НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АЙНУР НИЗАМАДДИН кызы САФАРОВА

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

1211.01–Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора философии по математике

Баку – 2018

Работа выполнена в отделе **«Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.**

Научный руководитель: Член- корреспондент НАН Азербайджана,
д.ф.-м.н., профессор **Мисир Марданов**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,
профессор **Акпер Алиев**
Доктор физико-математических наук,
профессор **Ибрагим Набиев**

Ведущая организация: Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности кафедра «Общая и прикладная математика».

Защита диссертации состоится 12 октября 2018 г. в 14^{00} часов на заседании разового диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 10 июля 2018 года.

Учёный секретарь
Диссертационного Совета
Д.01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Обратными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи нахождения неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений, правой части, граничных или начальных условий, границы области. Неизвестные элементы начально-краевых задач определяются по некоторой дополнительной информации о решении уравнений. Такой информацией являются различного рода условия переопределения. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики в настоящий момент играют большую роль в естественных науках и их приложениях. Коэффициентные обратные задачи – это задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения неизвестным является и один (или несколько) из его коэффициентов. Многие важные прикладные вопросы, касающиеся диффузионных процессов, электромагнитных колебаний, упругих деформаций, геофизики, сейсмологии, компьютерной томографии и обработки изображений, теории рассеяния, акустики, оптики, теории колебания молекул, радиолокации, гравиметрии, и др. приводят к подобным обратным задачам .

Обратным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными посвящены работы следующих авторов: Тихонов А.Н., Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Аниконов Ю.Е., Денисов А.М., Калиев И.А., Камынин В.Л., Костин Д.В., Кожанов А.И., Прилепко А.И., Cannon J.R., Искендеров А.Д., Худавердиев К.И., Намазов Г.К.,Иванчов Н.И., Ахундов А.Я., Амиров А.Х., Мегралиев Я.Т., Karimov N.B., Айда-заде К.Р., Ismailov M.I., Кулиев М.А., Исмаилов А.И. и др.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью.

Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появляются при математическом моделировании явлений, связанных с физической плазмой, распространением тепла, процессом влагопереноса в капиллярно - простых средах, вопросами демографии и математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Среди работ, в которых исследованы смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений, можно отметить статьи Е.И.Моисеева, Г.Д. Гордезиани и Г.А. Авалишвили, А.И. Кожанова .

К необходимости изучения задач с нелокальными интегральными условиями, приводят например, коэффициентные обратные задачи. Прикладная важность обратных задач настолько велика (они возникают в самых различных областях человеческой деятельности: сейсмологии, разведке полезных ископаемых, биологии, медицине, контроле качества промышленных изделий и т.д.), что ставит их в ряд актуальнейших проблем современной математики.

Диссертационная работа посвящена исследованию существования и единственности классического решения нелинейных обратных краевых задач с нелокальными краевыми условиями параболического уравнений второго порядка в ограниченной области в случае неизвестных коэффициентов, зависящих от времени. Следовательно, тема диссертационной работы, посвященная обратным краевым задачам для параболического уравнений второго порядка, актуальна.

Цель работы. Основной целью работы является исследование вопросов разрешимости нелинейных обратных задач для параболического уравнений второго порядка с нелокальными краевыми условиями в ограниченной области, в случае неизвестных коэффициентов , зависящих от времени.

Методы исследования. Для исследования рассматриваемых задач используется метод сведения дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному уравнению. Далее, для нахождения его решения применяются метод разделения переменных и принцип сжатых отображений. В работе используются методы теории функций и функционального анализа, дифференциальных уравнений, спектральной теории дифференциальных операторов.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и имеют строгое доказательство.

Практическая и теоретическая ценность. Полученные результаты имеют теоретическую значимость и могут быть использованы при построении общей теории обратных задач.

Основные результаты. В диссертации получены следующие основные результаты:

- доказана теорема существования и единственности классического решения обратных краевых задач для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями ;
- доказана теорема существования и единственности классического решения обратных краевых задач для параболического уравнения второго порядка с интегральным условием второго рода;
- доказана теорема существования и единственности классического решения обратных краевых задач для параболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах отделов «Дифференциальные уравнения», «Оптимальное управление», «Функциональный анализ» Института Математики и Механики НАН Азербайджана, на семинарах кафедр «Дифференциальные и интегральные уравнения», «Математические методы оптимального управления» БГУ, на международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики (ИММ,2014), на республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной 92-летию со дня рождения общенационального лидера азербайджанского народа Гейдара Алиева(БГУ,2015), на республиканской научной конференции «Функциональный анализ и его применения», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.Ш.Габибзаде (БГУ,2016), на республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» , посвященной 100-летию со дня рождения член.-корр.НАНА, проф. Г.Т.Ахмедова(БГУ,2017).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 72 наименования. Объем работы 117 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Теперь перейдем к краткому описанию содержания данной диссертации, состоящей из введения и трех глав.

Во введении дается краткий обзор работ по тематике диссертации, обосновывается актуальность темы диссертации, приводятся основные результаты работы и даётся их сравнение с другими работами.

В первой главе диссертации, состоящей из четырех разделов, исследуется классическая разрешимость обратных краевых задач для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями, содержащего производную третьего порядка.

В разделе 1 главы I рассмотрена для уравнения

$$a_1(t)u_t(x,t)+a_0(t)u(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратная краевая задача с нелокальным начальным условием

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x) \quad (0\le x\le 1)\ , \qquad (2)$$

граничным условием Дирихле

$$u(1,t)=0 \quad (0\le t\le T)\ , \qquad (3)$$

неклассическим краевым условием

$$u_{xxx}(0,t)-b\,u_{xx}(0,t)+a\ u_x(0,t)=0\ (0\le t\le T) \qquad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \qquad (5)$$

где $x_0\in(0,1), a>0, b>0,\ \delta\ge 0$-заданные числа, $a_1(t)>0$, $f(x,t),\ \varphi(x),\ h(t)$-заданные функции, а $u(x,t)$ и $a_0(t)$- искомые функции.

Определение 1.1. *Классическим решением задачи (1)-(5) назовём пару* $\{u(x,t),a_0(t)\}$ *функций* $u(x,t)$ *и* $a_0(t)$*, обладающих следующими свойствами:*

1) функция $u(x,t)$ *непрерывна в* D_T *вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и условие (4) ;*

2) функция $a_0(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$*;*

3) все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма1.1. *Пусть* $\delta\ge 0,\ 0<a_1(t)\in C[0,T],\ \ \varphi(x)\in C[0,1]$, $f(x,t)\in C(D_T)$, $h(t)\in C^1[0,T],\ h(t)\ne 0\ \ (0\le t\le T)$ *и выполняется условие согласования*

$$\varphi(x_0)=h(0)+\delta h(T). \qquad (6)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ *и* $a_0(t)$*, обладаю-*

щих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)-(5), из соотношений (1)-(4) ,

$$a_1(t)h'(t)+a_0(t)h(t)=u_{xx}(x_0,t)+f(x_0,t)\ \ (0\le t\le T). \qquad (7)$$

В разделе 2 главы I рассматривается спектральная задача

$$y''(x)+\lambda\ \ y(x)=0,\quad 0\le x\le 1$$

$$y(1)=0,\ (a-\lambda)y'(0)+\lambda b y(0)=0,\ a>0,\ b>0,$$

которая имеет только собственные функции

$y_k(x)=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}(1-x)\right),\quad k=0,1,2....$ с положительными собственными числами из уравнения $tg\sqrt{\lambda}=(a-\lambda)/(b\sqrt{\lambda})$. Нулевой индекс присваивается любой собственной функции, а все остальные нумеруются в порядке возрастания собственных чисел.

В разделе 3 главы I исследованы существование и единственность классического решения обратной краевой задачи.

Предполагается, что данные задачи (1)-(4), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1.1. $\varphi(x)\in C^3[0,1], \varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,1), \varphi(1)=0$,

$$J(\varphi)\equiv b\left(\varphi(0)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1\varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-\varphi'(0)=0,$$

$$\varphi''(1)=0, \varphi'''(0)-b\varphi''(0)+a\varphi'(0)=0.$$

1.2. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t),\ f_{xxx}(x,t)\in C(D_T),\ f^{(4)}(x,t)\in L_2(D_T),$

$$J(f)\equiv b\left(f(0,t)+\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\cos\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 f(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))dx\right)-f_x(0,t)=0\ ,$$

$$f(1,t)=0,\ f_{xx}(1,t)=0,\ \ f'''(0,t)-bf''(0,t)+af'(0,t)=0\,(0\le t\le T).$$

3. $\delta\geq 0$, $0<a_1(t)\in C[0,T],\quad h(t)\in C^1[0,T],\quad h(t)\ne 0\ (0\le t\le T)$.

Доказывается следующая теорема:

Теорема1. 2. *Пусть выполнены условия1.1-1.3 и*

$$(A(T)+2)^2B(T)<1.$$

Тогда задача (1)-(4), (7) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^2}\le R=A(T)+2)$ *пространства* E_T^2 *единственное решение, где* $A(T), B(T)$ *определены в разделе 1.3.*

С помощью леммы 1.1 доказывается следующая

Теорема 1.3. *Пусть выполняются все условия теоремы 1.2 и выполнены условия согласования*

$$\varphi(x_0) = h(0) + \delta h(T).$$

Тогда задача (0.1)-(0.5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^2} \le R = A(T) + 2)$ *пространства* E_T^2 *единственное классическое решение.*

В разделе 4 главы I изучается непрерывная зависимость решения обратной задачи для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями.

Через $\{u_i(x,t), a_{i0}(t)\}(i = 1,2)$ обозначено решение задачи (1)-(5) в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^2} \le R = A(T) + 2)$ пространства E_T^2 соответственно данным $f_i(x,t), \ \ \varphi_i(x), \ h_i(t) \ (i = 1,2)$.

Предполагается , удовлетворение следующих условий:

1.4. $\varphi_i(x) \in C^3[0,1], \varphi_i^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \varphi_i(1) = 0$,
$J(\varphi_i) = 0$, $\varphi_i''(1) = 0, \quad \varphi_i'''(0) - b\varphi_i''(0) + a\varphi_i'(0) = 0 \, (i = 1,2).$

1.5. $f_i(x,t), f_{ix}(x,t), \ f_{ixx}(x,t), f_{ixxx}(x,t) \in C(D_T),$
$f_i^{(4)}(x,t) \in L_2(D_T), \ f_i(1,t) = 0, J(f_i) = 0$, $f_{ixx}(1,t) = 0,$
$f_i'''(0,t) - b\, f_i''(0,t) + af_i'(0,t) = 0 \quad (i = 1,2; \ 0 \le t \le T).$

1.6. $\delta \geq 0$, $0 < a_1(t) \in C[0,T], \quad h_i(t) \in C^1[0,T], \ h_i(t) \ne 0$
$(0 \le t \le T)$, $\quad \varphi_i(x_0) = h_i(0) + \delta h_i(T)(i = 1,2)$.

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия 1.3-1.6 и*

$$D_8(T) < 1.$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\backslash\left(\sum_{л=1}^{\infty} \left(\lambda_k^2 \|u_{2k}(t) - u_{1k}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|a_{20}(t) - a_{10}(t)\|_{C[0,T]} \le$$

$$\le D(T)\Big(\| f_2(x_0,t) - f_1(x_0,t)\|_{C[0,T]} + \|h_2(t) - h_1(t)\|_{C[0,T]} +$$

$$+ \|h_2'(t) - h_1'(t)\|_{C[0,T]} + |\varphi_2'''(0) - \varphi_1'''(0)| + \|\varphi_2^{(4)}(x) - \varphi_1^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ \| f_{2xxx}(0,t) - f_{1xxx}(0,t)\|_{C[0,T]} + \| f_{2xxxx}(x,t) - f_{xxxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \Big)$$

где $D_8(T), D(T)$ *определены в разделе 1.4*

В главе II, которая состоит из двух разделов, рассмотрена разрешимость обратных краевых задач для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями, содержащего производную второго порядка и с интегральным условием.

В разделе 1 главы II рассмотрена для уравнения

$$a_1(t)u_t(x,t)+a(t)u(x,t)=u_{xx}(x,t)+b(t)g(x,t)+f(x,t) \tag{8}$$

в области $D_T=\{(x,t): 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратная краевая задача с нелокальным условием

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x)\quad (0\le x\le 1)\,, \tag{9}$$

граничным условием Дирихле

$$u(0,t)=0\quad (0\le t\le T)\,, \tag{10}$$

неклассическим краевым условием

$$u_x(1,\,t)+du_{xx}(1,\,t)=0\quad (0\le t\le T) \tag{11}$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t)=h_i(t)\quad (i=1,2;\ 0<x_1,x_2<1,\ x_1\ne x_2,\ 0\le t\le T)\,, \tag{12}$$

где $d>0,\ \delta\ge 0$-заданные числа, $a_1(t)>0$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $h_i(t)$ $(i=1,2)$-заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$- искомые функции.

Определение 2.1. *Под классическим решением обратной краевой задачи (8)-(12) понимается тройка* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *функций* $u(x,t)$, $a(t)$, $b(t)$, *если* $u(x,t)\in C^{2,1}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$, $b(t)\in C[0,T]$ *и выполняются соотношения (8)-(12)* .

Сначала задача (8)-(12) сводится к эквивалентной задаче. С этой целью рассматривается следующая спектральная задача

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\quad (0\le x\le 1),$$

$$y(0)=0,\ \ y'(1)=d\lambda y(1),\ d>0.$$

Эта задача имеет только собственные функции $y_k(x)=\sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_k}x)$, $k=0,\,1,\,2,...$ с положительными собственными числами λ_k из уравнения $ctg\sqrt{\lambda}=d\sqrt{\lambda}.$ Нулевой индекс присваивается любой собственной функции, а все остальные нумеруются в порядке возрастания собственных чисел.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Пусть* $f(x,t)\in C(D_T),\ \varphi(x),\in C[0,\,1],$, $h_i(t)\in C^1[0,T]$ $(i=1,2)$, $h(t)\equiv h_2(t)g(x_1,t)-h_1(t)g(x_2,t)\neq 0$ $(0\le t\le T)$,

$$J(\varphi)=\varphi(1)+\frac{1}{d\sin\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1\varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_0}x)dx=0,$$

$$J(f)=f(1,t)+\frac{1}{d\sin\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 f(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}x)dx=0\ (0\le t\le T)$$

и выполняются условия согласования

$$\varphi(x_i)=h_i(0)+\delta h_i(T)\ \ (i=1,2).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (8)-(12) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)\in C^{2,1}(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$ *и* $b(t)\in C[0,T]$, *удовлетворяющих уравнению (8), условиям* (*9*)*, (10) и условиям*

$$u(1,\ t)+\frac{1}{d\sin\sqrt{\lambda_0}}\int_0^1 u(x,t)\sin(\sqrt{\lambda_0}x)dx=0\ \ (0\le t\le T), \qquad (13)$$

$$a_1(t)h_i'(t)+a(t)h_i(t)=u_{xx}(x_i,t)+$$
$$+a(t)g(x_i,t)+f(x_i,t)\ \ (i=12;\ 0\le t\le T). \qquad (14)$$

Предполагается, что данные задачи (8) - (10), (13) , (14) удовлетворяют следующим условиям:

2.1. $\varphi(x)\in C^2[0,1],\varphi'''(x)\in L_2(0,1),\varphi(0)=0$, $J(\varphi)=0$, $\varphi''(0)=0$, $d\varphi''(1)+\varphi'(1)=0.$

2.2. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T),,\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$, $f(0,t)=0,\ J(f)=0$, $f_{xx}(0,t)=0,\ df_{xx}(1,t)+f_x(1.t)=0$ $(0\le t\le T)$.

2.3. $g(x,t),g_x(x,t),\ g_{xx}(x,t)\in C(D_T),g_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T),\ g(0,t)=0,$ $g(f)=0$, $g_{xx}(0,t)=0,\ dg_{xx}(1,t)+g_x(1.t)=0$ $(0\le t\le T)$.

2. 4. $\delta\ge 0,\ 0<a_1(t)\in C[0,T],h_i(t)\in C^1[0,T]\ (i=1,2),$

$$h(t)\equiv h_2(t)g(x_1,t)-h_1(t)g(x_2,t)\neq 0\ \ (0\le t\le T).$$

Доказывается следующая:

Теорема 2. 2. *Пусть выполнены условия 2. 1-2.4 и*

$$(B(T)(A(T)+2)+C(T))(A(T)+2)<1 \ .$$

Тогда задача (8)-(10), (13) ,(14) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^{3/2}}\le R=A(T)+2)$ *пространства* $E_T^{3/2}$ *единственное решение, где* $A(T), B(T)$, $C(T)$, $E_T^{3/2}$ *определены в разделе 2.1*

С помощью леммы 2.1 доказывается следующая

Теорема 2. 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2.2 и выполнены условия согласования*

$$\varphi(x_i)=h_i(0)+\delta h_i(T) \quad (i=1,2).$$

Тогда задача (8)-(12) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^{3/2}}\le R=A(T)+2)$ *пространства* $E_T^{3/2}$ *единственное классическое решение.*

В разделе 2 главы II в прямоугольнике $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le T\}$ рассмотрено уравнение

$$a_1(t)u_t(x,t)+a_0(t)u(x,t)=u_{xx}(x,t)+f(x,t) \tag{15}$$

и поставлена для него обратная краевая задача с нелокальным условием

$$u(x,0)+\delta u(x,T)=\varphi(x) \quad (0\le x\le 1), \tag{16}$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t)=0 \qquad (0\le t\le T), \tag{17}$$

нелокальным интегральным условием

$$du(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T) \tag{18}$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \tag{19}$$

где $d>0,\ \delta\ge 0$-заданные числа, $a_1(t)>0$, $f(x,t), \varphi(x), h(t)$-заданные функции, а $u(x,t)$ и $a_0(t)$- искомые функции.

Определение 2.2. *Классическим решением задачи (15)-(19) называется пара* $\{u(x,t),a_0(t)\}$ *функций* $u(x,t)$ *и* $a_0(t)$, *обладающих следующими свойствами:*

1) функция $u(x,t)$ *непрерывна в* D_T *вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (15);*

2) функция $a_0(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$;

3) все условия (15)-(19) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма2.5. *Пусть* $\delta \geq 0,\ \ 0 < a_1(t) \in C[0,T],\ \ \ \varphi(x) \in C[0,1]$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^1[0,T],\ h(t) \neq 0\ \ (0 \leq t \leq T)$ *и выполняется условие согласование*

$$\varphi(0) = h(0) + \delta h(T).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (15)-(19) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ *и* $a_0(t)$, *обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (15)-(19), из соотношений (15)-(18),*

$$a_1(t)h'(t) + a_0(t)h(t) = u_{xx}(0,t) + f(0,t)\ \ (0 \leq t \leq T). \tag{20}$$

Задача на собственные значения

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{21}$$

$$y'(0) = 0, y'(1) = d\lambda\, y(1),\ d > 0, \tag{22}$$

имеет только собственные функции

$y_k(x) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}x)$, $k = 0,1,...$ с неотрицательными собственными числами λ_k из уравнения $tg\sqrt{\lambda} = -d\sqrt{\lambda}$.

Рассматривается спектральная задача для уравнения (21) с граничными условиями

$$y'(0) = 0,\ d\, y(1) + \int_0^1 y(x)\,dx = 0,\ d > 0. \tag{23}$$

Ее решением будет система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. система собственных функций задачи (21), (22) без функций, соответствующих собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Пусть данные задачи (15)-(18), (20) удовлетворяют следующим условиям:

2.5. $\varphi(x) \in W_2^{(3)}(0,1), d\varphi(1) + \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi'(1) + d\varphi''(1) = 0;$

2.6. $f(x,t),\ \ \ f_x(x,t),\ \ \ f_{xx}(x,t) \in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T),$

$df(1,t) + \int_0^1 f(x,t)dx = 0,\ f_x(0,t) = 0,\ f_x(1,t) + df_{xx}(1,t) = 0 (0 \leq t \leq T);$

2.7. $\delta \geq 0,\ \ h(t) \in C^1[0,T],\ \ \ h(t) \neq 0\ \ (0 \leq t \leq T)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия2.5-2.7 и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1.$$

Тогда задача (15) - (18), (20) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^{3/2}} \le R = A(T)+2)$ *пространства* $E_T^{3/2}$ *единственное решение, где* $A(T), B(T)$, $E_T^{3/2}$ *определены в разделе 2.2.*

С помощью леммы 2.5 доказывается следующая

Теорема 2.6. *Пусть выполняются все условия теоремы 2.5 и выполнены условия согласования,*

$$\varphi(0) = h(0) + \delta h(T).$$

Тогда задача (15)(-19) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^{3/2}} \le A(T)+2)$ *из* $E_T^{3/2}$ *единственное классическое решение.*

В главе III, которая состоит из трех разделов, рассмотрена обратная краевая задача для параболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода.

В разделе 1 главы III в прямоугольнике $D_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрена для уравнения

$$a_1(t)u_t(x,t) + a(t)u(x,t) = u_{xx}(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \qquad (24)$$

обратная краевая задача с нелокальным начальным условием

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le 1), \qquad (25)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \qquad (26)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 (x-1)\,u(x,t)\,dx = 0 \quad (0 \le t \le T) \qquad (27)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t) = h_i(t) \quad (i=1,2;\ 0 < x_1, x_2 < 1,\ x_1 \ne x_2,\ 0 \le t \le T), \qquad (28)$$

где $\delta \ge 0$-заданное число, $a_1(t) > 0$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $h_i(t)$ $(i=1,2)$-заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ - искомые функции.

Определение 3.1. *Тройка* $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ *функций* $u(x,t)$, $a(t)$ *и* $b(t)$ *называется классическим решением задачи (24)-(28), если выполняются следующие условия:*

1) функция $u(x,t)$ *и ее производные* $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ *непрерывны в* D_T *;*

2) функции $a(t)$, $b(t)$ *непрерывны на* $[0,T]$*;*

3) уравнение (24) и условия (25)-(28) удовлетворяются в обычном классическом смысле.

Доказывается следующая

Лемма 3.1. *Предположим, что* $\delta \ge 0,$ *функция* $a_1(t)$ *положительна и непрерывна на* $[0,T]$, *функция* $\varphi(x)$ *непрерывна на* $[0,1]$, *функции* $f(x,t)$, $g(x,t)$ *непрерывны по совокупности переменных в* D_T , $\int\limits_0^1 (x-1) f(x,t)dx = 0 \ (0 \le t \le T)$, $h_i(t) \in C^1[0,T] \quad (i=1,2)$, $h(t) \equiv h_2(t)g(x_1,t) - h_1(t)g(x_2,t) \ne 0 \quad (0 \le t \le T)$. *Кроме того пусть выполняются условие согласования*

$$\int\limits_0^1 (x-1)\ \varphi(x)dx = 0,\ \ \varphi(x_i) = h_i(0) + \delta h_i(T) (i=1,2).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (24)-(28) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in C^{2,1}(D_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ *и* $b(t) \in C[0,T]$, *из соотношений (24)-(26),*

$$u(0,t) = u(1,t) (0 \le t \le T), \qquad (29)$$

$$a_1(t)h_i'(t) + a(t)h_i(t) = u_{xx}(x_i,t) + a(t)g(x_i,t) + f(x_i,t)$$
$$(i=12;\ 0 \le t \le T)\ . \qquad (30)$$

В разделе 2 главы III даны сведения из теории спектральных задач, а также введены некоторые пространства.

В разделе 3 главы III доказывается теоремы существования и единственности решения для параболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода.

Пусть данные задачи (24)- (26), (29) , (30) удовлетворяют следующим условиям:

3.1. $\varphi(x)\in C^2[0,1],\ \varphi'''(x)\in L_2(0,1)$ и
$\varphi(0)=\varphi(1), \varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(1)$.

3.2. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$ и
$f(0,t)=f(1,t)$, $f_x(0,t)=0,\ f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)\ (0\le t\le T)$.

3.3. $g(x,t), g_x(x,t), g_{xx}(x,t)\in C(D_T),\ g_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$ и
$g(0,t)=g(1,t)$, $g_x(0,t)=0,\ g_{xx}(0,t)=g_{xx}(1,t)\ (0\le t\le T)$

3. 4. $\delta\ge 0,\ 0<a_1(t)\in C[0,T], h_i(t)\in C^1[0,T]\ (i=1,2)$,
$h(t)\equiv h_2(t)g(x_1,t)-h_1(t)g(x_2,t)\ne 0\quad(0\le t\le T)$.

Доказывается следующая

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия 3.1-3.4 и*

$$(B(T)(A(T)+2)+D(T))(A(T)+2)<1\ .$$

Тогда (24)-(26), (29), (30) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2)$ *пространства* E_T^3 *единственное решение, где* $A(T), B(T)$ *,* E_T^3 *определены в разделе 3.3.*

С помощью леммы 3.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (24)-(28).

Теорема 3. 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 3.1,*

$$\int_0^1 (x-1)\,f(x,t)dx=0\quad(0\le t\le T)\,,$$

$$\int_0^1 (x-1)\ \varphi(x)dx=0\,,\ \varphi(x_i)=h_i(0)+\delta h_i(T)(i=1,2)\,,$$

Тогда задача (24)-(28) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^3}\le A(T)+2)$ *пространства* E_T^3 *единственное классическое решение.*

Автор выражает глубокую благодарность также своему научному руководителю доктор физико-математических наук, член-корреспонденту НАН Азербайджана, профессору М.Дж.Марданову за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Искендерова А .Н. Обратная краевая задача для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями // Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elimləri seriyası, №4, Bakı 2013, Səh.55-69.
2. Искендерова А.Н. Об одной обратной краевой задаче для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями // Актуальные проблемы математики и механики. Материалы Международной конференции, посвященной 55- летию Институт Математики и Механики, Баку-2014, стр. 184-185.
3. Сафарова А.Н. Непрерывная зависимость классического решения одной одномерной обратной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями. // Azərbaycan Xalqının Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci il dönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları. Bakı 2015, səh. 102-103.
4. Сафарова А.Н. Непрерывная зависимость решения обратной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями. // Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elimləri seriyası №3, Bakı 2015, səh. 79-87.
5. Сафарова А.Н. Задача об определении правой части параболического уравнения второго порядка с неклассическими краевыми условиями // Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı respublika elmi konfransı, Bakı 2016. səh.195-196
6. Сафарова А.Н. Обратная задача восстановления правой части в параболическом уравнении с интегральным условием второго порядка//AMEA-nın müxbir üzvü Q.T.Əhmədovun analan olmasının 100 illik yubileyi münasibəti ilə "Riyaziyyat və mexanikanın akrual problemləri" adlı respublika elmi konftansının materialları, Bakı 2017, səh.256-259
7. Сафарова А.Н. Об одной обратной краевой задаче для параболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого ряда // Pedaqoji Universitetin Xəbərləri, Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, Bakı 2017, c.65,№3, стр.56-70

8. Мегралиев Я.Т., Сафарова А.Н. “Об одной нелокальной обратной краевой задаче для параболического уравнения второго порядка”, *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 2017, том 9, выпуск 2, страницы 13–21.*
9. Safarova A.N. On inverse boundary value problem for a second order hiperbolik equation with nonclassical boundary conditions. // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, 37 (4), 156-167 (2017) Series of Physical Technical and Mathmatical Sciences.

AYNUR NİZAMƏDDİN qızı SƏFƏROVA

PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN LOKAL OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

XÜLASƏ

Dissertasiya işi naməlum əmsallar zamandan asılı olduqda, məhdud oblastda ikinci tərtib parabolik tənliklər üçün lokal olmayan sərhəd şərtli qeyri-xətti tərs sərhəd məsələlərinin klassik həllinin varlığı və yeganəliyinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- qeyri klassik sərhəd şərti daxilində ikinci tərtib parabolik tənliklər üçün tərs sərhəd məsələlərinin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur;
- ikinci növ inteqral sərhəd şərtli ikinci tərtib parabolik tənliklər üçün tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur;
- birinci növ inteqral sərhəd şərti daxilində ikinci tərtib parabolik tənliklər üçün tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.

AYNUR NIZAMADDIN kızı SAFAROVA

INVERSE-VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

ABSTRACT

The dissertation work is devoted to studying existing and uniqueness of the classical solution of nonlinear inverse problems with nonlocal boundary conditions of second order parabolic equations in the bounded domain in the case of time dependent unknown coefficients. In the dissertation, the following results are obtained:

- The existence and uniqueness theorem for the classical solution of inverse-boundary value problems for a second-order parabolic equation with nonclassical boundary conditions is proved;
- The existence and uniqueness theorem for the classical solution of inverse-boundary value problems for a second-order parabolic equation with an integral condition of the second kind is proved;
- The existence and uniqueness theorem for the classical solution of inverse-boundary value problems for a second-order parabolic equation with an integral condition of the first kind is proved.

AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI
RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

Əlyazması hüququnda

AYNUR NİZAMƏDDİN qızı SƏFƏROVA

PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN LOKAL OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

1211.01– Diferensial tənliklər

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

Bakı - 2018