

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЛИЗАДЕ ИМАМАЛИ ОГЛЫ СЕЙФУЛЛАЕВ

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ И ДИНАМИКИ
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

2002.01-Механика деформируемого твердого тела

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук по механике

Баку – 2018

Работа выполнена в отделе «Волновая динамика» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, проф. **Джафар Агаларов**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Вагиф Мирсалимов** (Азербайджанский Технический Университет);
- доктор физико-математических наук, проф. **Габиль Алиев** (Институт Математики и Механики НАНА);
- доктор физико-математических наук, проф. **Асаф Заманов** (Азербайджанский Государственный Педагогический Университет).

Ведущая организация:

Бакинский Государственный Университет
кафедра «Математические методы прикладного анализа».

Защита диссертации состоится 28 сентября 2018 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии по математике при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: АЗ 1141, г.Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 04 июля 2018 года.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета

Д 01.111

доц. Тамилла Гасанова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Задачи, связанные с разрушением и динамикой неоднородных сред, возникают во всех областях современной техники. Этим объясняется повышенное внимание к этим задачам со стороны представителей различных научных направлений фундаментального и прикладного характера. Научные результаты, полученные в этих направлениях, изложены в обобщающих монографиях и в статьях. Существенный вклад в развитии теорий разрушения и динамики неоднородных сред, ориентированные на практически важные цели внесли Рахматулин Х.А., В.Д.Кубенко, Р.Ю.Амензаде, Ф.С.Латифов, С.А.Вольмир, М.А.Ильгамов, Г.П.Черепанов, Ашбаух, В.П.Тамуж, И.Ю.Образцов, С.И.Райс, С.Аtkinson, F.E.Erdogan В.Д.Кулиев, Дж.Г.Агаларов, С.Д.Акбаров, В.М.Мирсалимов, М.Б.Ахундов, М.Х.Ильясов, М.Ф.Мехтиев, и др.

Одной из актуальных задач механики разрушения является исследование разрушения неоднородных сред с трещинами. Круг прикладных аспектов этой тематики весьма широк.

К настоящему времени в преобладающем большинстве работ этого направления основное внимание уделено построению асимптотических представлений для напряжений в конце трещин, а также вопросам торможения, преломления и ветвления трещин в кусочно-однородных средах. Эти результаты играют определенную роль в познании механизмов разрушения (в том числе усталостного) составных элементов конструкций. Не менее важной, особенно в связи с нахождением практически возможных способов повышения сопротивления составных элементов конструкции хрупкому разрушению, являются исследования хрупкой прочности многослойных материалов с краевой и центральной трещинами нормального разрыва, изучение процессов торможения трещин в многослойных материалах, исследований адгезионной прочности контактного слоя на границе раздела двух различных сред.

Среды широкого круга проблем механики неоднородных материалов особое место занимают вопросы связанные с их структурными особенностями. Одним из основных существенных моментов является учет особенностей структуры композиционных материалов при математическом моделировании задачи механики трещин.

Наиболее существенной особенностью структуры композиционных материалов является искривление армирующих слоев, которые могут появиться за счет структурного построения композитных материалов или в результате действия различных факторов технологии. Поэтому исследование задач механики трещин композитных материалов с искривленными структурами следует признать весьма актуальными.

Кроме того, в настоящее время исследование проблем движения и колебания конструкции, взаимодействующих с окружающей средой, является актуальным. Практика современных отраслей машиностроения и строительства требует расчета элементов конструкций и сооружений на действие волн, распространяющихся в окружающей среде или в среде заполняющей его. Из-за сложности динамики конструкций их можно смоделировать как систему с одной степенью свободы.

Так, наземные, подземные, цилиндрические, сферические конструкции и емкости, находящиеся во взаимодействии с сейсмическими или взрывными волнами могут быть смоделированы как жесткие включения, содержащие упруго закрепленную массу, взаимодействующую со сплошной средой.

В связи с указанным, с целью упрощения задачи, сооружения представляются в виде дискретной колебательной системы, а окружающая среда рассматривается в двумерной постановке. Воздействия, которым подвергаются сооружения, могут иметь различную природу, и соответственно, должна измениться постановка исследуемых задач.

Из сказанного следует-есть крайняя необходимость в создании новых моделей для исследования движения дискретных систем в деформируемой системе.

В последнее время в связи с запросами техники, значительный интерес у исследователей вызывают вопросы, связанные с динамическим поведением тонкостенных конструкций, которые в рабочих условиях находятся в контакте с внешней средой. Важное место среди динамических контактных задач теории оболочек занимают задачи о свободных колебаниях упругих тонких оболочек, контактирующих с упругой твердой средой и жидкостью.

В этом контексте важен учет влияния окружающей среды при исследовании характеристики динамической жесткости отмеченных конструкций. Отметим, что одной из характеристик конструкции является частота свободных колебаний системы.

Анализ обзора по всем вышеуказанным направлениям показывает, что задачи разрушения и динамики неоднородных сред недостаточно полно исследованы. Так, для повышения прочности и долговечности многослойных материалов необходимо дополнительно исследовать процессы развития трещин в многослойных материалах. В этом направлении требуется построение нового типа задач механики разрушения многослойных сред с трещинами и нахождение их решений; установления условий, при выполнении которых происходит торможение трещины, а также разработка и развитие методики для исследования задачи механики разрушения многослойных материалов с искривленными слоями, содержащих в себе трещины конечной длины. Кроме этого, анализ показывает, что необходимо построить новый подход для исследования движения дискретных систем в деформируемой среде, а также исследовании некоторых специфических задач динамического взаимодействия оболочек со сплошной средой. Дело в том, что основные результаты задачи о свободных колебаниях цилиндрической и сферической оболочек, контактирующих со сплошной средой получены, как правило, численным путем или приближенными асимптотическими методами, что ограничивает их в ряде важных случаев при проведении качественного анализа исследуемых процессов.

Решение вышеуказанных проблем определяет актуальность диссертационной работы.

Цель работы состоит в решении теоретически и практически важных задач, необходимых для исследования процесса разрушения слоистых материалов с трещинами, в том числе разработки и развитии методики для исследования задачи механики разрушения многослойных материалов с искривлёнными слоями, построении новых моделей и алгоритмов при исследовании движения дискретных систем в деформируемой среде, а также для исследования некоторых задач динамического взаимодействия оболочек со сплошной средой с учетом эффекта повреждаемости материала.

На защиту выносятся: разработка теории разрушения и динамики неоднородных сред, включающая в себя:

- постановку некоторых новых задач по развитию трещин в многослойных материалах;
- постановку задачи и разработку подходов для численного исследования КИН в композитах с искривленными слоями, имеющиеся трещины конечной длины с привлечением точных уравнений линейной теории упругости;

- исследование влияния физико–механических свойств, геометрических параметров задачи на коэффициент интенсивности напряжений;
- исследование движения дискретных систем в деформируемой среде;
- исследование некоторых задач динамического взаимодействия оболочек со сплошной средой;
- разработку метод определения собственной частоты свободных колебаний оболочек, взаимодействующей со сплошной средой.

Научная новизна и значимость результатов работы заключается:

- в постановке и решении теоретически и практически важных задач для исследования процесса разрушения слоистых материалов с трещинами;

- в разработке алгоритма численного исследования КИН в вершинах конечных трещин в композитах с искривленными слоями, с привлечением точных уравнений линейной теории упругости;

- в разработке теории взаимодействия сплошной среды с дискретной системой;

- в применении обратного метода для исследования свободных колебаний цилиндрических и сферических оболочек, взаимодействующих со сплошной средой.

Общая методика исследования. В работе использованы представление Папковича-Нейбера перемещений и напряжений через три гармонические функции, интегралы Фурье для гармонических функций, принцип суперпозиции в теории трещин, метод сингулярных интегральных уравнений, метод разделения переменных, уравнения теории оболочки система уравнений движения сжимаемой жидкости, метод преобразования Лапласа-Карсона.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается:

- применением точных уравнений линейной теории упругости в рамках модели кусочно–однородного тела;

- корректностью постановок задач, точностью аналитического аппарата и обеспечением необходимой точностью при проведенных численных расчетах и точностью аналитических решений, соответствующих волновых уравнений;

– согласованностью полученных результатов между собой, физическими соображениями и с известными в литературе результатами в частных случаях.

Практическая ценность результатов настоящей работы заключается в создании на основе модели кусочно–однородного тела методики, позволяющей вычислить КИН в неоднородных средах, которые содержат в себе трещины, в построении теории движения дискретных систем в деформируемой среде. Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании прочности и долговечности конструкций из слоистых материалов, а также полученные результаты могут быть применены в исследовании характеристик динамических жесткостей конструкций, взаимодействующих с различными средами.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на общепитетутских семинарах Института Математики и Механики, семинарах по проблемам механики в отделе «Прикладная математика» (проф. Г.Г. Алиев), на семинарах кафедры «Теоретическая механика и механика сплошной среды» БДУ (доц. Ю.М. Севдималиев), на семинаре кафедры «Высшая математика» АзАСУ (проф. Ф.С. Лятифов), 4 Ulusal kiril-ma konf. bildiri-leri (Türkiyə -1999), Proceedings of the 5th Inter. fracture conf. Elazing-Turkey (2001), Proceedings of the 6th Inter. fracture conf. Kopya-Turkey (2003), на международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения члена-корреспондента НАН Азербайджана, проф. И.Т. Мамедова (2005), на XII Международной конференции по математике и механике, посвященной 70-летнему юбилею члена-корреспондента НАН Азербайджана, проф. Б.А. Искендерова (2006), на Международном симпозиуме “Современные проблемы математики, механики и информатики» (2007), International Scientific Conference, Azerbaijan-Turkey-Ukrainian, Mathematical Analysis, Differensial Equations and their Applications, MADEA-7 (Baku - 2015), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы современных естественных наук», г. Гянджа, Азербайджан (2017).

Публикации. Научные результаты диссертационной работы опубликованы в более, чем 32 статьях в ведущих зарубежных и отечественных журналах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы. Работа содержит 256 страниц машинописного текста, 46 рисунков,

библиографии из 197 наименований отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор научных работ относящихся к рассматриваемой в диссертационной работе проблеме. Здесь сформулирована тема и цель работы, обосновывается ее актуальность, новизна и достоверность полученных результатов, их практическая ценность. Кратко изложено основное содержание работы по главам.

В главе I на основе модели кусочно-однородного тела с привлечением точных уравнений линейной теории упругости предложен метод и решен ряд задач об определении коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в слоистых композитах с искривленными слоями, которые содержат в себе трещины, параллельные направлению действия внешних нормальных усилий.

Проведено численное исследование КИН на кончиках трещин в зависимости от параметров структуры композита. Кроме этого, исследовано влияние формы локального искривления слоев на коэффициент интенсивности напряжений.

В 1.1 рассматривается бесконечное упругое тело, армированное любым количеством непересекающихся искривленных слоев наполнителя. Величины, относящиеся к матрице, отметим верхними индексами (1), а величины, относящиеся к наполнителю – индексами (2). К каждому слою отнесем прямоугольную декартову систему координат $O_m^{(k)} x_{1m}^{(k)} x_{2m}^{(k)} x_{3m}^{(k)}$, ($k = 1, 2; m = 1, 2, 3, \dots$), которая получается из системы координат $Ox_1 x_2 x_3$ путем параллельного переноса вдоль оси Ox_2 и связана со срединными поверхностями соответствующих слоев. Примем, что искривление рассматриваемых слоев не зависит от координата x_3 .

Будем считать, что армирующие слои расположены по плоскостям $x_m^{(2)} O_m^{(2)} x_{3m}^{(2)}$ и толщина каждого слоя наполнителя – постоянная. Материалы слоев матрицы и наполнителя принимаются однородными, изотропными и линейно упругими.

Исследуем плоскую деформацию в указанном выше композитном материале при нагружении «в бесконечности» равномерно распределенными нормальными усилиями с

интенсивностью $\langle P \rangle$, которая действует в направлении оси Ox_1 .

Отметим, что под $\langle P \rangle$ будем понимать напряжение, усредненное по всей площади рассмотренного тела, на которое действует нормальное внешнее усилие в направлении оси Ox_1 .

В пределах каждого слоя запишем уравнения равновесия, закон Гука и соотношения Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)m}}{\partial x_{jm}^{(k)}} = 0; \quad \sigma_{ij}^{(k)m} = \lambda^{(k)m} \theta^{(k)m} \delta_i^j + \mu^{(k)m} \varepsilon_{ij}^{(k)m}; \\ \varepsilon_{ij}^{(k)m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(k)m}}{\partial x_{jm}^{(k)}} + \frac{\partial u_j^{(k)m}}{\partial x_{im}^{(k)}} \right); \quad \theta^{(k)m} = \frac{\partial u_i^{(k)m}}{\partial x_{im}^{(k)}}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) использованы общепринятые обозначения.

Предположим, что на поверхностях раздела сред материала матрицы и наполнителя выполняются условия полного сцепления. Обозначив верхние поверхности $m^{(2)}$ -го слоя через S_m^+ , а нижние поверхности через S_m^- и вводя обозначение $m_1 = m - 1$, эти условия запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)m} / s_m^+ n_j^{m,+} = \sigma_{ij}^{(2)m} / s_m^+ n_j^{m,+}; \quad u_i^{(1)m} / s_m^+ = u_i^{(2)m} / s_m^+; \\ \sigma_{ij}^{(1)m} / s_m^- n_j^{m,-} = \sigma_{ij}^{(2)m} / s_m^- n_j^{m,-}; \quad u_i^{(1)m} / s_m^- = u_i^{(2)m} / s_m^-, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n_j^{m,\pm}$ - составляющие орта нормами к поверхности S_m^\pm .

Уравнение срединной поверхности $m^{(2)}$ -го слоя наполнителя зададим в виде

$$x_{2m}^{(2)} = F_m(x_{1m}^{(2)}) = \mathcal{E}_m(x_{1m}^{(2)}) \quad (3)$$

Здесь $0 \leq \varepsilon < 1$ – безразмерный малый параметр.

Кроме вышеизложенных примем, что в слоях матрицы имеются свободные трещины конечной длины $2l_{mn}$, которые расположены по плоскостям $x_{2m}^{(1)} = C_{mn}^{(1)}$ (где $C_{mn}^{(1)} = const_n$, $n = 1, 2, \dots$) и к соотношениям (1)-(3), добавим еще и условие на берегах этих трещин:

$$\sigma_{i2}^{(1)m}(x_{1m}^{(1)}, C_{mn}^{(1)} + 0) = \sigma_{i2}^{(1)m}(x_{1m}^{(1)}, C_{mn}^{(1)} - 0) = 0 \quad (4)$$

при $x_{1m}^{(1)} \in (a_{nm}, b_{nm}), b_{nm} - a_{nm} = 2l_{nm}$, где a_{nm}, b_{nm} абсциссы, соответственно, левого и правого кончика трещин.

Этим исчерпывается общая постановка задачи механики о трещине в рассматриваемых композитах. Ниже в вышеизложенной постановке рассмотрим следующие частные случаи:

Случай I. Рассмотрим бесконечное упругое тело, армированное двумя близлежащими антифазно периодически искривленными слоями (рис.1). Со срединной поверхностью каждого слоя наполнителя и слоем матрицы $1^{(1)}$ свяжем соответствующие декартовые системы координат. Примем, что уравнение равновесия выполняется в пределах слоев $0^{(2)}, 1^{(1)}, 1^{(2)}$, а также в пределах полупространств $0^{(1)}$ и $2^{(1)}$. Уравнения срединных поверхностей слоев $1^{(2)}$ и $0^{(2)}$ соответственно возьмем в виде

$$x_{21}^{(2)} = \varepsilon l \sin \frac{2\pi}{l} x_{11}^{(2)}, x_{20}^{(2)} = -\varepsilon l \sin \frac{2\pi}{l} x_{10}^{(2)}. \quad (5)$$

где $\varepsilon = L/l$, L – длина стрелы подъема искривления, l – длина волны форм искривления срединной поверхности. Предполагается что, $L < l$.

С учетом изложенного, рассматриваются следующие задачи.

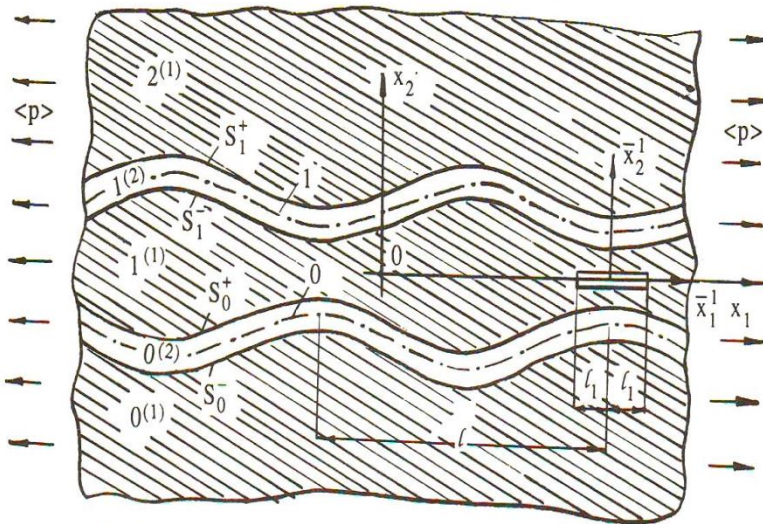


Рис.1

Задача 1. Определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) на кончиках трещин, которые находятся в слое матрицы $1^{(1)}$ при $x_{21}^{(1)} = 0$, $3l/4 - l_1 \leq x_{11}^{(1)} \leq 3l/4 + l_1$, где $2l_1$ - длина трещины. При этом условие (4) будет иметь следующий вид:

$$\sigma_{i2}^{(1)1}(x_{11}^{(1)}, +0) = \sigma_{i2}^{(1)1}(x_{11}^{(1)}, -0) = 0 \quad (6)$$

при $x_{11}^{(1)} \in (3l/4 - l_1, 3l/4 + l_1)$.

Задача 2. Определить (КИН) на кончиках двух коллинеарных трещин (с учетом их взаимовлияния между собой), которые находятся в слое матрицы $1^{(1)}$ при $x_{21}^{(1)} = 0$, $3l/4 - l_1 \leq x_{11}^{(1)} \leq 3l/4 + l_1$ и $-l/4 - l_1 \leq x_{11}^{(1)} \leq -l/4 + l_1$. При этом условие (6) будет удовлетворяться и при $x_{11}^{(1)} \in (-l/4 - l_1, -l/4 + l_1)$

Случай II. Рассмотрим композит с чередующимися антифазно периодически искривленными слоями (рис.2). Со срединной поверхностью каждого слоя наполнителя и матрицы свяжем соответствующие декартово системы координат $0_m^{(k)} x_{1m}^{(k)} x_{2m}^{(k)}$, которые получаются из $0x_1x_2$ путем параллельного переноса вдоль оси $0x_2$. Учитывая периодичность структуры указанного на рис.2, композита в направлении оси $0x_2$ с периодом $4(H^{(1)} + H^{(2)})$, (где $2H^{(1)}$ средняя толщина слоя матрицы, $2H^{(2)}$ толщина слоя наполнителя) из рассматриваемых слоев выделяются 4 слоя $1^{(1)}, 1^{(2)}, 2^{(1)}, 2^{(2)}$ и все дальнейшие рассуждения проводятся по ним. Уравнения срединных поверхностей слоев наполнителя $1^{(2)}$ и $2^{(2)}$ принимаются соответственно в виде

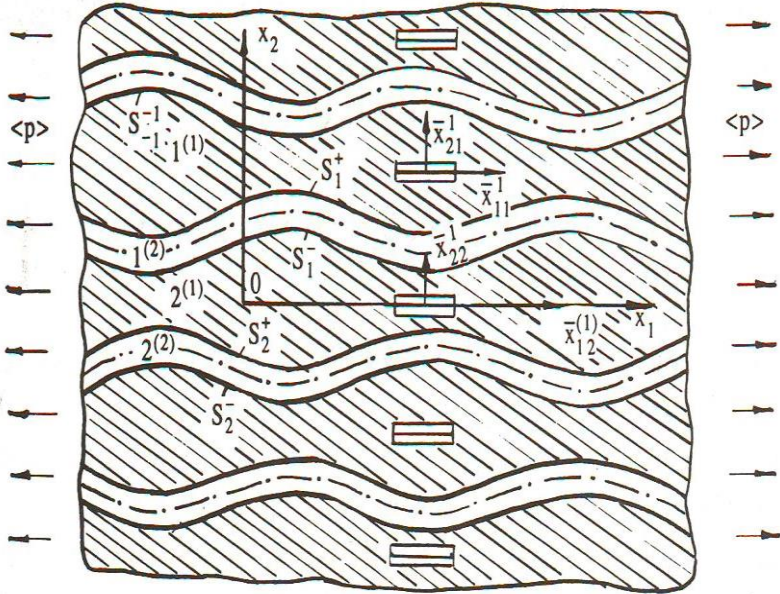


Рис.2

$$x_{21}^{(2)} = L \sin \frac{2\pi}{l} x_{11}^{(2)} = \epsilon l \sin \frac{2\pi}{l} x_{11}^{(2)} \quad (7)$$

и

$$x_{22}^{(2)} = -L \sin \frac{2\pi}{l} x_{12}^{(2)} = -\epsilon l \sin \frac{2\pi}{l} x_{12}^{(2)} \quad (8)$$

где L и l имеют тот же самый смысл, который имел в предыдущем случае.

Аналогично предыдущему случаю, и здесь в рамках выше изложенного рассматриваются следующие задачи.

Задача 3. Определить КИН в кончиках трещин (рис.2), которые имеют каждый слой матрицы при $x_{2m}^{(1)} = 0$,

$3l/4 - l_1 \leq x_{1m} \leq 3l/4 + l_1$. В этом случае условия (4) имеют вид:

$$\sigma_{i2}^{(1)m}(x_{1m}^{(1)}, +0) = \sigma_{i2}^{(1)m}(x_{1m}^{(1)}, -0) = 0 \quad (9)$$

при $x_{1m}^{(1)} \in (3l/4 - l_1, 3l/4 + l_1)$.

Задача 4. Определить КИН на кончиках колениарных двух коллинеарных трещин, которые имеют каждый слой матрицы при

$x_{2m}^{(1)} = 0$, $-l/4 - l_1 \leq x_{1m}^{(1)} \leq -l/4 + l_1$ и $3l/4 - l_1 \leq x_{1m}^{(1)} \leq 3l/4 + l_1$. В этом случае условия (9) будут удовлетворяться и при $x_{1m}^{(1)} \in (-l/4 - l_1, -l/4 + l_1)$.

Последующие параграфы этой главы посвящены решению изложенных выше задач.

В первой главе исследуются задачи I и II. При этом, согласно общеизвестной процедуре, решения поставленной каждой задачи сводится к решению двух последовательных задач. Первая из них (назовем его этап I) определяет напряженно-деформированное состояние рассмотренных выше материалах без трещины в заданном виде действия внешних усилий, и тем самым определяет напряжения, которые действуют на тех участках, на которых расположены трещины, а второе – (назовем его этап II) определяет напряженное состояние в указанных материалах с трещинами, на берегах которых действуют напряжения, определенные на этапе I процесса решения.

На каждом указанном этапе искомые величины представляются в виде ряда по малому параметру ε :

$$\left\{ \sigma_{ij}^{(k)m}; \varepsilon_{ij}^{(k)m}; u_i^{k(m)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{ij}^{(k)m,q}; \varepsilon_{ij}^{(k)m,q}; u_i^{(k)m,q} \right\} \quad (10)$$

На этапе I искомые величины найдены известном методом, при этом, используя представление Папковича-Нейбера, определены величины нулевого и первого приближений. На этапе II показано что, величины нулевого приближения тождественно равны нулю, а для нахождения величин первого приближения тоже использовано представления Папковича-Нейбера с применение экспоненциального преобразования Фурье по переменным x_1 . Таким образом, представляя искомые величины в виде интегралов Фурье и вводя функцию

$$Q(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[U_2^{(1)1,1}(x_1, +0) - U_2^{(1)1,1}(x_1, -0) \right] \quad \text{при } |x_1| < l$$

$Q(x_1) = 0$ при $|x_1| > l_1$ после ряда преобразований и замены переменных, нахождение КИН приводится к решению следующего

сингулярного интегрального уравнения относительно функции $Q_1(t) = G^{(1)}Q(t)$ (где $G^{(1)}$ - модуль сдвиге материала матрицы):

$$\int_{-1}^1 \frac{Q_1(t)}{t - x_1} dt + \int_{-1}^1 K(t, x_1) Q_1(t) dt = \sigma(x_1), \quad (11)$$

В (11) $K(t, x_1)$ и $\sigma(x_1)$ - известные функции. При этом, из условий однозначности перемещений получено, что имеют место следующие:

$$\int_{-1}^1 Q_1(t) dt = 0. \quad (12)$$

Приведены формулы, о помощью которого вычисляются КИН через функции $Q_1(t)$.

Таким образом, определение величин первого приближения на этапе II приводится к решениям сингулярного интегрального уравнения (11), (12). Продолжая этот процесс, получаем что и определения величин последующих приближений приводится к решениям такого же вида сингулярного интегрального уравнения.

В 1.2 проведено численное исследование КИН в зависимости от параметров задачи. В конкретных исследованиях уравнения (11) - (12) решаются численно и при этом используется алгоритм Мультиппа—Каландия, основанный на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формул сингулярного интеграла. Применительно к рассматриваемому случаю функция $Q_1(x)$ ищется в виде

$$Q_1(x) = \frac{q_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где $q_1(x)$ – ограниченная функция на $[-1, 1]$.

Рассмотрены ряд численных результатов, полученных в рамках изложенного выше подхода, с привлечением только первого приближения.

При этом, принято, что $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$.

Значение \bar{K}_{IA} (Задача 2)

$\frac{2\pi H^{(1)}}{l}$	$\frac{2\pi H^{(2)}}{l}$	$2\pi l_1/L$			
		$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
0.1	0.1	109.06	105.56	97.32	55.21
	0.2	177.97	169.32	159.81	75.47
	0.3	203.41	189.60	175.60	65.3
0.2	0.1	108.47	10.59	98.21	56.62
	0.2	180.93	172.92	160.77	82.03
	0.3	210.39	194.71	173.70	70.23
1	0.1	73.48	73.49	72.20	55.87
	0.2	115.58	114.54	110.02	75.90
	0.3	117.56	114.52	106.33	64.55

Значение \bar{K}_{IB} (Задача 2)

$\frac{2\pi H^{(1)}}{l}$	$\frac{2\pi H^{(2)}}{l}$	$2\pi l_1/L$			
		$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
0.1	0.1	108.68	104.49	95.14	55.24
	0.2	173.28	157.23	138.02	92.72
	0.3	192.26	163.25	136.09	99.24
0.2	0.1	108.52	106.05	98.32	56.62
	0.2	178.17	165.77	147.43	94.05
	0.3	204.27	180.19	150.74	97.87
1	0.1	73.58	73.77	72.72	52.43
	0.2	115.90	114.54	110.04	76.51
	0.3	117.53	114.42	106.31	67.48

Значение \bar{K}_{IB} (Задача 4)

$\frac{2\pi H^{(1)}}{l}$	$\eta^{(2)}$	$2\pi l_1/L$			
		$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
0.1	0.1	66.55	71.64	84.83	274.80
	0.2	75.02	83.33	100.62	232.06
	0.4	71.71	77.93	89.31	121.37
0.2	0.1	58.48	58.62	58.86	56.23
	0.2	114.81	120.55	136.18	272.83
	0.4	126.88	133.04	147.85	209.56
1	0.1	26.61	26.13	24.78	17.67
	0.2	93.21	93.91	95.72	100.50
	0.4	148.97	149.38	153.40	173.68

В таблицах при различных $2\pi H^{(1)}/l$; $2\pi H^{(2)}/l$; $\eta^{(2)}$ и $2\pi l_1/l$ (где $2H^{(1)}$ – средняя толщина слоя матрицы, $2H^{(2)}$ – толщина слоя наполнителя, $\eta^{(2)}$ – концентрация слоев наполнителей в композите, $2l_1$ – длина трещины, l – длина волны форм искривления срединных поверхностей слоев наполнителя) приведены значения $2K_I / (\sqrt{\pi l_1} \sigma_{11}^{(1),0})$ (где $\varepsilon \cdot K_I$ КИН), с помощью которого, в окрестности кончиках трещин напряжения σ_{22} определяются через следующие формулы

$$\sigma_{22}^{(1)2}(x_1, 0) \approx \frac{\varepsilon K_{IA}}{\sqrt{2(x_1 - l_1)}} \quad \text{при } 0 < x_1 + l_1 < 1,$$

$$\sigma_{22}^{(1)2}(x_1, 0) \approx \frac{\varepsilon K_{IB}}{\sqrt{2(l_1 - x_1)}} \quad \text{при } 0 < l_1 - x_1 < 1. \quad (14)$$

Из хода решения следует, что

$$\begin{Bmatrix} K_{IA} \\ K_{IB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{IA} \\ K_{IB} \end{Bmatrix} \left(H^{(1)}/l, H^{(2)}/l, \eta^2, l_1/l, E^{(2)}/E^{(1)} \right) \quad (15)$$

Это подтверждается данными, приведенными в таблицах которые показывают изменение значений $\bar{K}_I = 2K_I / \left(\sqrt{l_1} \pi \sigma_{11}^{(1),0} \right)$, в зависимости от всех параметров (15) (кроме от $E^{(2)}/E^{(1)}$).

Проведено численное исследование коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на кончиках трещин в зависимости от параметров структуры композита.

Полученные численные результаты позволяют сделать ряд выводов, относящихся к механике изучаемых явлений:

- существуют такие области изменения $2\pi l_1/l$ (где $2l_1$ длина трещин, l — длина волны форм искривления срединной поверхности слоев наполнителя), при которых рассмотренные трещины являются неустойчивыми трещинами;

- размер и местонахождение указанных выше областей зависит от значения параметров $2\pi H^{(2)}/l$ (где $2H^{(2)}$ — толщина слоя наполнителя), $\eta^{(2)}$ (концентрация наполнителя), $E^{(2)}/E^{(1)}$ ($E^{(2)}(E^{(1)})$ - модуль упругости материала наполнителя (матрицы));

- с ростом отношения модулей упругости материала матрицы и наполнителя $E^{(2)}/E^{(1)}$ значение КИН монотонно увеличивается;

Анализ срезов различных композитов показывает, что искривления в структуре однонаправленных композитов довольно часто могут оказаться локальными.

В связи с этим в 1.3 и 1.4 исследуются разрушения композитных материалов с локально искривлёнными слоями. При решении конкретных задач развивается подход, который предложен в предыдущих параграфах. Здесь также найдены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин в зависимости от параметров задач (рис. 3).

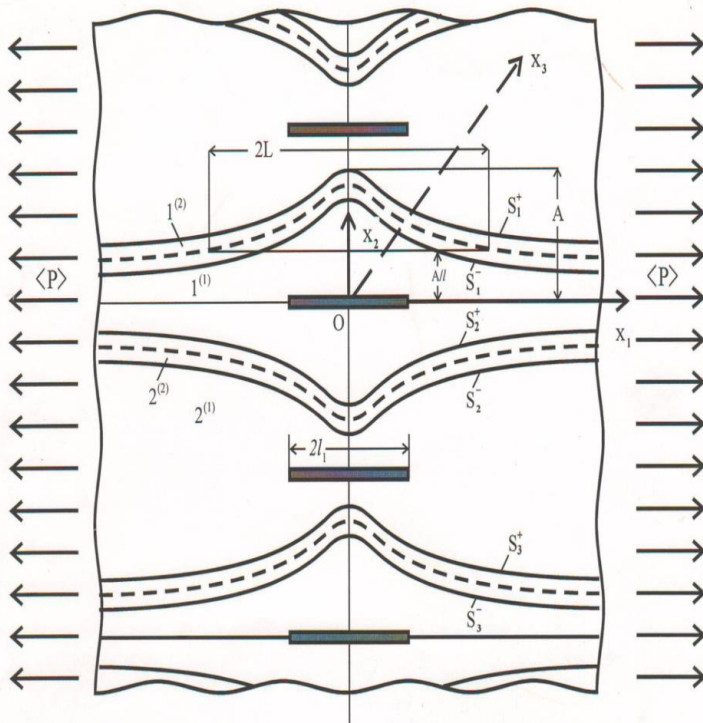


Рис.3. Схема композита с чередующимися антифазно локально искривленными слоями.

В качестве функции, характеризующие локальное искривление слоев наполнителя взята также функция в виде:

$$F(x_1) = A \exp\left(-\left(x_1/L\right)^{2\delta}\right) \cos(mx_1/L) \quad (16)$$

Отметим, что с помощью параметров m и δ , которые входят в выражение (16) можно судить о характерной форме локального искривления, которая часто наблюдается в срезах различных слоистых композитов.

Аналогичным способом в 1.5 исследуется задача об определении коэффициентов интенсивности напряжений с бесконечным рядом продольных трещин в композите с искривленными слоями при плоской деформации.

В главе II разрабатывается теория взаимодействия сплошной среды с дискретной системой, имеющая важно прикладное значение. При этом предложены новые модели, а также построен алгоритм для исследования нестационарного движения цилиндрического и сферического включения, содержащего упруго подвешенную массу в сплошной среде.

В 2.1 исследуется движение жесткого цилиндрического включения, внутри которого упруго подвешена масса.

Предполагается что, цилиндр движется в среде безотрывно (рис.4.)

Рассмотренная задача является плоской. Безвихревое движение среды в акустической постановке описывается уравнением:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (17)$$

где a - скорость распространения звука, φ - потенциал скорости $\vec{\mathcal{G}} = grad\varphi$, $\vec{\mathcal{G}}$ - скорость, Δ - оператор Лапласа. После прохождения волны, если пренебречь переходными явлениями (дифракцией), неподвижное включение в начальный момент оказывается окруженной средой, движущейся в одном направлении с известной скоростью.

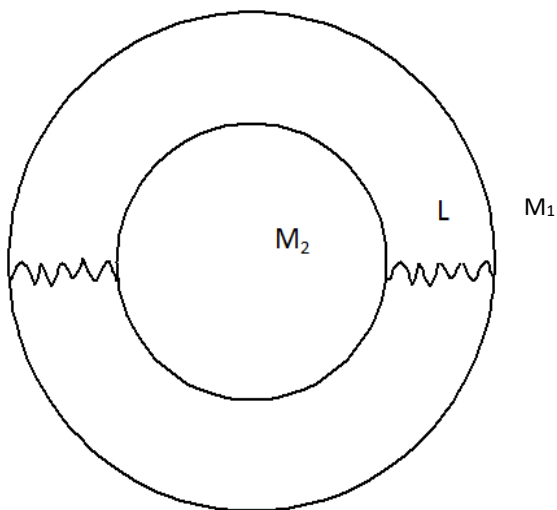


Рис.4

Согласно принципу относительности можно рассматривать среду неподвижной, а включению придать скорость жидкости.

Включение движется по закону

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = P + L(x_2 - x_1) \\ M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -L(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (18)$$

M_1 – масса обоймы, M_2 – масса подпружиненного тела, x_1 – перемещение обоймы, x_2 – перемещение подпружиненного тела, L – жесткость пружины, P – сила воздействия жидкости на включение.

Для цилиндрического включения радиуса r_0

$$P = r_0 \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta, \quad \text{где } p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (19)$$

ρ – плотность, θ - полярный угол.

Условие равенства нормальных составляющих скорости к поверхности обоймы, составляющих скорость жидкостей и обоймы, имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{dx_1}{dt} \cos \theta \quad (20)$$

Таким образом, рассматривается задача для уравнения (17) с граничными условиями (18) с учетом (19) и (20) и начальными условиями

$$\varphi|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (21)$$

Уравнение (17) в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (22)$$

Решение уравнения (22) можно представить в виде:

$$\varphi(r, \theta, t) = \varphi_1(r, t) \cos \theta \quad (23)$$

С учетом выражения для оператора Лапласа соотношение (22) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \varphi_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (24)$$

После преобразования Лапласа-Карсона уравнение (24) в изображениях будет

$$\overline{\varphi_1}'' + \frac{1}{r} \overline{\varphi_1}' - \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \overline{\varphi_1} = 0 \quad (25)$$

Решение уравнение (25) при условии ограниченности на бесконечности имеет вид

$$\overline{\varphi_1} = CK_1 \left(\frac{pr}{a} \right) \quad (26)$$

r - расстояние от центра обоймы, K_1 - функция Макдональда первого порядка.

Учитывая (23), из (19) следует

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cdot \cos \theta$$

$$P = -\rho r_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cdot \pi \quad (27)$$

Уравнения (18) с учетом (27), (20) и (23) примут вид:

$$\begin{cases} M_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial t} + \rho r_0 \pi \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = L(x_2 - x_1) \\ M_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + L(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Последние после преобразования Лапласа –Карсона имеют вид:

$$\begin{cases} pM_1 \left(\overline{\varphi_1}' - \dot{x}_0 \right) + \rho r_0 \pi p \overline{\varphi_1} = L(\overline{x_2} - \overline{x_1}) \\ M_2 (p^2 \overline{x_2} - p \dot{x}_0) + L(\overline{x_2} - \overline{x_1}) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

\dot{x}_0 - начальная скорость включения.

Учитывая (26), из (29) имеем:

$$C = \frac{1}{p} \cdot \frac{-\dot{x}_0}{\frac{1}{a} K_0 - pK_1 \cdot \frac{\rho \pi r_0}{L} + \frac{K_1}{p} \left(-\frac{\rho \pi r_0}{M_2} + \frac{1}{r_0} \right)} \quad (30)$$

K_0 - функция Макдональда нулевого порядка.

Обозначим $\frac{pC(p)}{\dot{x}_0} \rightarrow S(t)$

Учитывая $\frac{C \cdot p}{\dot{x}_0} \cdot \bar{z} = 1$, тогда по теореме Бореля:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t S(t - \tau) z(\tau) d\tau = 1.$$

Отсюда получим:

$$\int_0^t S(t - \tau) z(\tau) d\tau = t + c_1$$

Здесь \bar{z} - оригинал знаменателя в (30).

Известно, что при $t < \frac{r_0}{a}$, $S = 0$, $z = 0$

$$\int_{\frac{r_0}{a}}^t S(t-\tau) z(\tau) d\tau = t + c_1 \quad (31)$$

Учитываем, что при $t = \frac{r_0}{a}$ интеграл равен нулю. В этом

случае C_1 определится, как:

$$c_1 = -\frac{r_0}{a}$$

вводя следующие обозначения:

$$t = \frac{r_0 \theta_1}{a}$$

найдем оригиналы функции $C(p)$ при помощи интегрального уравнения Вольтерра 1 рода:

$$\int_1^{\theta_1} S(\theta_1 - \tau) z(\tau) d\tau = \theta_1 - 1$$

Рассмотрим частный случай. При $\rho = \rho_*$, $M_1 = M_2$, $e = \omega\sqrt{2}$ формула (31) примет вид:

$$-z = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + 2\sqrt{\theta_1^2 - 1} + \frac{\omega r_0}{a\sqrt{2}} \int_1^{\theta_1} \sqrt{\theta_*^2 - 1} \sin \frac{r_0 \omega \sqrt{2}}{a} (\theta_1 - \theta_*) d\theta_* \quad (32)$$

В (рис.5) изображен график зависимостей граничной функции S и потенциала φ от времени при значениях плотности $\rho = 1$ и массы,

колеблющегося тела $m = \frac{1}{M} = 2; 1; \frac{2}{3}; 0,5$ времени при значении

плотности $\rho = 1$ $m = \frac{1}{M} = 2; 1; \frac{2}{3}; 0,5$

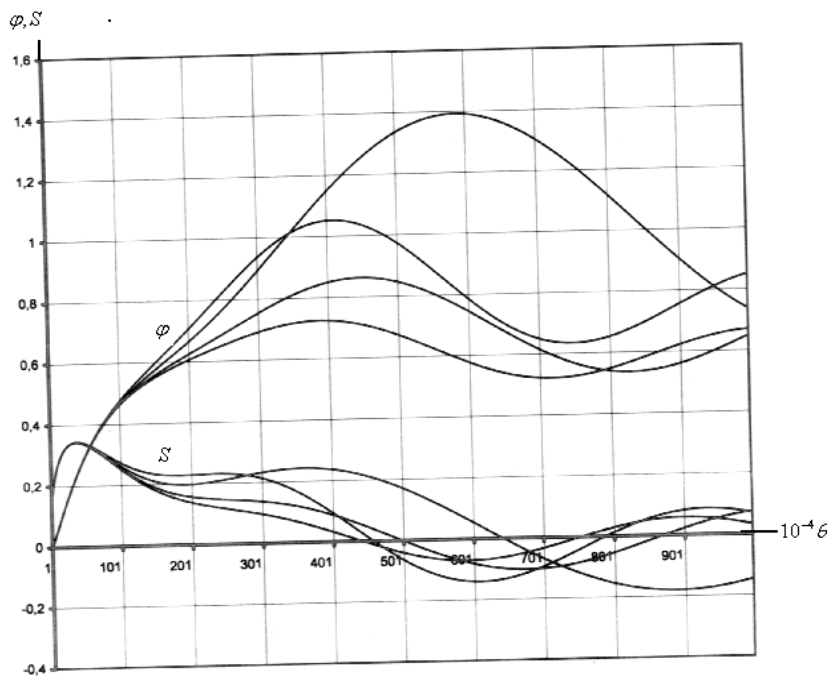


Рис. 5. Графики зависимостей граничной функции S и потенциала φ от

Как видно из графиков, функция S после начального отклонения колеблется с затуханием приближалась к нулю, потенциал же φ с колебаниями приближается к постоянному значению для каждой плотности ρ при различных относительных внутренних массах $\frac{1}{M}$. При уменьшении относительной массы $\frac{1}{M}$ вышеупомянутые функции колеблются с меньшей амплитудой.

В данном параграфе также исследованы свободные колебания вышеописанной системы в акустической среде.

Рассматриваемая задача – плоская; движение жидкости потенциальное. Уравнение движения жидкости представляет собой волновое уравнение (17). В области контакта жидкости к движущимся цилиндрам нормальные составляющие скоростей жидкости и включения равны. Рассматривая гармонические колебания системы, получается трансцендентное уравнение для частот. Задача решается обратным методом, т.е. частота системы без жидкости (осциллятор)

выражается аналитически через частоту основной системы, не решая трансцендентные уравнения.

С целью нахождения собственных частот системы применяется метод разделения переменных. Таким образом, решение уравнения (22) можно представить в виде:

$$\varphi(r, \theta, t) = R(r)e^{i\omega t} \cos \theta \quad (33)$$

а перемещения в виде:

$$x_1 = Be^{i\omega t}; \quad x_2 = Ce^{i\omega t}$$

где B, C - неизвестные, подлежащие определению.

Учитывая (33) в (22), уравнение (22) примет следующий вид:

$$R'' + \frac{1}{r_1} R' + \left(1 - \frac{1}{r_1^2}\right) R = 0 \quad (34)$$

где $r = \frac{a}{\omega} r_1$

Решение уравнения (34) имеет вид:

$$R = EJ_1\left(\frac{\omega r}{a}\right) + DN_1\left(\frac{\omega r}{a}\right) \quad (35)$$

где E, D - неизвестные, подлежащие определению. Здесь

$J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right), N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)$ - цилиндрические функции Бесселя и Неймана.

Подставляя (33) в (18) и в (20), с учётом (19) получим систему алгебраических однородных уравнений относительно постоянных E, B, C, D :

$$\begin{cases} (M_1\omega^2 - L)B + \rho r_0 \pi R i \omega + LC = 0 \\ LB + C(M_2\omega^2 - L) = 0 \\ R' - i\omega B = 0 \\ R' = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Для существования нетривиального решения системы (36) приравняем к нулю главный определитель названной системы. В результате получим частотное уравнение:

$$J_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) (M_1 M_2 \omega^4 - L_2 \omega^2 (M_1 + M_2)) -$$

$$\begin{aligned}
& -J_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) \left(M_1 M_2 \omega^4 - L_2 \omega^2 (M_1 + M_2) \right) - \\
& -J_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) \rho \pi r_0 (M_2 \omega^2 - L) \omega^2 = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\frac{L}{M_1} = k_1^2, \quad \frac{L}{M_2} = k_2^2, \quad \frac{L}{\rho r_0^2 \pi} = k_0^2, \quad m = \frac{\rho \pi r_0}{M_1}$$

Тогда уравнение (37) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \left(-J_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) \right) \left(\omega^4 - \omega^2 (-2k_3^2) + k_1^2 k_2^2 \right) - \\
& - m \frac{1}{r_0} \left(\omega^4 - \omega^2 k_2^2 \right) = 0 \\
& J_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) \left(\omega^2 - k_1^2 - k_2^2 \right) - J_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) \left(\omega^2 - \right. \\
& \left. - k_1^2 - k_2^2 \right) - J_1' \left(\frac{\omega r_1}{a} \right) N_1' \left(\frac{\omega r_0}{a} \right) m \frac{1}{r_0} \left(\omega^2 - k_2^2 \right) = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

Переходя к безразмерным величинам:

$$\frac{\omega r_0}{a} = \bar{\omega}, \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 r_0}{a}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 r_0}{a}, \quad \bar{k}_0 = \frac{k_0 r_0}{a}, \quad \frac{\omega r_1}{a} = \bar{\omega}_1$$

В итоге уравнение (38) примет следующий вид:

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \tag{39}$$

При решении трансцендентного уравнения часто авторы прибегают к приближенным методам, в частности к асимптотическим. Однако, решение обратной задачи позволяет строить спектр графиков, что упрощает исследование, в том числе определение частоты.

При некоторых значениях параметров задачи на интервале 0–250 для \bar{k} и 0–0,6 для $\bar{\omega}$ построены графики $\bar{k} - \bar{\omega}$ (рис.6,) где $\bar{\omega} = A$
 $\bar{k} = X(A)$, $b = 2$, $m = 1$, $c = 10$,

$$\begin{aligned} \bar{k} &= Y(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 20, \\ \bar{k} &= Z(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 30, \\ \bar{k} &= N(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 40, \end{aligned}$$

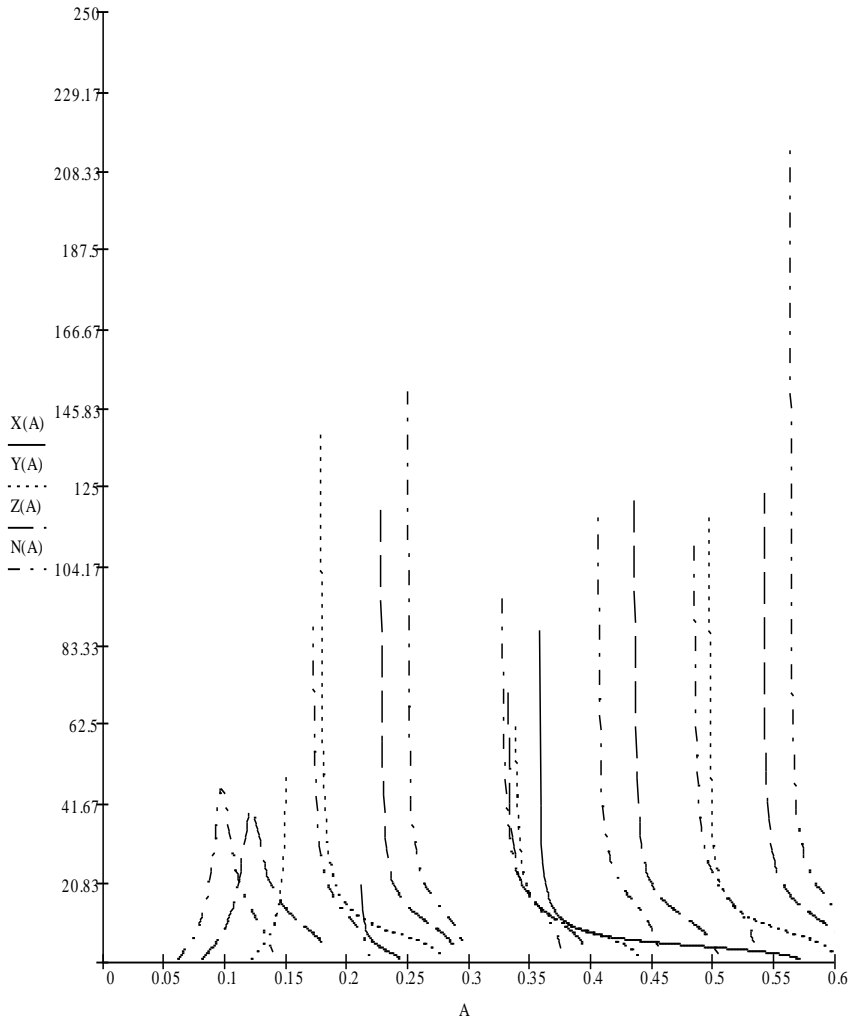


Рис. 6. График зависимости частоты осциллятора \bar{k} от частоты системы $\bar{\omega}$.

Из рисунка видно, что на первой моде с увеличением $\bar{\omega}$, \bar{k} - увеличивается. На последующих модах с увеличением $\bar{\omega}$, \bar{k} - уменьшается. Это может объяснить встречным движением цилиндра и среды. Число кривых, предворяющих рассматриваемую кривую, соответствует числу узлов волны в среде.

Как видно, из рисунка б графики различных мод колебаний имеют вертикальные асимптоты, абсциссы которых отвечают узловым поверхностям стоячей волны. Чтобы определить частоты колебаний системы $\bar{\omega}$ при заданной частоте колебаний осциллятора \bar{k} на графике $\bar{k} - \bar{\omega}$ (рис.б) проводится горизонтальная прямая линия с ординатой \bar{k} и, измерив абсциссу точек пересечения этой горизонтальной линии с ветвями графика $\bar{k} - \bar{\omega}$, получим величины $\bar{\omega}_k$, посредством которых можно вычислить значения $\omega_k = \frac{\bar{\omega}_k a}{r_0}$

спектра частот собственных колебаний системы.

Кроме того, в параграфах 2.2-2.7 аналогичным способом исследованы свободные колебания цилиндрических, сферических и конических включений, содержащих упруго-подвешенную массу, находящиеся в сплошной среде. Исследованы также свободные колебания концентрических цилиндров и сфер, имеющиеся между ними жидкостями и закреплёнными эластично.

Выведены уравнения частоты для всех задач, проведены вычисления, построены графики зависимости между частотой системы и частотой осциллятора.

Рассмотрена задача о движении жесткого цилиндра, сохраняющего вертикальное положение под действием набегающих поверхностных волн в жидкости. Задача решается операционным методом. Знаменатель изображения представляет собой табличную функцию. Используется интегральное уравнение Вольтера первого рода, которое решается численным методом.

В главе III исследуются некоторые задачи динамики цилиндрических и сферических оболочек, контактирующих со сплошной средой.

В 3.1 рассматриваются свободные колебания тонкостенной конечной длины цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую жидкость.

Уравнения радиальных колебаний цилиндрических оболочек имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \varphi^2} = \frac{\rho r^2 (1-\mu^2)}{2Eh} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \cdot (1+\beta^2) \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} + \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{\beta^3}{3} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \varphi^3} - \frac{3-\mu}{2} \cdot \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \varphi} = \\
 & = \frac{\rho r^2 (1-\mu^2)}{2Eh} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} \\
 & \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi} - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial \varphi^3} - \frac{2-\mu}{3} \cdot \beta^2 \cdot \frac{\partial^3 \mathcal{G}}{\partial \varphi \partial \xi^2} - \\
 & - \frac{2}{3} \cdot \beta^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^2 \partial \xi^2} - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - W - \frac{\beta^2}{3} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4} = \\
 & = \frac{r^2 (1-\mu)^2}{2Eh} \cdot \left(\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - p \right)
 \end{aligned} \tag{40}$$

Полагая движение жидкости потенциальным, и пренебрегая конвективными членами в уравнениях движения жидкости, можно принять

$$p = -\rho_* \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{41}$$

ρ_* - плотность жидкости, Φ - потенциал скорости жидкости.

Динамика жидкости рассматривается в акустической постановке.

В случае потенциального движения жидкости имеем только одно скалярное волновое уравнение для описания поля скоростей

$$\Delta \Phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{42}$$

где a - скорость распространения звука.

Рассматривается опёртая оболочка по двум параллельным кругам $\xi = 0$, $\xi = \frac{\ell}{r}$. В этом случае, учитывая скольжение на опоре,

отсутствие деформации и изгибающего момента, будем иметь условия

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \mathcal{G} = 0, W = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{Тогда решение системы уравнений}$$

(40) и (42) соответственном может быть представлено в виде:

$$u = A \cos m v \xi \sin n \varphi \sin \omega t$$

$$\mathcal{G} = B \sin m v \xi \cos n \varphi \sin \omega t \quad (43)$$

$$W = C \sin m v \xi \sin n \varphi \sin \omega t$$

$$\Phi = D(r) \sin m v \xi \sin n \varphi \cos \omega t \quad (44)$$

Применяя метод, предложенный в главе II, получено уравнение, которое связывает частоту свободного колебания системы с частотой оболочки в отсутствие жидкости. Решение обратной задачи позволяет строить спектр графиков, что упрощает исследование, в том числе определение частоты. Приведен численный анализ задачи. При некоторых значениях параметров системы определяются собственные частоты колебаний, а также исследуются влияние плотности и размера на частоту свободных колебаний цилиндра. Здесь также исследованы свободные радиально осесимметрические колебания тонкостенной бесконечной цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемой жидкость.

В результате получено частотное уравнение:

$$J_1 \frac{\omega}{a} \left(\frac{1}{R^2} + b^2 R^2 - \frac{v^2}{R^2} \right) - J_1 \frac{\omega}{a} \frac{1-v^2}{E} \rho \omega^2 + \frac{1-v^2}{Eh} \rho_c \omega^2 J_0 = 0 \quad (45)$$

Обозначим частоту свободных колебаний оболочки без жидкости через ω_0 . Тогда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega^2 J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) \rho h - \rho_c J_0 \left(\frac{\omega R}{a} \right) a \omega}{J_1 \left(\frac{\omega R}{a} \right) h \rho}} \quad (46)$$

Уравнение (46) связывает свободную частоту системы со свободной частотой оболочки в отсутствие жидкости. При некоторых значениях параметров задачи построены графики (рис.7).

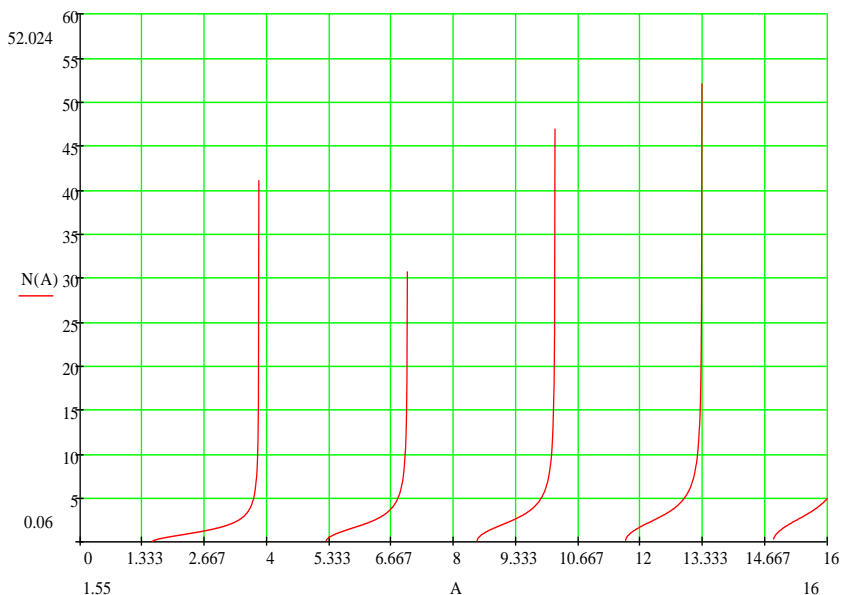


Рис. 7. Зависимости частоты колебаний не содержащей жидкость оболочки $N(A)$, частоты колебаний системы.

Из графиков видно, что с увеличением жёсткости оболочки частота системы оболочка-жидкость возрастает сначала по закону близкому к линейному, затем рост замедляется и частота системы асимптотически приближается к постоянной величине равной частоте колебаний жидкости в абсолютно жесткой границе.

В 3.2 аналогичным методом исследуется задача о свободных колебаниях тонкостенной упругой сферической оболочки содержащей упругую среду с отличающимися свойствами, обычно с модулем упругости значительно меньшим модуля упругости материала оболочки. Известные решения в этой области получены численными методами или представляют собой асимптотические решения для мод высоких порядков. Здесь строится точное аналитическое решение задачи представляющее зависимость частоты оболочки без заполнителя от частоты заполненной оболочки. Результат демонстрируется в виде двух кривых спектра.

В параграфе 3.3 исследованы свободные колебания упругой цилиндрической оболочки содержащей жидкость с свободной поверхностью.

Здесь рассматривается цилиндр, стоящий на гладкой плоскости.

При движении цилиндра его образующие сохраняют параллельность. Движение жидкости в цилиндре описывается теорией длинных волн.

Задача решается обратным методом. Этот метод позволяет анализировать спектр кривых $\omega_0(\omega)$ и при необходимости определить параметры конструкции обеспечивающие нужные частоты системы не прибегая к решению трансцендентных уравнений, которые необходимо решать при прямой задаче.

В параграфах 3.4 и 3.5 исследованы свободные колебания сферической оболочки, содержащей сжимаемую жидкость, а также свободные колебания двух концентрически расположенных цилиндрических оболочек с жидкостью между ними. В обоих случаях для решения задач использован обратный метод. При некоторых значениях параметров системы определяются их собственные частоты колебаний, а также исследуется влияние геометрических и физических параметров системы на частоты свободных колебаний оболочки.

В параграфе 3.6 с помощью вариационного принципа решена задача о свободном колебании продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построено частотное уравнение колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью и реализовано численно. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье-Стокса.

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственно оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта продольных ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние обшивки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша.

Построены графики зависимости параметра частоты колебаний от числа продольных стержней для различных отношений модулей упругости.

Счет показывает, что, учет вязкости материала жидкости приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению, когда жидкость идеальная. Кроме того, с увеличением отношений $\frac{E_1}{E_2}$ частоты собственных колебаний системы

увеличиваются. С увеличением количества продольных ребер частот собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем, при определенных значениях k_1 , начинает уменьшаться. Это объясняется тем, что при увеличении k_1 , влияние инерционных действий стержней на процесс колебаний системы становится существенными.

С помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона в параграфе 3.7 решается также задача о параметрическом колебании продольно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью под действием внешнего давления. Изучается влияние модулей упругости материала оболочки, повреждаемости, количества ребер, используемых при подкреплении оболочки на частоты системы.

В заключительной части диссертации приводятся основные выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе модели кусочно–однородного тела с привлечением точных уравнений линейной теории упругости предложен метод и решен ряд задач по определению коэффициента интенсивности напряжений в композитах с чередующимися антифазно периодически искривленными слоями, содержащими в себе трещины конечной длины. Этот подход был также использован в задачах по построению алгоритма численного исследования КИН в вершинах конечных трещин в композитах с локально искривленными слоями. При этом предполагается, что композитный материал подвержен действию только одноосного растяжения–сжатия вдоль направления армирования, а берега трещины параллельны к направлению действия внешних усилий. Проведено численное исследование КИН на кончиках трещин в зависимости от параметров структуры композита. Установлено, что:

- с ростом отношения модулей упругости материала матрицы и наполнителя $E^{(2)}/E^{(1)}$ значения КИН монотонно увеличиваются;
- значения КИН немонотонно зависят от концентрации наполнителя (т.е. от $\eta^{(2)}$) в композите;
- за счет взаимовлияния между коллинеарными трещинами зависимости значения КИН от $2\pi l_1/l$ (где $2l_1$ длина трещины, l – длина волны форм искривления) при различных $\eta^{(2)}$ и $2\pi H^{(2)}/l$ имеет различный характер;
- влияние изменения параметра δ оказалось незначительным;

2. Разработана теория взаимодействия сплошной среды с дискретной системой. Предложены новые модели, а также построен алгоритм для исследования нестационарного движения цилиндрического и сферического включения, содержащего упруго подвешенную массу в сплошной среде. Вычислены и проиллюстрированы граничные функции, потенциалы и перемещения в зависимости от времени. Установлено, что:

- при нестационарном движении возникают как затухающие гармонические колебания осциллятора так и ангармонические колебания;
- Показано, что граничная функция возрастает начиная с нуля и совершает затухающие колебания;

3. Разработан обратный метод для исследования собственных

колебаний цилиндрических и сферических включений, содержащих упруго–подвешенную массу в сплошной среде. Построены зависимости между частотами колебаний системы и частотами колебаний упруго закрепленного включения при отсутствии влияния окружающей среды. С помощью этого метода исследованы также свободные колебания эластично закрепленных концентрических сфер, и заключенная между ними жидкостью. В результате исследований установлено:

- обратный метод, позволяет строить спектр графиков, которые упрощают исследование, в том числе при определении частот;
- построен график зависимости частоты осциллятора \bar{k} от частоты системы $\bar{\omega}$. Установлено, что на первой моде с увеличением $\bar{\omega}$, \bar{k} увеличивается. На последующих модах с увеличением $\bar{\omega}$, \bar{k} уменьшается. Это связано с эффектами встречного движения цилиндрического включения и среды. Различные моды колебаний имеют вертикальные асимптоты, абсциссы которых отвечают узловым поверхностям стоячей волны;
- зная влияние упругого закрепления на собственную частоту системы, можно установить характер жесткости закрепления конструкции для предотвращения возможного резонанса в условиях вибрации;
- с уменьшением жесткости пружины включение сопутствует движению среды, чем и увеличивается частота собственных колебаний системы.

4. С помощью обратного метода исследованы свободные колебания тонкостенных цилиндрических и сферических оболочек заполненных средой. Кроме того, исследованы свободные колебания цилиндрической оболочки, содержащей жидкость со свободной поверхностью. В этих задачах была найдена связь между частотой свободных колебаний оболочки при отсутствии среды с частотой свободных колебаний системы. Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- с увеличением жесткости оболочки частота системы «оболочка – среда» возрастает по закону, близкому к линейному, затем рост замедляется и частота системы асимптотически приближается к постоянной величине, равной частоте колебаний среды в абсолютно жесткой границе. Графики последующих мод начинаются с некоторой величины жесткости оболочки. Другими словами, частота системы сначала меняется медленно, затем следует закону по характеру

аналогичному первой моде.

- при свободном колебании сферической оболочки, заполненной жидкостью, частота системы нарастает асимптотически до некоторого постоянного значения, однако при больших скоростях волн в жидкости частота приближается к постоянному значению при больших величинах частоты оболочки;

5. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона построено частотное уравнение колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Исследовано влияние вязкости жидкости, свойства материала оболочки, и количество продольных ребер на процесс колебания рассмотренных конструкций. Установлено, что:

- учет вязкости материала жидкости приводит к снижению частоты собственных колебаний системы по сравнению со случаем, когда жидкость рассматривается как идеальная;

- с увеличением отношения модулей упругости оболочки частоты собственных колебаний системы увеличиваются;

- с увеличением количества продольных ребер частота колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенных значениях k_1 , начинает уменьшаться. Это объясняется тем, что при увеличении k_1 влияние инерционных сил стержней на процесс колебаний системы становится существенным;

6. На основе вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании продольно подкрепленной поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью. Численно установлена зависимость параметра частоты колебания системы от числа продольных стержней при различных отношениях модулей упругости. Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- повреждаемость материала оболочки приводит к снижению частоты собственных колебаний системы по сравнению со случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной;

- частоты собственных колебаний системы увеличивается с увеличением отношения модулей $\frac{E_1}{E_2}$.

Автор искренне благодарит своего научного консультанта, д.ф.м.н проф. Джафара Гасанага оглы Агаларова за постоянное внимание и ценные советы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Akbarov S.D., Maksudov F.G., Panakhov P.I., Seyfullayev A.I. On the crack problems in composite materials with curved layers Int. J.Enging. Sci. 1994, v.32, №6, p.1003-1016.
2. Сейфуллаев А.И., Тагиева Р.Д. Задача о двойки периодически расположенных в композите с искривленными структурами. К 50-летию АНА, Тр. респ. конф. по мат. и мех. Баку, ч.1, 1995, с.183-185.
3. Агаларов Д.Г., Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А. Движение включения с подпружинной массой в акустической среде. Труды ИММ АНА Баку, 1997, т.6. с.204-207.
4. Сейфуллаев А.И., Агаева Н.А. Решение задачи о движение сферического включения с подпружинной массой в акустической среде. Изв.АНА т.XVIII, 1998, №2, с.133-135.
5. Seyfullayev A.I. Boundary crack in two-layer half-plane. 4 Ulusal kirilma konf. bildiri-leri, 1999, p.64-68
6. Seyfullayev A.I. On the braking problem of the central crack in the three-layer medium. Proceedings of the 5th Inter. fracture conf. Elazing-Turkey 2001, p.118-123.
7. Сейфуллаев А.И., Агаева Н.А. Определение перемещения сферического включения с осциллятором в упругой среде. Механика – машина – строение, 2002, №3-4, с.23-25.
8. Seyfullayev A.I., Ağaeva N.A. Motion of elastically supported spherical inclusion in acoustic medium. Proceeding of IMM of NAS of Azerb. 2004, vXX., p189-192.
9. Сейфуллаев А.И., Рустамова М.А. Исследование свободных колебаний сферического включения содержащего повешенную массу находящегося в акустической среде. АМЕА–nın müx-bir üzvü, prof. İ.T. Məmmədov-un anadan olmasının 50-illiyinə həsr olunmuş riyaziyyat və mexanika üzrə Beynəlxalq konfransın TEZİSLƏRİ, 2005, с.175.
10. Сейфуллаев А.И., Рустамова М.А. Исследование свободных колебаний упругой среды со сферическим включением, содержащим упруго-повешенную массу. Механика машиностроение Баку, 2005, №4, с.22-25.
11. Seyfullayev Ə.İ, Ağayeva N.A. Elastiki dayaqlı yayla bərkidilmiş kütləyə malik sferik daxilətmənin akustik mühitdə hərəkəti. Механика-машиностроение, 2005, № 4, с.38-39.
12. Seyfullayev Ə.İ., Məmmədova G.A., Elastiki bərkidilmiş kütləyə malik silindrik daxilətmənin akustik mühitdə sərbəst rəqsləri. Механика-

машиностроение. 2005, № 1, s.27-29.

13. Seyfullayev A. I. A problem of fracture mechanics for composite materials with locally curved layers “Mechanics of Composite Materials”, Vol. 42, No. 1, 2006, p.75-86

14. Сейфуллаев А.И., Панахова Н.Д. Исследование обратной задачи о свободных колебаниях упруго закрепленного цилиндра в идеальной сжимаемой жидкости. Доклады, НАНА, 2007, №5, стр.33-41.

15. Seyfullayev Ə.İ., Eunatollah A. Taheri. Tərkibində silindrik daxiletmənlə olan elastiki mühitin sərbəst rəqslərinin tədqiq. “Riyaziyyat, mexanika və informatikanın müasir problemləri” beynəlxalq simpoziumun tezləri, 2007, s. 34.

16. Сейфуллаев А.И., Рустамова М.А. Исследование радиально осесимметрических колебаний цилиндрической оболочки заполненной сжимаемой жидкостью обратным методом. Механика-машиностроение, 2009, №3. с.37-40.

17. Сейфуллаев А.И., Панахова Н.Д. Свободные колебания стержня в жидкости со свободной поверхностью. Новые технологии, Москва-2009, №2, с.4-7.

18. Сейфуллаев А. И., Гасанов Э.А. Движение вертикально расположенного цилиндра в жидкости со свободной поверхностью под действием волн. Elmi əsərlər-Fundamental elmlər 2011, №4 cild X(40)

19. Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А., Рустамова М. А. Юзбашиева А.О. Анализ свободных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек содержащих сжимаемую жидкость. Инженерно-физический журнал, Том.85, №6, 2012. Минск, стр.1312-1317.

20. Akhundov M.B., Seyfullayev A.I., Hasanova L.A. Long term strength under cyclic loading. World Applied Science Journal. 2013, 28(11) p.1767-1771.

21. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them. International journal of engineering and Innovative Technology (IJEIT), volume 3, Issue 10, India, 2014, p.33-37.

22. Сейфуллаев А. И., Новрузова К. А. Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью. Восточное-Европейский журнал передовых технологий №3/7(75), 2015, p.29-33.

23. Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А., Агасиев С.Р. Влияние скорости волн в заполняющая сферическую оболочку жидкости на частоту колебаний системы. Austrian Journal of Technical and Natural

- Sciences, «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. №5-6, p.95-99, Austria,Vienna 2015.
24. Seyfullayev A.I., Alimamedov R.K. Parametric oscillation of longitudinal damaged orthotropic cylindrical stiffened skin filled with viscous fluid. Journal of Qafqaz University, Mechanical Industrial Engineering, An International Journal, ISSN 2310-9041. Vol. 3. №2, Баку-2015, p. 149-157.
25. Сейфуллаев А.И., Агаларов Г.Д. Свободные колебания сферической оболочки с упругим наполнителем. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015, №3, с.74-80.
26. Seyfullayev A.İ., Alimammadov R.G. Parametric oscillations of a longitudinally stiflened, ortotropic, damaged viscous fluid-filled cylindrical shell. International Scientific Conference, Azerbaijan-Turkey –Ukrainian, Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, MADEA-7, Baku, September 08-13, səh.155, 2015.
27. Seyfullayev A.İ. Agalarov C.H. An influence of shell hardness on the free vibrations of spherical shell with an elstic filler. International Scientific Conference, Azerbaijan-Turkey –Ukrainian, Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, MADEA-7, Baku, September 08-13, səh.7., 2015.
28. Seyfullayev A.İ., Mamedova G.A. Investigation of the Movement of a Mass Loaded Spring on Insertion in an Acoustic Medium. International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication -IJRITCC V. 4, Issue 4, P.194 – 204, India, 2016/4/16.
29. Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А., Агасиев С.Р. Свободные колебания упругой цилиндрической оболочки, содержащей жидкость со свободной поверхностью. Вестник современной наук, Волгоград, 2016, Т 13, №1, с. 22-25.
30. Seyfullayev A. I., Rustamova M.A., Kerimova Sh. A. Problem of the mechanics of fatigue fracture of a two-layer material with edge cracks. “Mechanics of Composite Materials”, Vol. 53, No. 3, 2017. p.415-424.
31. Агаларов Дж.Г., Сейфуллаев А.И., Рустамова М.А. Движение вертикально расположенного цилиндра в результате волн на поверхности жидкости. “Вестник современной науки”. 2017. № 2 (26), с.7-15.
32. Сейфуллаев А.И., Мамедова Г.А., Гулиев М.С. Исследование свободных колебаний упругих систем жидкости обратным методом. “Вестник современной науки”. Волгоград, 2017. № 2-1 (26). С. 20-31.

ƏLİZADƏ İMAMƏLİ oğlu SEYFULLAYEV

**QEYRİ - BİRCİNS MÜHİTLƏRİN DAĞILMA
MEXANİKASI VƏ DİNAMİKA MƏSƏLƏLƏRİ**

XÜLASƏ

Bircins olmayan mühitlərin dağılmasına və dinamikasına aid məsələlər bərk cisim mexanikasının aktual problemlərindən biridir. Bu məqsədlə, dissertasiya işində qeyribircins mühitlərin dağılmasına və dinamikasına aid çoxsaylı məsələlər tədqiq olunmuşdur.

Dissertasiya işinin birinci fəslində hissə-hissə bircins cisim modeli əsasında elastikiyyət nəzəriyyəsinin dəqiq tənliliklərini tətbiq etməklə, periodik və məhəlli əyriliyə malik kompozit materiallarda çat məsələlərinin tədqiq edilməsi üçün üsul təklif edilir. Təklif olunan üsul konkret məsələlərin həllinə tətbiq etməklə izah edilir. Bu halda qəbul olunmuşdur ki, çatlar əlaqələndirici layların ən təhlükəli hissələrində yerləşir və çatların kənarları yükləmə istiqamətinə paraleldir.

Dissertasiyanın ikinci fəslində diskret sistemlə bütöv mühitin birgə hərəkətinin tədqiqinə həsr olunub. Burada yayla bərkidilmiş kütləyə malik dairəvi daxiletmələrin qeyri-stasionar və sərbəst rəqsləri öyrənilib. Sürət və elastiki potensiallar, yerdəyişmələr təyin olunub, sistemin sərbəst rəqslərinin məxsusi tezlikləri tərs üsulla hesablanmışdır.

Dissertasiyanın üçüncü fəslində bütöv mühitlə təmasda olan silindrik və sferik örtüklərin sərbəst rəqslərinin tədqiqinə həsr olunub. Bu halda sistemin sərbəst rəqslərinin tezliyinə parametrlərin təsiri araşdırılmışdır.

ALIZADE IMAMALI oqlu SEYFULLAEV

**PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS AND DYNAMICS OF
INHOMOGENEOUS MEDIA**

SUMMARY

Problems of fracture and dynamics of nonhomogeneous media are urgent problems of solid mechanics. In this dissertation work we consider numerous problems of fracture and dynamics of nonhomogeneous media.

In the first part of the work, based on piecewise - homogeneous body model we apply exact equations of elasticity theory and offer a method for studying cracking problems of composite materials with periodic and local curvature.

The offered method is explained by applying it to the solution of specific problems. In this case it is accepted that the cracks are at the very dangerous part of binding course and the crack ends are parallel to the loading direction.

The second part of the work is devoted to study of joint action of discrete system and continuum. Here nonstationary and free vibrations of circular inclusions with spring - supported mass were studied. Velocity and elastic potentials, displacements were determined, eigen frequencies of the system were calculated by the inverse method.

The third part studies free vibrations of continuum – contacting cylindrical and spherical shells. The influence of parameters on frequency of free vibrations were studied.