НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ТУБУ ЮСИФ кызы НАЗАРОВА

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТИПЫ СХОДИМОСТЕЙ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии по математике

Баку — 2018

Работа выполнена в отделе **"Негармоничсекий анализ" Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель:
член-корреспондент НАН Азербайджана, проф. **Билал Билалов**

Официальные оппоненты:
- профессор НАНА, доктор наук по математике **Вугар Исмаилов** (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана);
- кандидат физико-математических наук, доц. **Рашид Алиев** (Бакинский Государственный Университет).

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 14 сентября 2018 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 14 июня 2018 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория тригонометрических рядов Фурье является важным звеном аппроксимации и служит основой для современного гармонического анализа. Во всех этапах развития этой теории одним из ключевых вопросов является суммируемость в том или ином смысле рядов Фурье. Это направление хорошо освещено в монографиях известных математиков как А.Зигмунд, Р.Эдварс, Н.К.Бари, С.Качмаж, Г.Штейнгауз и др. Очень важным является вопрос о регулярности метода суммируемости. Обширную информацию о регулярных методах суммировании можно получить из монографии G.M.Petersen. Известные методы суммирования как метод Чезаро, метод Рисса, метод Абеля и др., являются регулярными.

В теории тригонометрических рядов Фурье еще Харди и Литтлвудом был применен H_q*-метод* суммирования. Напомним этот метод суммирования.

Последовательность $\{s_k\}_{k=\overline{0,\infty}}$ *назовем* H_q*-суммируемым к пределу* s*, если*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|s_k - s\right|^q \to 0,\ n\to\infty,$$

где $q>0$ *– некоторое число.*

Относительно этого понятия можно посмотреть монографию А.Зигмунд. Чтобы как-то характеризовать H_q*-суммируемость,* там же было введено понятие почти сходимости. В последующем этот вид сходимость был назван статистической сходимостью. Определим это понятие.

Пусть $(s)\ n_1 < n_2 < \ldots -$ некоторая последовательность натуральных чисел, и пусть $\nu(n) = card\,\{k : n_k \le n\} -$ число членов множества $\{k\in N : n_k \le n\}$. Число $d_n = \dfrac{\nu(n)}{n+1}$ есть плотность последовательности (s) в интервале $(0,n)$, а предел $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, если он существует, называется плотностью (s).

Легко проверить, что $d=1$ тогда и только тогда, когда $\frac{k}{n_k} \to 1$, и $d=0 \Leftrightarrow \frac{k}{n_k} \to 0$. Примем следующее понятие.

Последовательность $\{s_k\}_{k\in N}$ *почти сходится к пределу* s, *если существует последовательность* $\{n_k\}_{k\in N}$ *плотности* 1, *такая, что* $s_{n_k} \to s$, $k \to \infty$.

Между H_q*-суммируемости* и почти сходимостью имеется следующая связь.

Теорема 1. i) *Если* $\{s_n\}_{n\in N}$ H_q*-суммируема к* s, *то* $\{s_n\}_{n\in N}$ *почти сходится к* s; ii) *Если* $\{s_n\}_{n\in N}$ *почти сходится к* s *и ограничена, то для* $\forall q>0$, $\{s_n\}_{n\in N}$ H_q*-суммируема к* s.

Используя эту теорему доказывается, что для произвольной суммируемой функции ряд Фурье почти сходится к ней почти всюду.

Этот результат показывает важность понятия почти сходимости или же статистической сходимости. Так как, еще 1962 г. Карлесон показал, что для $\forall f \in L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, ряд Фурье сходится к ней почти всюду.

I.J.Schoenberg показал связь между почти сходимостью и интегрируемостью по Риману функций типа Дирихле. Статистическая сходимость была названа D*-сходимостью*. Она связана с понятием D*-плотностью* подмножества натуральных чисел. Поэтому эти понятия играют важные значения в теории чисел. В последующем эти понятия нашли применения в различных областях математики. В связи с вышеперечисленными считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет определенный научный интерес.

Следует отметить, что термин статистической сходимости впервые был принят в работе H.Fast и H.Steinhaus. Понятие статистической фундаментальности впервые было введено J.A.Fridy относительно последовательностей из действительных чисел. Им доказано, что статистическая сходимость эквивалентна статистической фундаментальности.

Понятие статистической сходимости имеет приложения в разных областях математики как теория суммировании, теория чисел, теория тригонометрических рядов Фурье, теория вероятностей, теория мер, оптимизация, теория аппроксимации, fuzzy теория и др.

В последующем понятие статистической сходимости было обобщено в различных направлениях многими математиками. Отметим, что перечислить вес список касающихся работ невозможно.

Следует отметить, что методы не сходящихся последовательностей давно известны, и им можно отнести, напр., метод Фейера, метод Чезаро, метод Абеля, метод Рисса, и т.п. Эти методы применяются в разных областях математики. Для применимости этих методов очень важно, чтобы рассматриваемое пространство имело линейную структуру. Поэтому изучение сходимостей статистического типа в топологических пространствах, не снабженных линейными операциями, представляет отдельный научный интерес. Статистическая сходимость в линейных топологических пространствах рассмотрена в работе Maio G.D., Kocinac L.D.R. В общем случае, когда топологическое пространство не снабжено линейной структурой, возникает проблема об определении понятия статистической фундаментальности. По этой причине в этой же работе рассмотрено равномерное топологическое пространство (т.е. топологическое пространство с равномерной структурой). В ней определено понятие статистической фундаментальности и доказано, что статистическая фундаментальность эквивалентна статистической сходимости, если топологическое пространство имеет линейную структуру. Доказано, что в равномерных пространствах из статистической сходимости следует статистическая фундаментальность. В работе Maio G.D., Kocinac L.D.R. поставлен вопрос о справедливости обратного утверждения. Этот вопрос решен в представленной диссертационной работе.

Цель работы. Целью диссертационной работы является перенесение основных результатов, касающихся понятия статистической сходимости, на разные топологические структуры и получение соответствующих Тауберовых теорем.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

– понятие статистической сходимости перенесено на случай разные виды сходимостей функциональных последовательностей и получены соответствующие тауберовы теоремы;

– понятие статистической сходимости перенесено на случай метрических пространств, получены соответствующие тауберовы теоремы;

– рассмотрена сходимость по фильтру в метрических пространствах и основные результаты, касающихся статистической сходимости, перенесены на этот случай;

– понятие статистической сходимости рассмотрено в линейных топологических пространствах и основные результаты этого направления перенесены на этот случай;

– положительно решен вопрос, поставленный в работе Maio G.D., Kocinac L.D.R. об эквивалентности понятий статистической сходимости, статистической фундамен-тальности в равномерных пространствах;

– рассмотрена сходимость по фильтру в равномерных пространствах и доказана эквивалентность понятия сходимости по фильтру и фундаментальности по фильтру.

Методика исследования. При получении основных результатов применяются методы теории функций, функционального анализа, теории пределов и методы несходящихся последовательностей.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории функций, функционального анализа, при суммировании не сходящихся рядов и последовательностей, в топологических пространствах, в теории рядов Фурье и Фурье-Стилтьес преобразования.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела “Негармонический анализ” ИММ НАНА (член-кор. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), на семинарах отдела “Теория функций” ИММ НАНА (д.м.н. В.А.Исмаилов), на международной конференции «Актуальные проблемы Математики и Механики» посвященной 55-летнему юбилею Института Математики и Механики (Баку 2015) на 7-ой международной конференции «Математический Анализ, Дифференциальные уравнения и их приложения» (Баку 2016) International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators”.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 66 наименований. Объем диссертации 112 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится краткая история касающихся вопросов и излагается краткое содержание полученных результатов в диссертационной работе.

Первая глава в целом посвящена изучению статистической сходимости в функциональных пространствах. Многие факты, касающихся числовых последовательностей, установлены в этих пространствах. Получены новые результаты, ассоциированные именно функциональными пространствами.

В **1.1** приведены необходимые обозначения, понятия и факты, используемые в диссертационной работе. Приводим некоторые из них. Сперва примем некоторые стандартные обозначения.

$N-$натуральные числа; $\chi_A(\cdot)-$характеристическая функция множества A; $|A|=: cardA-$количество элементов множества A; $1:n=\{1;2;...;n\}$; $[A]_n=(1:n)\cap A$; $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)-$ симметрическая разность множеств A и B; $A^c=N\setminus A-$ дополнение множества A до N; $\wedge-$квантор «и»; $\vee-$квантор «или»; $\Rightarrow-$квантор следует; $\Leftrightarrow-$квантор эквивалентности.

Определим понятие статистической сходимости. Пусть $A\subset N$ некоторое множество. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|[A]_n|}{n}$, то он называется асимптотической плотностью множества A и обозначается через $\delta(A)$:

$$\delta(A) =: \lim_{n\to\infty} \frac{\left|[A]_n\right|}{n}.$$

Последовательность $\{a_n\}_{n\in N}$ будем обозначать через $\vec{a} =: \{a_n\}_{n\in N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ некоторое число. Для число $a \in R$ положим

$$[\vec{a}(a)]_\varepsilon = \{n \in N : |a_n - a| \ge \varepsilon\}.$$

Определение 2. *Пусть $\vec{\xi} \subset R$ некоторая последовательность. Говорят, что $\vec{\xi}$ статистически сходится к числу $\xi \in R$, если $\delta([\vec{\xi}(\xi)]_\varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, и это будем обозначать как st-$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ или как $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, $n \to \infty$.*

Понятие статистической фундаментальности введено J.Fridy.

Определение 3. *Последовательность $\vec{\xi}$ называется статистически фундаментальной или является статистически последовательностью Коши, если для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in N : \delta(K_\varepsilon) = 0$, где $K_\varepsilon = \{n : |\xi_n - \xi_{n(\varepsilon)}| \ge \varepsilon\}$.*

Устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Не существует универсального метода суммирования относительно статистической сходимости, т.е., нет такого метода суммирования, включающего в себя статистическую сходимость.*

Расшифруем эту теорему. Пусть $A = (a_{ij})_{i,\, j=\overline{1,\infty}}$ – некоторая матрица, и $\vec{\xi} \subset R$ – некоторая последовательность. Образуем

$$\eta_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\xi_n, \ k \in N.$$

Будем говорить, что последовательность $\vec{\xi}$ A*-суммируем к* ξ*, если* $\lim_{n\to\infty}\eta_n=\xi$*, и этот факт будем обозначать через* A-$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$.

Будем говорить, что из статистической сходимости следует A*-суммируемость*, если

$$st\text{-}\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\Rightarrow A-\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi.$$

Через A_{st} обозначим множество всех статистически сходящихся последовательностей. Итак, Теорема 0.0.2 утверждает, что не существует матрица A, такая, что из $\vec{\xi}\in A_{st}$ следовала A-$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$.

Обратное тоже не имеет место, так, что статистическая сходимость не влечет многие классические методы суммирования.

Напомним также определения идеала и фильтра. Семейство множеств $I\subset 2^N$ называется идеалом, если:

$\alpha)$ $\varnothing\in I$;

$\beta)$ $A;B\in I\Rightarrow A\cup B\in I$;

$\gamma)$ $(A\in I\wedge B\subset A)\Rightarrow B\in I$.

Семейство $\mathsf{F}\subset 2^N$ называется фильтром на X, если:

i) $\varnothing\notin\mathsf{F}$;

ii) из $A;B\in\mathsf{F}\Rightarrow A\cap B\in\mathsf{F}$;

iii) из $A\in\mathsf{F}\wedge(A\subset B)\Rightarrow B\in\mathsf{F}$.

Фильтр, удовлетворяющий условию

iv) Если $A_1\supset A_2\supset\ldots\wedge A_n\in\mathsf{F}$, $\forall n\in N\Rightarrow$

$$\exists\{n_m\}_{m\in N}\subset N;n_1<n_2<\ldots:\bigcup_{m=1}^{\infty}\left((n_m,n_{m+1}]\cap A_m\right)\in\mathsf{F}$$

назовем монотонно замкнутым фильтром.

Фильтр F *удовлетворяющий следующему условию, назовем правильным:*

v) $F^c\in\mathsf{F}$*, для произвольного конечного подмножества* $F\subset N$.

В параграфе **1.2** рассматривается статистическая сходимость в лебеговых пространствах. Приведен критерий статистической сходимости. Показаны, что ранее известные Тауберовы теоремы в скалярном случае справедливы и в данном случае. Рассматривается статистическая сходимость в пространствах Лебега L_p. Введено понятие статистической фундаментальности в L_p и доказана их эквивалентность. Доказаны, что Тауберовы теоремы справедливы и в данном случае.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ некоторая последовательность функций, $f_n : M \to R,\, M \subset R -$ некоторое множество. Она называется статистически сходящейся в точке $x_0 \in M$ к A, если последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n\in N}$ статистически сходится к A, т.е. $st\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A$. Эта последовательность называется статистически сходящийся к $f(x)$ на M, если

$$st\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in M .$$

Определение 5. *Будем говорить, что* $\{f_n\}_{n\in N}$ *статистически равномерно сходится к* f *на* M*, если*

$$st\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in M}|f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Эту сходимость обозначим как $f_n \overset{st}{\underset{\to}{\to}} f$ на M.

Пусть $f_n, f \in L_p(a,b), 1 \le p < +\infty$.

Определение 6. *Будем говорить, что* $f_n \overset{st}{\to} f$ *в* L_p*, если*

$$st\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\, dx = 0 ,\ \ 1 \le p < +\infty .$$

Примем следующее

Определение 7. *Будем говорить, что* $\{f_n\}_{n\in N}$ *статистически фундаментальна (st- фундаментальна) в* L_p*, если для* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N : \delta(\Delta_\varepsilon) = 0$*, где*

$$\Delta_\varepsilon \equiv \{n \in N : \| f_n - f_{n_\varepsilon} \|_p \geq \varepsilon\}, \ \| f \|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} .$$

Доказана следующая

Теорема 8. *Пусть* $\{f_n\}_{n\in N} \subset L_p$ *некоторая последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) $\exists st \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *;*

2) $\{f_n\}_{n\in N}$ *является* st- *фундаментальной;*

3) $\exists \{g_n\}_{n\in N} \subset L_p : \exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ *и* $\{n : f_n = g_n\} \in \mathbf{K}$.

В случае последовательности из чисел не существует регулярного метода матричного суммирования, который включил бы в себя статистическую сходимость. Эти же рассуждения верны и в рассматриваемом случае. Справедлива

Лемма 9. *Пусть* $\{t_k\}_{k\in N}$ $-$*некоторая последовательность чисел и* $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_0}(k) = +\infty$, *где* $A_0 \equiv \{k \in N : t_k \neq 0\}$. *Тогда* $\exists \{f_k\}_{k\in N} \subset L_p$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k(t) = \infty, \ \forall t \in [a,b].$$

Справедлива следующая

Теорема 10. *Не существует матричного метода суммирования, порождающий (т.е. включающий) статистическую сходимость в* L_p.

Пусть $\{f_n\}_{n\in N} \subset L_p$ $-$некоторая последовательность. Положим $\Delta f_n = f_n - f_{n+1}$.

Имеет место

Теорема 11. *Пусть* $st \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *в* L_p *и* $\|\Delta f_k\|_p = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{k}\right)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *в* L_p *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Обратное утверждение приобретает следующий вид.

Теорема 12. *Пусть* $\{r_k\}_{k\in N}$ *убывающая последовательность положительных чисел, таких, что* $\{k\,r_k\}_{k\in N}$ *является неограниченной. Тогда*

$$\exists\{f_k\}_{k\in N}\subset L_p:\ st\lim_{k\to\infty} f_k = 0 \ \text{ в } L_p,\ \|\Delta f_k\|_p = \bar{\bar{o}}(r_k),$$

в то время как $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ *не существует в* L_p.

1.3 вводится понятие F -*фундаментальности* в метрических пространствах, порожденной некоторым фильтром F . Доказывается его эквивалентность к понятию F -*сходимости* в полных метрических пространствах. Эта сходимость обобщает многие виды сходимостей, в том числе и хорошо известную статистическую сходимость.

Пусть $(X;\rho)$ некоторое полное метрическое пространство и $\mathsf{F} \subset 2^N$ некоторый фильтр. Примем следующее

Определение 13. *Пусть* $\mathsf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Последовательность* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *назовем* F -*сходящейся к* $x\in X$ (*F* $-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), *если* $A_\varepsilon \in \mathsf{F}$, $\forall\varepsilon>0$, *где*

$$A_\varepsilon \equiv \{n\in N : x_n \in O_\varepsilon(x)\}.$$

где $O_\varepsilon(x)-$ шар с радиусом ε с центром в точке x_0.

Введем также понятие F -*фундаментальности.*

Определение 14. *Последовательность* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *назовем* F -*фундаментальной, если* $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in N:\Delta_{n_\varepsilon}\in\mathsf{F}$, *где*

$$\Delta_{n_\varepsilon} \equiv \{n\in N : x_n \in O_\varepsilon(x_{n_\varepsilon})\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 15. *Пусть* $(X;\rho)$ *полное метрическое пространство* и $\mathsf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Последовательность* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *является* F -*сходящейся в* X *тогда и только тогда, когда она* F -*фундаментальна в* X.

Справедлива также

Теорема 16. *Пусть* $(X;\rho)$ *метрическое пространство и* $\mathsf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Тогда:*

1) если F *монотонно замкнутый и* $\mathsf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то

$$\exists\{y_n\}_{n\in N} \subset X:\ \lim_{n\to\infty} y_n = x \wedge \{n\in N : x_n = y_n\} \in \mathsf{F}\ ;$$

2) если F *правильный фильтр и*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x \wedge \left(\{n\in N : x_n = y_n\} \in \mathsf{F}\right),$$

то $\mathsf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Из Теорем 15 и 16 получаем

Следствие 17. *Пусть* $(X;\rho)$ полное *метрическое пространство,* $\mathsf{F} \subset 2^N$ *некоторый монотонно замкнутый, правильный фильтр. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

$\alpha)$ $\exists \mathsf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*;*

$\beta)$ $\{x_n\}_{n\in N}$ F *-фундаментальна;*

$\gamma)$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \wedge \left(\{n\in N : x_n = y_n\} \in \mathsf{F}\right)$.

Вторая глава в целом посвящена изучению статистических типов сходимостей в топологических пространствах.

В **2.1** рассматривается статистическая сходимость в метрических пространствах. Доказана ее эквивалентность к статистической фундаментальности в полных метрических пространствах. Введено понятие p-сильной сходимости и доказано его эквивалентность к статистической сходимости. Приведены Тауберевы типы теоремы относительно статистической сходимости в метрических пространствах.

Пусть $(X;\rho)$ метрическое пространство, и $p\in(0,+\infty)-$ некоторое число. Примем следующее

Определение 18. *Последовательность* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *назовем* p*-сильно сходящейся к* $x\in X$*, если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \rho^p(x_k;x) = 0,$$

и этот предел будем обозначать через $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Справедлива следующая

Теорема 19. *Имеют место:*

i) Если $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *то* $\exists st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

ii) Если $\exists st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

и $\exists O_r(x_0) \subset X : x_n \in O_r(x_0), \forall n \in N$ *, то* $\exists p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Определение 20. *Функцию* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *назовем modulus, если:*

(i) $\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\mu(x+y) \le \mu(x) + \mu(y),\ \forall x, y \in [0,\infty)$;

(iii) μ *является монотонно неубывающей; (iv)* $\mu(+0) = 0$.

Примем следующее

Определение 21. *Пусть* $(X;\rho)$ *метрическое пространство и* μ *есть modulus. Последовательность* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *назовем* μ*-сходящейся к* $x \in X$ *, если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu(\rho(x_k;x)) = 0,$$

и эту сходимость обозначим как $\mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Совершенно аналогично Теореме 19 доказывается следующая

Теорема 22. *Пусть* $\exists \mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. *Тогда* $\exists st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Пусть $(X;\rho)$ метрическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая последовательность. Положим

$$\Delta\rho_n = \rho(x_n; x_{n+1}), \forall n \in N.$$

Имеет место следующая

Теорема 23. *Пусть* $st\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *и* $\Delta\rho_n = \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

В параграфе **2.2** рассматривается статистическая сходимость в линейных топологических пространствах. Определена статистическая фундаментальность, и доказана, что в полных линейных топологических пространствах она эквивалентна статистической сходимости. Введены понятия $\mathbf{F}$ -фундаментальности и $\mathbf{F}$ -сходимости в линейных топологических пространствах и доказана их эквивалентность.

Пусть $(X;\tau)$ топологическое пространство с топологией τ. Окрестность точки $a \in X$ будем обозначать через O_a. Пусть $\{a_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая последовательность и $a \in X$. Возьмем произвольную окрестность $O_a \in \tau$ и положим

$$K(O_a) \equiv \{n \in N : a_n \notin O_a\}.$$

Примем следующее

Определение 24. *Будем говорить, что последовательность* $\{a_n\}_{n\in N} \subset X$ *статистически сходится (st-сходится) к* $a \in X$*, если* $\delta(K(O_a)) = 0$, $\forall O_a \in \tau$*, и это заключение будем обозначать как* st - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Примем следующее

Определение 25. *Пусть* $(X;\tau)$ *линейное топологическое пространство и* $\vec{x} \equiv \{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *некоторая система. Если для* $\forall O_0 \in \tau$ *окрестности нуля* $\exists n_0 \in N : \delta(K_0) = 0$*, где*

$$K_0 = \{n \in N : (f_n - f_{n_0}) \notin O_0\},$$

то будем говорить, что система $\vec{x}$ *статистически фундаментальна (* st *-фундаментальна).*

Предположим, что $(X;\tau)$ полное ТВП и последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ $\mathbf{F}$ -фундаментальна. Будем предполагать, что нуль имеет семейство окрестностей $\{O_0^{(n)}\}_{n\in N} \subset \tau$, которое обладает следующим свойством.

α *) Для* $\forall O_0 \in \tau$ *(*O_0 *− окрестность нуля),* $\exists n_0 \in N : O_0^{(n_0)} \subset O_0$*;*

Справедлива следующая

Теорема 26. *Пусть* $(X;\tau)$ *полное, линейное топологическое пространство, удовлетворяющее условию* α *). Последовательность*

$\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *является* F *-сходящейся в* X *тогда и только тогда, когда она* F *-фундаментальна в* X.

Справедлива следующая

Теорема 27. *Пусть* $(X;\tau)$ *линейное топологическое пространство удовлетворяющее условию* $\alpha)$ *и* $\mathsf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Тогда:*

1) если F монотонно замкнутый фильтр и $\mathsf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,

то
$\exists \{y_n\}_{n\in N} \subset X: \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \wedge \{n \in N : x_n = y_n\} \in \mathsf{F}$;

2) если F *правильный фильтр и*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x \wedge (\{n \in N : x_n = y_n\} \in \mathsf{F}),$$

то $\mathsf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

В **2.3** вводятся понятия F -*сходимости* и F -*фундаментальности* в равномерных пространствах, порожденные некоторым фильтром F . Доказывается эквивалентность F -*фундаментальности* к понятию F -*сходи- мости* в полных равномерных пространствах. Эта сходимость обобщает многие виды сходимостей, в том числе и хорошо известную статистическую сходимость.

Напомним определение равномерности на множестве X. $\Delta \equiv \{(x;x): x \in X\}$ называется диагональю или тождественным отношением. Если $U \subset X \times X$ отношение, то обратное к нему отношение U^{-1} определяется как множество всех пар $(x;y)$ таких, что $(y;x) \in U$, т.е.,

$$U^{-1} \equiv \{(x;y) \in X \times X : (y;x) \in U\}.$$

Пусть $U;V \subset X \times X$ некоторые отношения. Композиция $U \circ V$ отношений U и V определяется как множество всех пар $(x;z)$, для которых при некотором $y \in X$ имеем $(x;y) \in V$ и $(y;z) \in U$, т.е.,

$$U \circ V \equiv \{(x;z): \exists y \in X, (x;y) \in V \wedge (y;z) \in U\}.$$

Пусть $A \subset X$ некоторое множество и $U \subset X \times X$ отношение. Примем

$$U[A] \equiv \{y \in X : \exists x \in A \Rightarrow (x; y) \in U\}.$$

При $A = \{x\}$ положим $U[A] = U[x]$. Равномерность на множестве X – это непустое семейство $\mathbf{U} \subset 2^{X \times X}$, удовлетворяющее условиям:

(a) $\Delta \subset U, \forall U \in \mathbf{U}$;

(b) из $U \in \mathbf{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathbf{U}$;

(v) из $U \in \mathbf{U} \Rightarrow \exists V \in \mathbf{U} : V \circ V \subset U$;

(q) из $U; V \in \mathbf{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathbf{U}$;

Примем следующее

Определение 28. *Пусть* $(X; \mathbf{U})$ *равномерное пространство и* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Последовательность* $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ *назовем* $\mathbf{F}$ *-сходящейся к* x *(коротко* $\mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$*), если*

$$\forall U \in \mathbf{U} : \{n \in N; (x_n; x) \in U\} \in \mathbf{F} .$$

По другому это означает, что

$$\forall U \in \mathbf{U} : \{n \in N; x_n \in U[x]\} \in \mathbf{F} .$$

Определим понятие $\mathbf{F}$ *-фундаментальности.*

Определение 29. *Пусть* $(X; \mathbf{U})$ *равномерное пространство и* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Последовательность* $\{x_n\}_{n \in N} \subset X$ *назовем* $\mathbf{F}$ *-фундаментальной в* X *, если*

$$\forall U \in \mathbf{U} , \exists n_0 \in N : \{n \in N; x_n \in U[x_{n_0}]\} \in \mathbf{F} .$$

Предположим, что $(X; \mathbf{U})$ хаусдорфово равномерное пространство.

(d) из $U \in \mathbf{U} \wedge (U \subset V \subset X \times X) \Rightarrow V \in \mathbf{U}$.

Пара $(X; \mathbf{U})$ называется равномерным пространством. Подсемейство $\mathbf{B} \subset \mathbf{U}$ равномерности $\mathbf{U}$ называется ее базой тогда и только тогда, когда каждый элемент семейства $\mathbf{U}$ содержит некоторый элемент семейства $\mathbf{B}$.

Пусть $(X; \mathbf{U})$ – равномерное пространство. Топологией τ , соответствующей равномерности $\mathbf{U}$, или равномерной топологией, называется семейство всех таких подмножеств $T \subset X$, что, какова бы ни была точка $x \in T$, $\exists U \in \mathbf{U} : U[x] \subset T$.

Пусть $(X;\mathbf{U})$ равномерное пространство и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая последовательность. $\{x_n\}_{n\in N}$ называется фундаментальной, если для

$$\forall U \in \mathbf{U},\ \exists n_0 \in N : (x_n; x_m) \in U,\ \forall n, m \geq n_0 .$$

Имеет место следующее

Утверждение 30. *Пусть* $(X;\mathbf{U})$ *хаусдорфово равномерное пространство,* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр и* $\exists \mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *где* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *некоторая последовательность. Тогда* $\{x_n\}_{n\in N}$ $\mathbf{F}$ *-фундаментальна.*

При определенных предположениях обратное утверждение тоже верно.

Доказана

Теорема 31. *Пусть* $(X;\mathbf{U})$ *хаусдорфово, секвенциально полное равномерное пространство с счетной базой и* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Тогда, если последовательность* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ $\mathbf{F}$ *-фундаментальна, то* $\exists x \in X : \mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Справедлива следующая

Теорема 32. *Пусть* $(X;\mathbf{U})$ *равномерное пространство, удовлетворяющее условию* $\alpha)$ *и* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *некоторый фильтр. Тогда:*

1) если $\mathbf{F}$ *монотонно замкнутый фильтр и*

$\mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\exists \{y_n\}_{n\in N} \subset X : \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \wedge \{n \in N : x_n = y_n\} \in \mathbf{F}$;

2) если $\mathbf{F}$ *правильный фильтр и*

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \wedge (\{n \in N : x_n = y_n\} \in \mathbf{F})$, *то* $\mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Из Теоремы 32 следует также следующее

Следствие 33. *Пусть* $(X;\mathbf{U})$ *равномерное пространство, удовлетворяющее условию* $\alpha)$ *и* $\mathbf{F} \subset 2^N$ *правильный фильтр. Если* $\exists \mathbf{F}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *то*

$$\exists \{n_k : n_1 < n_2 < \ldots\} \in \mathsf{F} \ : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x .$$

Фильтры.

I. Неправильный фильтр. Пусть $e_0 \subset N \wedge e_0 \neq N$. Положим

$$\mathsf{F}_{e_0} \equiv \{e \subset N : e_0 \subset e\}.$$

Нетрудно заметить, что F_{e_0} является фильтром, не являющимся *правильным.*

II. Обычная сходимость. Положим

$$\mathsf{F} \ \equiv \{M \subset N : M^c \equiv N \setminus M - \textit{конечное множество}\}.$$

Порожденная этим фильтром F -сходимость совпадает с обычной сходимостью.

III. Статистическая сходимость. Положим

$$\mathsf{F}_\delta \equiv \{M \subset N : \delta(M) = 1\}.$$

F_δ является фильтром. Нетрудно заметить, что фильтр F_δ является правильным. Более того, F_δ является монотонно замкнутым.

IV. Логарифмическая сходимость. Пусть $M \subset N$. Положим

$$l_n(M) = \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi_M(k)}{k},$$

где $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Если $\exists \lim_{n\to\infty} l_n(M) = l(M)$, то $l(M)$ называется логарифмической плотностью множества M . Пусть

$$\mathsf{F}_l \equiv \{M \subset N : l(M) = 1\}.$$

F_l является фильтром. Доказываться, что F_l монотонно замкнутый фильтры является правильным.

V. Равномерная сходимость. Пусть

$$M \subset N \wedge (t \in Z_+ ; s \in N).$$

Положим

$$M(t+1; t+s) = |n \in M : t+1 \le n \le t+s| .$$

Пусть

$$\beta_s(M) = \liminf_{t\to\infty} M(t+1; t+s),$$

$$\beta^s(M) = \limsup_{t\to\infty} M(t+1; t+s).$$

Если

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\beta_s(M)}{s}=\lim_{s\to\infty}\frac{\beta^s(M)}{s}=\beta(M),$$

то величину $\beta(M)$ называют равномерной плотностью множества M. Положим

$$\mathsf{F}_\beta\equiv\{M\subset N:\beta(M)=1\}.$$

Установлено, что F_β является монотонно замкнутым фильтром.

VI. Не монотонно замкнутый фильтр. Пусть

$$A_k\equiv\{n2^k:n\in N\},\ \ \forall k\in N.$$

Положим

$$\mathsf{F}\equiv\{M\subset 2^N:\exists k\in N\Rightarrow A_k\subset M\}.$$

Ясно, что $\varnothing\notin\mathsf{F}$. Пусть

$$A;B\in\mathsf{F}\ \Rightarrow\exists k_1;k_2\in N:\left(A_{k_1}\subset A\right)\wedge\left(A_{k_2}\subset B\right).$$

Пусть $k_0=\max\{k_1;k_2\}$. Ясно, что $(A\cap B)\supset A_{k_0}$, т.е. условие ii) фильтра выполняется. Пусть

$$(A\in\mathsf{F})\wedge(A\subset B).$$

Следовательно

$$\exists k_0\in N:A_{k_0}\subset A\Rightarrow A_{k_0}\subset B\Rightarrow B\in\mathsf{F}.$$

Итак, F является фильтром. Покажем, что F не является монотонно замкнутым. Ясно, что $A_1\supset A_2\supset\ldots$. Пусть

$$\exists n_k;n_1<n_2<\ldots:\bigcup_{m=1}^{\infty}\left((n_m,n_{m+1}]\cap A_m\right)\in\mathsf{F}.$$

Следовательно

$$\exists p\in N:A_p\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\left((n_m,n_{m+1}]\cap A_m\right).$$

Пусть

$$k_0\in N:2k_0+1>n_{p+1}.$$

Нетрудно заметить, что

$$(2k_0+1)2^p\notin A_k,\forall k>p\Rightarrow(2k_0+1)2^p\notin\bigcup_{m=1}^{\infty}\left((n_m,n_{m+1}]\cap A_m\right).$$

Полученное противоречие показывает, что F не является монотонно замкнутым.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю член-корр. НАН Азербайджана, проф. Билал Билалову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Bilalov B.T., Nazarova T.Y. On the statistical type convergence and fundamentality in metric spaces. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. V. 2, No 1, 2014, July, pp. 84-93
2. Наджафов Т.И., Назарова Т.Ю. О F -сходимости в линейных топологических пространствах. Naxçıvan Dövlət Universiteti, Elmi əsərlər, Fizika-riyaziyyat və Texnika elmləri seriyası, 2014, No. 3 (59) səh. 52-59
3. Гусейнов З.Г., Назарова Т.Ю. О статистической сходимости. Sumqayit Dövlət Universiteti, Elmi Xəbərlər, Təbiət və texniki elmlər bölməsi, cild 14, №3, 2014, səh. 17-21
4. Bilalov B.T., Nazarova T.Y. On statistical convergence in metric spaces. On Actual Problem of Mathematics and Mechanics, International conference devoted to the 55-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, May 15-16, 2014, Baku, Azerbaijan, pp.106-107
5. Bilalov B.T., Nazarova T.Y. On Statistical Convergence in Metric Spaces. Journal of Mathematics Research; Vol. 7, No. 1; 2015, pp. 37-43, ISSN 1916-9795 E-ISSN 1916-9809
6. Bilalov B.T., Nazarova T.Y. Statistical convergence of functional sequences. Rocky Mountain J. Math., Volume 45, Number 5, 2015, pp. 1413-1423
7. Sadigova S.R., Nazarova T.Y. Statistical type Lebesgue and Riesz theorems. International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 9, 2015, no. 34, 1669 – 1683 HIKARI Ltd.
8. Sadigova S.R., Nazarova T.Y. Statistical type Lebesgue and Riesz theorems. 7-th International Conference on "Mathematical Analysis,

Differential Equations and Their Applications", MADEA -7, September 08-13, 2015, pp.145, Baku, Azerbaijan
9. Garayev T.Z., Nazarova T.Y. On statistical type convergence in uniform spaces. International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators May 25-27, 2016, p. 37
10. Bilalov B.T., Nazarova T.Y. On statistical type convergence in uniform spaces. Bull. Iranian Math. Soc. Vol. 42 (2016), No. 4, pp. 975–986

TUBU YUSİF qızı NƏZƏROVA

TOPOLOJİ FƏZALARDA STATİSTİK TİP YIĞILMALAR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi topoloji fəzalarda statistik tip yığılma məsələlərinə və uyğun Tauber teoremlərinin alınmasına həsr olunub.

Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardır:

- statistik tip yığılma anlayışı funksional ardıcıllıqların müxtəlif şəkilli yığılmaları halına köçürülmüş və uyğun Tauber teoremləri alınmışdır;
- statistik tip yığılma anlayışı metrik fəza halına köçürülmüş, uyğun Tauber teoremləri alınmışdır;
- metrik fəzalarda filtr üzrə yığılmaya baxılmış və statistik yığılma ilə bağlı əsas nəticələr bu hala köçürülmüşdür;
- statistik tip yığılma anlayışına xətti topoloji fəzalarda baxılmış və bu istiqamətin əsas nəticələri bu hala köçürülmüşdür;
- Maio G.D., Kocinac L.D.R. işində müntəzəm fəzalarda statistik yığılma və statistik fundamentallıq anlayışlarının ekvivalentliyi haqqında qoyulan məsələ müsbət həll olunmuşdur;
- müntəzəm fəzalarda filtr üzrə yığılmaya baxılmış, statistik yığılma və statistik fundamentallıq anlayışlarının ekvivalentliyi isbat olunmuşdur.

TUBU YUSİF kızı NAZAROVA

STATISTICAL TYPE CONVERGENCES IN TOPOLOGICAL SAPCES

SUMMARY

The dissertation work is devoted to the statistical type convergences in the topological spaces and to the obtaining corresponding Tauberian theorems.

In the dissertation work the following main results are obtained.

- the concept of statistical convergence is transferred to the case of different types of convergence of functional sequences, and corresponding Tauberian theorems are obtained;
- the concept of statistical convergence is transferrred to the case of metric spaces, corresponding Tauberian theorems are obtained;
- filter convergence in metric spaces is considered, and the main results concerning statistical convergence are transferred to this case;
- the concept of statistical convergence is considered in linear topological spaces and the main results of this direction are transferred to this case;
- positively solved the problem posed in the work of Maio G.D., Kocinac L.D.R. on the equivalence of the concepts of statistical convergence and statistical fundamentality in uniform spaces;
- filter convergence is considered in uniform spaces and the equivalence of the concepts of filter convergence and filter fundamentality is proved.