мех и информ. Нахичевань, 2007, стр.52.

20. Касумов Т.Б., Гараев Т.З. Об инвариантности базисных свойств систем в банаховых пространствах / Тезисы межд. симп. совр. пробл. мат.,мех и информ. Нахичевань, 2007, стр.52.

21. Гасымов М.Г., Касумов Т.Б. Свойства собственных значений и собственных функций одной краевой задачи // Докл. НАН Азерб. 2008, т.6, №1, с.3-8.

22.Касумов Т.Б. О базисности корневых векторов дифференциального оператора второго порядка с интегральными условиями /

Тезисы Межд.Конф.по мат. и мех.,посвящен. 50-летию ИММ НАНА, 2009, стр.173-174.

23. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. Базисность собственных функций разрывного дифференциального оператора со спектральным параметром в краевом условии / Тезисы Межд.Конф.,посвящен. 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова 2010,стр.185-186.

24. Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В. Свойства собственных значений и собственных функций разрывного дифференциального оператора со спектральным параметром в краевом условии / Тезисы Межд.Конф.,посвящен. 80-летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова 2010,стр.186-187.

25. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. О базисности собственных функций разрывного дифференциального оператора второго порядка / «Функциональный анализ и его приложения». Материалы Межд. Конф., посвящен. 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова. 2011, с.200-201.

26. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. О базисности собственных функций разрывного дифференциального оператора второго порядка / «Спектральная Теория операторов и ее Приложения» Матер. Межд. Конф. посвящ. памяти проф. А.Г. Костюченко. Уфа, 2011, с.39-40.

27. Gasymov T.B., Huseynli A.A. The basis properties of eigenfunctions of a discontinuous differential operator with a spectral parameter in boundary condition // Proceed. of IMM of NAS of Azerb. 2011, v. XXXV, p. 21-32.

28. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. О полноте собственных и присоединенных функций одного разрывного дифференциального оператора второго порядка // Доклады НАНА, LXIII, 2012, №1, с.3-7.

29. Gasymov T.B., Maharramova G.V. Basicity of eigenfunctions in spaces $L_p(0,1)\oplus C$ for one discontinuous problem with spectral parameter in the boundary conditions / On Actual Problems of Mathematics and Informatics, Abstracts of International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev, May 29-31, 2013, Baku, Azerbaijan, p. 42.

30. Bilalov B.T., Gasymov T.B. On Kostyuchenko Problem // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume 40, Special Issue, 2014, p. 1-22.

31.Касумов Т.Б., Исмаилов Н.А. Об одном методе образование базиса в банаховых пространствах / Межд. Конф.”Области применения математики и ИКТ, новые технологии обучения ” , Гянджа, 2014. С. 174-175.

32. Касумов Т.Б., Гусейнли А.А. Юсифов М.Р. О базисности одной разрывной системы синусов в пространстве L_p / On Actual Problem of Mathematics and Mechanics, International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, May 15-16, 2014, Baku, Azerbaijan, pp. 204-205.

33. Bilalov B.T., Gasymov T.B. On a method of constructing a basis for a Banach space / VI Annual Conference of the Georgian Mathematical Union, July 12-16, 2015, Batumi, Georgia, p. 71-72.

34. Bilalov B.T., Gasymov T.B. On bases in Banach spaces // The Reports of National Academy of Sciences of Azerbaijan, v. LXXI, №2, 2015, p.6-9.

35. Gasymov T.B., Hashimov Ch.M. On an atomic decomposition in Banach spaces / 7-th International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications", MADEA -7, September 08-13, 2015, pp. 83-84, Baku, Azerbaijan.

36. Bilalov B.T., Gasymov T.B., Guliyeva F.A. Some Questions of Atomic Decompositions and Frames // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. V. 3, No 2, 2015, December, p. 17-50.

37. Bilalov B.T., Gasymov T.B., G.V. Maharramova. On a method for obtaining a complete and minimal system in the direct sum of Banach spaces / International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators”, May 25-27, 2016, Baku, Azerbaijan, p.29.

38. Gasymov T.B., G.B. Maharramova. On completeness of eigenfunctions of the spectral problem // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics V. 3, No 2, 2015, December, p. 66-76.

39. Bilalov B.T., Gasymov T.B., Maharramova G.V. On one method of investigation of the basis properties of the discontinuous differential operators // Journal of Contemp. Appl. Math., 2016, v. 6, No 1, p. 74-81.

40. Билалов Б.Т., Касумов Т.Б. О базисах прямого разложения // Докл. РАН, 2016, том 467, № 4, с. 381–384.

41. Bilalov B.T., Gasymov T.B., Guliyeva A.A. On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes // Turk. J. of Math. , 2016, v.40, No 5, p.1085-1101.

42. Gasymov T.B., Hashimov Ch.M. On frame properties of the system in direct sum of the Banach spaces // Caspian Journal of

Applied Mathematics, Ecology and Economics. V. 4, No 1, 2016, July, p. 69-78.

43.Bilalov B.T., Gasymov T.B., Maharramova G.V. On basicity of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem in Morrey type spaces // The Aligarh Bulletin of Mathematics, 2016, v. 35, No 1-2, p.119-129.

44. Билалов Б.Т., Касумов Т.Б., Магеррамова Г.В. О базисах в прямой сумме банаховых пространств / Матер. Респуб. Науч. Конф. посвящ. 100-летию проф. А.Ш.Габибзаде. Баку, 2016, с. 112-115.

45. Bilalov B.T., Gasymov T.B. On basicity a system of eigen-functions of second order discontinuous differential operator // Ufa Mathematical Journal. 2017, v. 9, No 1, p.109-122.

46. Gasymov T.B., Hashimov Ch.M. On an atomic decomposition in Banach spaces // Sahand Communications in Mathematical Analysis. 2018, v. 9, No 1, p. 15-32.

TELMAN BENSER oğlu QASIMOV

KƏSİLƏN DİFERENSİAL OPERATORLARIN SPEKTRAL XASSƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi çoxnöqtəli və inteqral sərhəd şərtləri ilə verilən kəsilən diferensial operatorların bəzi spektral xassələrinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır;

- Banax fəzasında defektli sistemlərin tamlığı, minimallığı və bazisliyi üçün zəruri və kafi şərtlər alınmışdır;
- Banax fəzalarının düz cəmində alt fəzaların müvafiq sistemlərindən düzəldilmiş sistemlərin tamlığı, minimallığı, bazisliyi və freymliliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur;
- kəsilən diferensial operatorların doğurduğu minimal operatorların həllolunan genişlənmələrinin və maksimal operatorun düzgün daralmalarının, o cümlədən bütün düzgün operatorların təsviri verilmiş, düzgün operatorların Qrin funksiyası qurulmuşdur;
- kəsilən diferensial operatorlar üçün requlyar çoxnöqtəli və inteqral sərhəd şərtli məsələlərin məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin L_p-də bazisliyi və L_2-də Riss bazisliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur;
- ümumi inteqral sərhəd şərtli kəsilən diferensial operatorların pozitivliyi isbat olunmuş, belə operatorların kompleks qüvvətləri üçün qiymətləndirmə alınmış, operatorların kəsr qüvvətlərinin təyin oblastlarının təsviri verilmiş, çoxnöqtəli sərhəd şərtləri halında isə operatorun rasional kəsr qüvvətlərinin təyin oblastları konstruktiv təsvir olunmuşdur;
- sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan bəzi model diferensial operatorların məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin bazisliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur;
- kəsilmə şərtinə spektral parametr daxil olan bəzi kəsilən diferensial operatorların məxsusi və qoşma funksiyalarının bazislik xassələrini tədqiq etmək üçün yeni yanaşma təklif olunmuş, məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin L_p Lebeq fəzalarında və $M^{p,a}$ Morri tip fəzalarda bazisliyi isbat olunmuşdur.

TELMAN BENSER oglu GASYMOV

İNVESTİGATİON OF THE SPECTRAL PROPERTIES OF DISCONTINUOUS DIFFERENTIAL OPERATORS

SUMMARY

The dissertation is devoted to the investigation of some spectral properties of the discontinuous differential operators with multi-point and integral boundary conditions. The following main results are obtained in the work:

- the necessary and sufficient conditions for the completeness, minimality and the basicity of defective systems in Banach space are obtained;
- theorems on the completeness, minimality, basicity and frameness of the systems based on the corresponding systems from the subspaces are proved in the direct sum of Banach spaces;
- resolvable extensions of the minimal operator and proper contractions of the maximal operator generated by the discontinuous differential operator are described. In a special case, descriptions for all proper operators are given, and the Green's function for proper operators;
- regular classes of multi-point and integral boundary conditions for discontinuous differential operators are chosen and the theorems on the bacisity of system of eigen and associated functions in L_p and on Riesz basicity in L_2 are proved;
- positivity of discontinuous differential operators with a common integral boundary condition is proved, an estimation for the complex powers of these operators is obtained, a description of domain of fractional powers of operators is given, and in the case of multi-point boundary conditions the domains of rational fractional powers of operators are constructively described ;
- theorems on the basicity of system of eigen and associated functions of some model differential operators with spectral parameter in the boundary conditions are proved;
- a new approach for the study of basis properties of eigen and associated functions of some discontinuous differential operators with a spectral parameter in discontinuous boundary condition is suggested and the basicity of system of eigen and associated functions in Lebesgue spaces L_p and in Morrey type spaces $M^{p,a}$ is proved.