НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ФУАД НАДЖАФ оглы АЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНОЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии по математике

Баку − 2018

Работа выполнена на кафедре «**Математический анализ**» **Бакинского Государственного Университета**.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, проф. **Рагим Рзаев**

Официальные оппоненты:
- доктор физико-математических наук, проф. **Фарман Мамедов** (SOCAR "Научно-Исследовательский Проектный Институт Нефти и Газа");
- профессор НАН Азербайджана, д.м.н. **Ровшан Бандалиев** (Института Математики и Механики НАНА).

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 29 июня 2018 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 18 мая 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций и функционального анализа, математической физики и механики требуют применения теории интегральных операторов типа потенциала. Разнообразные применения требуют всестороннего изучения локальных и глобальных структурных свойств выше упомянутых интегральных операторов.

Современный уровень развития теории интегральных операторов типа потенциала требует применения различных методов и понятий функционального анализа. Многие значительные достижения гармонического анализа тесно связаны с развитием теории интегральных операторов типа потенциала, в том числе и потенциала Рисса. Теория интегралов типа потенциала имеет богатую историю и этой теории посвящено огромное количество публикаций. Роль теории интегралов типа потенциала в исследовании проблем теории дифференциальных уравнений, теории функций, математической физики и других весьма значительна и описана во многих научных трудах.

Различные свойства интегралов типа потенциала, в том числе потенциала Рисса были исследованы в работах М.Рисса, Г.Х.Харди, Дж.Е.Литтлвуда, С.Л.Соболева, И.Стейна, Г.Вейса, О.В.Бесова, П.И.Лизоркина, С.Г.Самко, А.Д.Гаджиева, С.К.Абдуллаева, Е.Накаи, В.С.Гулиева, Р.К.Сейфуллаева, Р.М.Рзаева и других.

Классические вопросы, касающиеся теории интегральных операторов типа потенциала изложены в книгах И.Стейна, С.Г.Самко, Б.Рубина.

Отметим, что пространство функций с ограниченной средней осцилляцией было введено в работах Джона и Ниренберга в связи с вопросами регулярности решений эллиптических дифференциальных уравнений. Пространства функций, определяемые с помощью условий на среднюю осцилляцию функций имеют многочисленные применения в различных вопросах математического анализа. Эти пространства представляют интерес также с точки зрения внутренних задач теории функций. Функциональные пространства, определяемые условиями на среднюю осцилляцию функций были изучены в работах многих авторов, из которых отметим S.Campanato, N.G.Meyers, S.Spanne, J.Peetre, Ch.Fefferman, E.M.Stein, R.Devore, R.Sharpley, Д.Гарнетта, П.Кусиса, А.А.Кореновского, Р.М.Рзаева и других.

Цель работы. Исследование локальных и глобальных структурных свойств интегралов типа потенциала в пространствах, определяемых условиями на локальную и среднюю осцилляции локально суммируемых функций.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, методы теории функций и методы функционального анализа, теорий потенциала и интегральных операторов.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и приведены с полными доказательствами.

- Исследованы свойства потенциала Рисса функции f в терминах локальных осцилляций функций, когда f принадлежит пространствам $\widetilde{L}^p\left(R^n\right)$, $L^p\left(R^n\right)$ или обобщенным пространствам типа Морри.
- Исследованы свойства потенциала Рисса в терминах локальной осцилляции функций, когда f принадлежит пространству, определяемому условиями на локальную осцилляцию.
- Исследованы свойства Φ-максимальной функции, измеряющей гладкость и найдены их связи с метрическими характеристиками
- Получены неравенства между максимальными функциями.
- Изучены свойства максимальной функции Кальдерона.
- Изучены некоторые максимальные функции, измеряющие гладкость, и исследованы их связи с максимальной функцией Кальдерона.
- Изучены свойства потенциала Рисса в терминах максимальной функции Кальдерона.

Теоретическая и практическая ценность. Задачи, исследованные в диссертации, носят, в основном, теоретический характер. Полученные результаты, а также использованные в ней методы могут применены в различных вопросах теории интегральных операторов, в математической физике, в механики и д.р.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинарах отделов «Математический анализ» (проф. С.С.Мирзоев) и «Теория функций и функциональный анализ» (проф. А.М.Ахмедов) в Бакинском Государственном Университете, в Азербайджанском Государственном Педагогическом Университете на семинаре кафедры «Теория функций» (проф. Р.М.Рзаев), в I Международная научная конференция молодых ученых посвященный 90-й годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева «Актуальные проблемы математики и информатики» (Баку, 2013 год), в II Международная научная конференция молодых ученых посвященный 91-ый годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева (Баку, 2014), в IV Международная научная конференция молодых ученых посвященный 91-ый годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева (Баку, 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 88 наименований. Объем работы 111 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы исследований, и кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава I посвящена изучению свойства потенциала Рисса в терминах локальных и средних осцилляций, когда плотность потенциала принадлежит слабому пространству $\widetilde{L}^p\left(R^n\right)$, пространству $L^p\left(R^n\right)$ или обобщенному пространству типа Морри. В этой главе исследованы также свойства потенциала Рисса в терминах локальной осцилляции функций, когда плотность принадлежит пространству, определяемому условиями на локальную осцилляцию.

В **1.1** даны основные определения, обозначения и предварительные сведения, которые необходимы для дальнейшей работы, в том числе и в первой главе.

Пусть R^n является n мерным евклидовым пространством точек $x=\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $B(a,r):=\left\{x \in R^n : |x-a| \le r\right\}$ − замкнутый шар в R^n радиуса $r>0$ с центром в точке $a \in R^n$. Обозначим через $L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $(1 \le p < \infty)$, класс всех функций определенных в R^n, p-я степень которых локально суммируема, а через $L_{loc}^{\infty}(R^n)$ класс всех локально ограниченных функций, определенных в R^n. Через $L^p(R^n)$ мы обозначаем обычное пространство Лебега в R^n, и через $\|\bullet\|_{L^p}$ соответствующую норму, то есть

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(R^n)} := \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ если } 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(R^n)} := ess\sup\{|f(x)| : \; x \in R^n\}.$$

Обозначим через P_k совокупность всех многочленов в R^n степень которых равна или меньше k.

Пусть $f \in L_{loc}^p(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $k \in N$ (N есть множество всех натуральных чисел). Определим следующие функции

$$\mu_f^k(x;r)_p := \inf_{\pi \in \mathbf{P}_{k-1}} \|f - \pi\|_{L^p(B(x,r))}, \quad r > 0, \; x \in R^n,$$

$$\mu_f^k(r)_{pq} := \begin{cases} \left\| \mu_f^k(\bullet;r)_p \right\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} & \text{если } 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \mu_f^k(x;r)_p & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, $\nu_j \; (i = 1,2,..., n)$ неотрицательные целые числа, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n$, $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$. Применим процесс ортогонализации со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} f(t) g(t) dt$$

к системе степенных функций $\{x^\nu\}$, $|\nu| \le k$, $(k \in N \cup \{0\})$ расположенных в частично лексикографическом порядке[1], где $|E|$

[1] Это означает, что x^ν предшествует x^μ если какая-либо $|\nu| < |\mu|$, или $|\nu| = |\mu|$ но первый не нулевой разность $\nu_i - \mu_i$ отрицательна.

мера Лебега множества $E \subset R^n$. Обозначим полученную ортогонально нормированную систему через $\{\varphi_\nu\}$, $|\nu| \le k$.

Пусть $f \in L^1_{loc}(R^n)$. Положим

$$P_{k,B(a,r)} f(x) = \sum_{|\nu| \le k} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} f(t) \varphi_\nu \left(\frac{t-a}{r} \right) dt \right) \varphi_\nu \left(\frac{x-a}{r} \right).$$

Очевидно, что $P_{k,B(a,r)} f$ является многочленом, степень которого равна или меньше k.

Обозначим

$$O_k(f, B(a,r))_p := \left\| f - P_{k-1,B(a,r)} f \right\|_{L^p(B(a,r))}$$

для $f \in L^p_{loc}(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$. Назовем $O_k(f, B(a,r))$ локальной осцилляцией $k-$го порядка функции f в шаре $B(a,r)$ в метрике L^p.

Известно, что для каждого полинома $\pi \in P_{k-1}$ и для любого шара $B(x,r) \subset R^n$ верно неравенство

$$\left\| f - P_{k-1,B(x,r)} f \right\|_{L^p(B(x,r))} \le C \left\| f - \pi \right\|_{L^p(B(x,r))},$$

где положительная константа C не зависит от x, f, B и r. Отсюда следует, что $\exists C > 0,\ \forall x \in R^n,\ \forall r > 0:$

$$\mu_f^k(x;r)_p \le O_k(f, B(x,r))_p \le C \cdot \mu_f^k(x;r)_p.$$

Пусть $1 \le p, q \le \infty$, $f \in L^p_{loc}(R^n)$. Введем следующие обозначения

$$A_f(x;r)_p := \| f \|_{L^p(B(x,r))}, \quad (x \in R^n, \ \ r > 0),$$

$$A_f(r)_{pq} := \left\| A_f(\bullet, r)_p \right\|_{L^q(R^n)}, \quad (r > 0).$$

Пусть Ψ класс всех положительных монотонно возрастающих на $(0,+\infty)$ функций, $\varphi \in \Psi$, $1 \le p, q \le \infty$. Через M_{pq}^{φ} обозначим множество всех функций $f \in L^p_{loc}(R^n)$, для которых

$$A_f(r)_{pq} = O(\varphi(r)),\ r > 0.$$

Норму в пространстве M_{pq}^{φ} мы введем равенством

$$\|f\|_{M^{\varphi}_{pq}} := \sup\left\{ \frac{A_f(r)_{pq}}{\varphi(r)} : \quad r > 0 \right\}.$$

Если $q = \infty$, а также $\varphi(r) = r^{\lambda/p}$, $r > 0$, $0 \le \lambda \le n$, тогда $M^{\varphi}_{pq} \equiv L_{p,\lambda}$, где $L_{p,\lambda}$ является пространством Морри, т.е.

$$L_{p,\lambda} := \left\{ f \in L^p_{loc} : \ \|f\|_{L^p(B(x,r))} = O\left(r^{\lambda/p}\right), \ r > 0, \ x \in R^n \right\}.$$

Пусть α является положительным числом. Обозначим через Ψ_α набор всех $\varphi \in \Psi$ таких, что функция $\varphi(t) \cdot t^{-\alpha}$ почти убывает[1] на $(0, +\infty)$.

Если $k \in N$, $1 \le p, q \le \infty$, $\varphi \in \Psi_{k+\frac{n}{p}}$, то через $L^{k,\varphi}_{p,q}$ обозначим множество всех функций $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$ таких, что $\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q}} < +\infty$, где

$$\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q}} := \sup\left\{ \frac{\mu^k_f(t)_{pq}}{\varphi(t)} : t > 0 \right\}.$$

Если мы рассмотрим класс $L^{k,\varphi}_{p,q}$ как подмножество в фактор-пространстве $L^p_{loc}\left(R^n\right)/P_{k-1}$, тогда $\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q}}$ есть норма в $L^{k,\varphi}_{p,q}$. Можно показать, что $L^{k,\varphi}_{p,q}$ с этой нормой является полным нормированным пространством.

Если $\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, то мы будем обозначать через BMO^k_φ класс всех функций $f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$, для которых выполняется соотношение $\exists C > 0, \ \forall a \in R^n, \ \forall r > 0$:

$$\Omega_k\left(f, B(a,r)\right) := \frac{1}{|B(a,r)|} \int\limits_{B(a,r)} \left| f(t) - P_{k-1,Ba,r} f(t) \right| dt \le C\varphi(r).$$

---

[1] Неотрицательная функция $h(t)$, $t \in (0, +\infty)$, называется почти убывающей, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $h(t_1) \ge ch(t_2)$ выполняется для всех $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ с условием $t_1 < t_2$.

Определим норму в BMO_{φ}^{k} равенством

$$\|f\|_{BMO_{\varphi}^{k}} := \sup\left\{\frac{\Omega_k\left(f, B(a,r)\right)}{\varphi(r)} : r>0, a\in R^n\right\}.$$

В частности, если $k=1$, $\varphi(r)\equiv 1$, то $BMO_{\varphi}^{k}=BMO$, где BMO это пространство всех локально суммируемых функций ограниченной средней осцилляции.

Легко видеть, что если $p=1$, $q=\infty$, $\varphi(r)=r^n\psi(r)$, то $L_{p,q}^{k,\varphi}=BMO_{\psi}^{k}$ и их нормы эквивалентны.

Рассмотрим также класс VMO. VMO это класс всех $f\in BMO$, для которых соотношение

$$\lim_{r\to 0}\sup_{a\in\mathbf{R}^n}\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}\left|f(t)-f_{B(a,r)}\right|dt=0$$

справедливо. Для $f\in VMO$ мы определяем $\|f\|_{VMO}:=\|f\|_{BMO}$.

Пусть $1\le p<\infty$. Через $\widetilde{L}^p(R^n)$ мы обозначаем слабое пространство Лебега в R^n, т.е. совокупность всех измеримых функций, для которых $[f]_p<+\infty$, где

$$[f]_p^p=[f]_{L^p}^p:=\sup_{t>0}t^p\left|\{x:|f(x)|>t\}\right|.$$

В **1.2** доказаны некоторые неравенства для характеристик $A_f(x;r)_p$, $A_f(r)_{pq}$, а также доказаны утверждения, показывающие неулучшаемость полученных неравенств. На основании этих неравенств получены соответствующие теоремы вложения.

В **1.3** изучаются свойства потенциала Рисса (вернее, одной модификации этого потенциала) в терминах пространств $L_{p,q}^{k,\varphi}$, когда плотность потенциала принадлежит пространствам $\widetilde{L}^p(R^n)$, $L^p(R^n)$ и M_{pq}^{φ}.

Рассмотрим следующий интегральный оператор типа потенциала

$$R_{\alpha,k}f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\left\{K_\alpha(x-y)-\left(\sum_{|\nu|\le k-1}\frac{x^\nu}{\nu!}D^\nu K_\alpha(-y)\right)X_{\{|t|>1\}}(y)\right\}f(y)dy,$$

где $K_\alpha(x)=|x|^{\alpha-n}$, $0<\alpha<n,\quad \nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, $\nu_i\ \ (i=1,2,...,n)$ неотрицательные целые числа, $x^\nu=x_1^{\nu 1}\cdot x_2^{\nu 2}\cdot\cdot\cdot x_n^{\nu n}$, $\nu!=\nu_1!\cdot\nu_2!\cdot\cdot\cdot\nu_n!$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+...+\nu_n$, $k\in N$, $D^\nu g:=\dfrac{\partial^{|\nu|}g}{\partial x_1^{\nu 1}\partial x_2^{\nu 2}\cdot\cdot\cdot\partial x_n^{\nu n}}$, $X_{\{|t|>1\}}$ является характеристической функцией множества $\{t\in R^n:|t|>1\}$.

Теорема 1. *Пусть* $1\le q<p<\infty$, $k+\dfrac{n}{p}>\alpha$. *Если* $f\in\widetilde{L}^p(R^n)$, *то* $R_{\alpha,k}f\in L_{q,\infty}^{k,\varphi}$ *и* $\exists C>0$ $\forall f\in\widetilde{L}^p(R^n)$:

$\|R_{\alpha,k}f\|_{L_{q,\infty}^{k,\varphi}}\le C\cdot[f]_p$, *где* $\varphi(r)=r^{\alpha+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}$, $r>0$.

Теорема 2. *Пусть* $1\le p\le q\le\infty$, $0<\alpha<n$, $k\in N$, $k+n\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)>\alpha$, $f\in L^p(R^n)$. *Тогда* $R_{\alpha,k}f\in L_{p,q}^{k,\psi}$ *и*

$$\exists C>0,\ \ \forall f\in L^p(R^n):\ \|R_{\alpha,k}f\|_{L_{p,q}^{k,\psi}}\le C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)},$$

где $\psi(r)=r^{\frac{n}{q}+\alpha}$, $r>0$. *В случае* $1\le p<\infty$, $q=\infty$ *верно также* $\mu_{\frac{k}{f}}(\delta)_{p\infty}=o(\delta^\alpha)$, $\delta\to 0$, *где* $\overline{f}:=R_{\alpha,k}f$.

Теорема 3. *Пусть* $1\le p,\ q\le\infty$, $k\in N$, $0<\alpha<n$, $\varphi\in\Psi_{k+\frac{n}{p}-\alpha}$ *и* $\delta^{k+\frac{n}{p}-\alpha}\int\limits_\delta^\infty t^{-k-\frac{n}{p}+\alpha-1}\varphi(t)dt=O(\varphi(\delta))$, $\delta>0$. *Если* $f\in M_{pq}^{\varphi}$, *то* $R_{\alpha,k}f\in L_{p,q}^{k,\varphi_1}$, *а также верно соотношение*

$$\exists C>0\ \ \forall f\in M_{pq}^{\varphi}:\|R_{\alpha,k}f\|_{L_{p,q}^{k,\varphi_1}}\le C\|f\|_{M_{p,q}^{\varphi}},$$

где $\varphi_1(\delta)=\delta^\alpha\cdot\varphi(\delta)$, $\delta>0$.

В **1.4** вводятся и изучаются пространства $L_{p,q,\theta}^{k,\varphi}$.

Обозначим через Φ класс всех положительных функций $\varphi(t)$ монотонно возрастающих в $(0,+\infty)$ таких, что $\varphi(+0)=0$.

Пусть ν является положительным числом. Обозначим через Φ_ν набор всех $\varphi \in \Phi$ таких, что $\varphi(t)\cdot t^{-\nu}$ почти убывает в $(0,+\infty)$.

Пусть $k \in N$, $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $\varphi \in \Phi_{k+\frac{n}{p}}$. Обозначим через $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ класс всех функций $f \in L^p_{loc}(R^n)$ таких, что $\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} < +\infty$ где для $1 \le \theta < \infty$

$$\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mu^k_f(t)_{pq}}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

и для $\theta = \infty$,

$$\|f\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}} := \sup\left\{\frac{\mu^k_f(t)_{pq}}{\varphi(t)} : t > 0\right\}.$$

Если мы рассмотрим класс $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ как подмножество в фактор-пространстве $L^p_{loc}(R^n)/P_{k-1}$, тогда $\|\cdot\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}}$ есть норма в $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$. Можно показать, что $L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}$ с нормой $\|\cdot\|_{L^{k,\varphi}_{p,q,\theta}}$ является полным нормированным пространством.

Отметим, что $L^{k,\varphi}_{p,q,\infty} = L^{k,\varphi}_{p,q}$, где $L^{k,\varphi}_{p,q}$ −пространство, введенное в пункте 1.1.

В этом пункте введен также класс VMO^k_ψ. Для $f \in L^1_{loc}(R^n)$, $k \in N$, положим

$$M^k_f(\delta) = \sup_{\substack{0<r\le\delta \\ x\in R^n}} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(t) - P_{k-1,B(x,r)} f(t) \right| dt,\ \delta > 0.$$

Пусть $\psi \in \Psi_k$, $k \in N$. Через VMO^k_ψ обозначим класс всех функций $f \in BMO^k_\psi$, для которых $M^k_f(\delta) = o(\psi(\delta))$, $\delta \to 0$. В классе VMO^k_ψ введем норму равенством

$$\|f\|_{VMO_\psi^k} = \|f\|_{BMO_\psi^k} .$$

В случае $k=1,\ \psi(\delta)\equiv 1$ справедливо равенство $VMO_\psi^k = VMO$.

В **1.5** исследованы свойства потенциала Рисса в терминах локальной осцилляции функций, когда плотность потенциала принадлежит пространству, определяемому условиями на локальную осцилляцию. Основные результаты этого пункта содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 4. *Пусть* $1\le q, p, \theta\le\infty$, $l\in N$, $0<\alpha<n$, $k\ge[\alpha]+l$, $\varphi\in\Phi_{l+\frac{n}{p}}$, $\varphi_1(\delta)=\delta^\alpha\varphi(\delta)$ $(\delta>0)$ *и*

$$\delta^{k+\frac{n}{p}-\alpha}\int_\delta^\infty t^{-k-\frac{n}{p}+\alpha-1}\varphi(t)dt = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta>0) \tag{1}$$

Тогда если $f\in L_{p,q,\theta}^{l,\varphi}$, *то* $\bar{f}=R_{\alpha,k}f\in L_{p,q,\theta}^{k,\varphi_1}$, *и верно неравенство*

$$\|R_{\alpha,k}f\|_{L_{p,q,\theta}^{k,\varphi_1}} \le c\|f\|_{L_{p,q,\theta}^{l,\varphi}} ,$$

где постоянная $c>0$ *не зависит от* f.

Глава II посвящена изучению обобщенных максимальных функций.

Основной целью **2.1** является изучение некоторой обобщенной максимальной функции, измеряющей гладкость.

Пусть функция $\varphi(x,r)$ определена на множестве $R^n\times(0,+\infty)$, принимает только положительные значения и монотонно возрастает по аргументу r на интервале $(0,+\infty)$. Класс всех функций $\varphi(x,r)$ с указанными выше свойствами обозначим через $\overline{\Psi}$. Пусть $f\in L_{loc}(R^n)$, $f_{B(x,r)} := \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)dt$, и пусть $s_f(x)=\lim_{r\to+0} f_{B(x,r)}$, если этот предел существует и конечен, и $s_f(x)=f(x)$ в остальных точках. Известно, что если $f\in L_{loc}(R^n)$, то почти всюду в R^n имеет место равенство $s_f(x)=f(x)$.

Пусть $\Phi \in L^1(R^n)$, $\Phi(x) \geq 0$ $(x \in R^n)$, $\varphi \in \overline{\Psi}$, $f \in L_{loc}(R^n)$. Введем следующие $\Phi-$максимальные функции

$$f_\varphi^{\#,\Phi}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)} \int_{R^n} \Phi_r(x-t) \left| f(t) - f_{B(x,r)} \right| dt,$$

$$N_\varphi^\Phi f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)} \int_{R^n} \Phi_r(x-t) \left| f(t) - s_f(x) \right| dt.$$

Введем также следующие метрические $\Phi-$характеристики

$$m_f^\Phi(x;\delta) = \sup_{0<r\leq\delta} \int_{R^n} \Phi_r(x-t) \left| f(t) - f_{B(x,r)} \right| dt,$$

$$n_f^\Phi(x;\delta) = \sup_{0<r\leq\delta} \int_{R^n} \Phi_r(x-t) \left| f(t) - s_f(x) \right| dt, \ x \in R^n, \ \delta > 0.$$

Отметим, что максимальная функция $f_\varphi^{\#,\Phi}(x)$ и метрическая характеристика $m_f^\Phi(x;\delta)$ были исследованы ранее.

В этом пункте рассматривается известные частные случаи введенных максимальных функций и метрических характеристик.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L_{loc}(R^n)$, $\varphi \in \overline{\Psi}$, *функция* Φ *удовлетворяет условию* $essinf\{\Phi(x) : x \in B(0,1)\} = c_0 > 0$ *и выполняется условие* $\int_0^\delta \frac{\varphi(x,t)}{t} dt = O(\varphi(x,\delta))$ $(x \in R^n, \ \delta > 0)$. *Тогда существуют числа* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *такие, что*

$$c_1 \cdot f_\varphi^{\#,\Phi}(x) \leq N_\varphi^\Phi f(x) \leq c_2 \cdot f_\varphi^{\#,\Phi}(x), \quad x \in R^n, \qquad (2)$$

где постоянные c_1 *и* c_2 *не зависят от* f *и* x.

В последнем подпункте пункта 2.1 доказаны неравенства, связывающие обобщенные максимальные функции $f_\varphi^{\#,\Phi}(x)$ и $N_\varphi^\Phi f(x)$ соответственно, с максимальными функциями $f_\varphi^{\#}(x)$ и $N_\varphi f(x)$, где $f_\varphi^{\#}(x) := f_\varphi^{\#,\Phi_0}(x)$, $N_\varphi f(x) := N_\varphi^{\Phi_0} f(x)$, $\Phi_0(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} X_{B(0,1)}(x)$.

В **главе III** исследуются максимальные функции Кальдерона, измеряющие гладкость и свойства потенциала Рисса в терминах этой максимальной функции.

В **3.1** вводятся и изучаются максимальные функции $N_{k,p}^{(\varphi)} f(x)$, $N_{k,p}^{\varphi} f(x)$ и $N_{k,\varphi,p} f(x)$.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $\varphi \in \Psi$, $f \in L_{loc}^{P}(R^n)$, $k \in N$ и

$$N_{k,p}^{(\varphi)} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - P_x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$N_{k,\infty}^{(\varphi)} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \| f - P_x \|_{L^\infty(B(x,r))},$$

где через $|B(x,r)|$ обозначается объем шара $B(x,r)$ и предполагается существование полинома $P_x \in P_{k-1}$ такого, что супремум конечен. В противном случае, т.е. если такой полином не существует, то будем считать, что $N_{k,p}^{(\varphi)} f(x) = +\infty$.

В случае $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, величина $N_{k,p}^{(\varphi)} f(x)$ называется максимальной функцией Кальдерона.

Введем также следующую максимальную функцию:

$$N_{k,p}^{\varphi} f(x) := \inf_{\pi \in P_{k-1}} \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t) - \pi(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$1 \le p < \infty$,

$$N_{k,\infty}^{\varphi} f(x) := \inf_{\pi \in P_{k-1}} \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \| f - \pi \|_{L^\infty(B(x,r))}.$$

Для функции $f \in L_{loc}^{p}(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим

$$\Omega_k(f, B(a,r))_p := \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(t) - P_{k-1, B(a,r)} f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$(1 \le p < \infty)$,

$$\Omega_k(f, B(a,r))_\infty := ess\sup \left\{ |f(t) - P_{k-1, B(a,r)} f(t)| : \quad t \in B(a,r) \right\}.$$

$\Omega_k(f, B(a,r))_p$ $(1 \le p \le \infty)$ называется средней осцилляцией k-го порядка функции f в шаре $B(a,r)$ в метрике L^p.

Пусть $x \in R^n$, $k \in N$ и для любого ν с условием $|\nu| \le k-1$ существует конечный предел

$$\lim_{r\to 0} D^{\nu} P_{k-1,\,B(x,r)} f(x) =: D_{\nu} f(x), \qquad (3)$$

где $D^{\nu} g := \dfrac{\partial^{|\nu|} g}{\partial x_1^{\nu 1} \partial x_2^{\nu 2} \ldots \partial x_n^{\nu n}}$.

Обозначим

$$P_{k-1,\,x} f(t) := \sum_{|\nu| \le k-1} D_{\nu} f(x) \cdot \frac{(t-x)^{\nu}}{\nu!}, \qquad (4)$$

$$n_f^k(x;\delta)_p := \sup\left\{ |B(x,r)|^{-\frac{1}{p}} \cdot \left\| f - P_{k-1,x} f \right\|_{L^p(B(x,r))} : r \le \delta \right\},$$

$$(x \in R^n,\ \delta > 0),$$

где $\nu! = \nu_1! \nu_2! \ldots \nu_n!$.

Пусть $f \in L^p_{loc}(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $\varphi \in \Psi$, $k \in N$. Обозначим

$$N_{k,\varphi,p} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\varphi(r)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \left| f(t) - P_{k-1,x} f(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

$x \in R^n$, с соответствующей модификацией в случае $p = \infty$. Если не существует хотя бы один из пределов (3), то будем считать, что $N_{k,\varphi,p} f(x) = +\infty$.

Можно проверить, что почти для всех $x \in R^n$ имеет место равенство

$$N_{1,\varphi,1} f(x) = N_{\varphi}^{\Phi_0} f(x),$$

где $N_{\varphi}^{\Phi} f(x)$ − максимальная функция, введенная в пункте 2.1.

В **3.2** изучаются свойства потенциала Рисса $\overline{f} := R_{\alpha,k} f$ в терминах максимальной функции $N_{k,\varphi,p} f(x)$ и локальной метрической характеристики $n_f^k(x;\delta)_p$.

Теорема 6. *Пусть* $f \in L^p_{loc}(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, $k \in N$, $\bar{f} := R_{\alpha,k} f$, $\varphi \in \Psi_{k-\alpha}$ *и выполняются условия*

$$\delta^{k-1}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t^{k-\alpha}}\,dt = O\left(\varphi(\delta)\delta^{\alpha}\right), \quad \delta > 0, \tag{5}$$

$$\delta^{k}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\,dt = O\left(\varphi(\delta)\delta^{\alpha}\right), \quad \delta > 0. \tag{6}$$

Если в точке $x \in R^n$ *конечна величина* $N_{l,\varphi,p} f(x)$, *где* $k = [\alpha] + l$, $l \in N$, *то верно неравенство*

$$N_{k,\psi,p} \bar{f}(x) \le c \cdot N_{l,\varphi,p} f(x),, \tag{7}$$

где $\psi(\delta) = \varphi(\delta) \cdot \delta^{\alpha} \ (\delta > 0)$ *а постоянная* $c > 0$ *не зависит от* f *и* x.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Rzaev R.M., Aliyev F.N. Some embedding theorems and properties of Riesz potentials. American Journal of Mathematics and Statistics. 2013, v.3, №6, pp. 445-453.
2. Rzayev R.M., Aliyev F.N. Some inequalities for Riesz potentials. On actual problems of mathematics and informatics abstracts of the International conference dedicated to the 90-th anniversary of Haydar Aliyev. 2013, p. 92-93.
3. Рзаев Р.М., Алиев Ф.Н. Некоторые оценки для потенциала Рисса. I Международная научная конференция молодых ученых, посв. 90-й годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева. 2013, с. 291-292.
4. Алиев Ф.Н. О локальных свойствах потенциала Рисса. II Международная научная конференция молодых ученых, посв. 91-ый годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева. 2014, с. 92-93.
5. Rzayev R.M., Aliyev F.N. Riesz potentials in spaces defined by conditions on local oscillations of functions. Transactions of ANAS, ser. physical-mathematical and technical sciences. 2015, p. 87-95.
6. Rzayev R.M., Aliyev F.N. Generalized maximal functions measuring smoothness. Transactions of ANAS, ser. physical-mathematical and technical sciences. 2015, XXXV № 4, p. 148-158.

7. Rzayev R.M., Aliyev F.N. On Calderon's maximal function. Transactions of ANAS, 2016, №4, p. 167-173.
8. Алиев Ф.Н. Некоторые свойства потенциала Рисса в терминах максимальной функции Кальдерона. Известия Педагогического Университета. т.65, №1, 2017, с. 30-40.
9. Алиев Ф.Н. О некоторых свойствах потенциала рисса в терминах максимальной функции Кальдерона. I Международная научная конференция молодых ученых, посв. 94-ый годовщине Национального Лидера Азербайджана Гейдара Алиева. 2017, с.10-11.

FUAD NƏCƏF oğlu ƏLİYEV

POTENSİAL TİPLİ İNTEQRAL OPERATORLARIN LOKAL OSSİLYASİYA TERMİNLƏRİNDƏ TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Dissertasiya işi potensial tipli inteqral operatorların lokal və qlobal struktur xassələrinin lokal və orta ossillyasiya şərtləri ilə təyin olunan fəzalarda araşdırılmasına lokal cəmlənən funksiyaların...

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr əldə olunmuşdur:

- f funksiyası $\widetilde{L}^p\left(R^n\right)$, $L^p\left(R^n\right)$ və ya ümumiləşmiş Morri fəzasına aid olduqda, f funksiyasının Riss potensialının lokal ossilyasiya terminlərində xassələri araşdırılıb.
- f funksiyası lokal ossilyasiya üzərinə qoyulan şərtlərlə təyin edilən fəzalardan olduqda Riss potensialının lokal ossilyasiya terminlərində xassələri öyrənilib.
- Hamarlığı ölçən Φ maksimal funksiyasının xassələri öyrənilib və onların metrik xarakteristikalarla əlaqələri tapılıb.
- Maksimal funksiyalar arasında bir sıra bərabərsizliklər əldə olunub.
- Kalderon maksimal funksiyasının xassələri öyrənilmişdir.
- Hamarlığı ölçən müəyyən maksimal funksiyalar araşdırılıb və onların Kalderon maksimal funksiyası ilə əlaqələri tədqiq olunub.
- Kalderon maksimal funksiyası terminlərində Riss potensialının xassələri öyrənilib.

FUAD NAJAF oghlu ALIYEV

RESEARCH OF INTEGRAL OPERATORS TYPES OF POTENTIAL IN TERMS OF LOCAL OSCILLATION

ABSTRACT

The dissertation is dedicated to the investigation of local and global structural properties of potential-type integrals in spaces determined by the conditions for local and mean oscillations of locally summable functions.

In the dissertation the following main results were obtained:

- Properties of the Riesz potential of a function f in terms of local oscillations of functions when f belongs to $\tilde{L}^p\left(R^n\right)$, $L^p\left(R^n\right)$, or generalized spaces of Morrey type.
- Properties of the Riesz potential in terms of local oscillation of functions, when f belongs to the space defined by the conditions for local oscillation.
- Maximum Φ function property and their connections with metric characteristics obtained.
- The inequality between the maximal functions is obtained.
- Properties of the maximum Calderon function are studied.
- The study of some generalized maximal function that measures smoothness were studied and their connections with maximum Calderon function were found.
- The properties of the Riesz potential are studied in terms of maximum Calderon function.