

ОТЧЕТ

отдела «Прикладная математика» Института Математики и Механики НАНА за 2019 год

Отдел «Прикладная математика» состоит из 5 научных сотрудников: 1 - д.ф - м.н., проф., руководитель отдела, 1-д.м.н., в.н.с. , 1- к.т.н., св.н.с., 2- лаборанта.

За отчетный период 2019 года сотрудниками отдела выполнены следующие научные исследования:

ТЕМА 1: Основы гидродинамика вязкой жидкости в низкоразмерных системах с учетом влияния квантово-механических эффектов.

(Руководитель темы д.ф - .м.н., проф. Алиев Г.Г.)

Работа А. Математическое исследование движения вязкой жидкости в нанотрубках с учетом влияния квантово-механических эффектов.

(Исполнитель д.ф - .м.н., проф. Алиев Г.Г.)

В работе предложены определяющие уравнения движения вязкой жидкости в нано каналах ($10^{-9} m \leq d \leq 10^{-4} m$), а также, дано обобщенное граничное условие Навье проскальзывания жидкости с учетом влияния проникающего в глубь напряженности физического поля имеющего место на границе между стенкой сосуда и жидкостью.

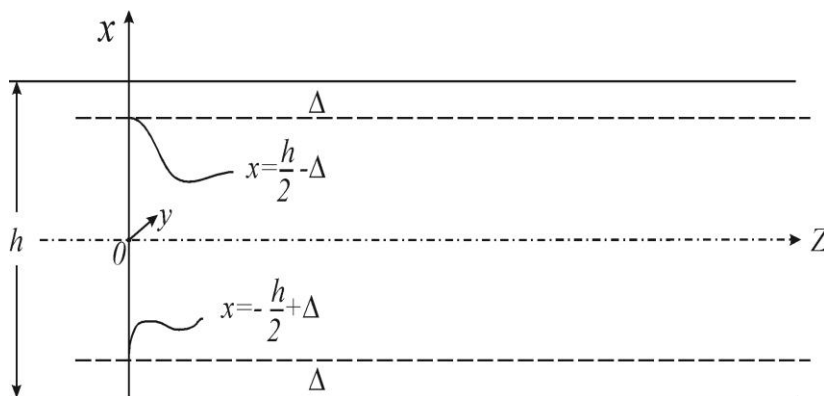


Рис.1

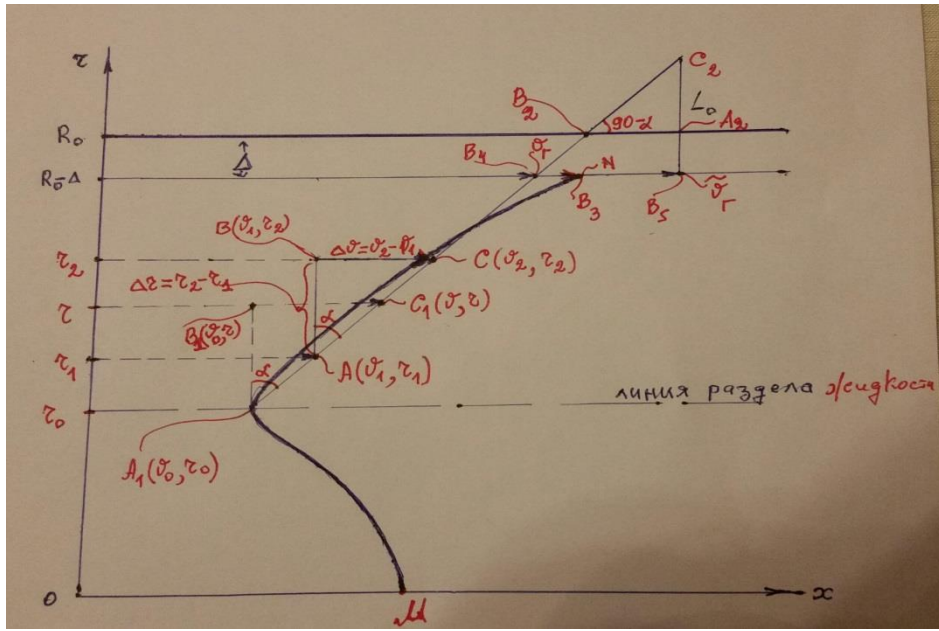


Рис.2

Основные уравнения движения вязкой жидкости во 2-ой области

$$x_0 \leq x \leq \frac{h}{2} - \Delta z$$

- уравнения движения:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\ & = X - \frac{1}{\rho_0(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + v_0 \cdot [\Delta v_x + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \text{div} \vec{v}}{\partial x}] + \frac{2}{3} \cdot \frac{v_0}{(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \cdot (\text{div} \vec{v} - 3 \frac{\partial v_x}{\partial x}) \\ & \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ & = Y - \frac{1}{\rho_0(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + v_0 \cdot [\Delta v_y + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \text{div} \vec{v}}{\partial y}] - \frac{v_0}{(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \cdot (\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) \\ & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ & = Z - \frac{1}{\rho_0(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + v_0 \cdot [\Delta v_z + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial \text{div} \vec{v}}{\partial z}] - \frac{v_0}{(1-\tilde{E})} \cdot \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \cdot (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) \end{aligned} \right.$$

-уравнение сохранения вещества:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \cdot [\operatorname{div} \cdot \vec{v} - \frac{1}{1 - \tilde{E}(x)} \cdot \frac{\partial \tilde{E}(x)}{\partial x} \cdot v_x] = 0$$

- обобщенное граничное условие Навье в наногидродинамике с учетом влияния явления квантово-механических эффектов превращения однородной жидкости в неоднородную:

$$v(x)|_{x=\frac{h}{2}-\Delta} = v_0 + L \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Здесь $\rho = \rho_0 \cdot [1 - \tilde{E}(x)]$ и $\mu = \mu_0 \cdot [1 - \tilde{E}(x)]$ - есть функции плотности и вязкости жидкости по глубине жидкости, $\nu = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ - кинематическая вязкость, а v_0 и $L = R_0 - r_0$ - коэффициенты. Все они зависят от экспериментально заданной квантово-механических эффектов – заданной от плотности воздействия напряженности физического поля $\tilde{E} = \frac{E(x)}{E_0}$ проникающего вглубь жидкости. гидродинамики вязкой жидкости в низкоразмерных системах ($10^{-9} m \leq d \leq 10^{-4} m$).

Основные качественные и количественные результаты гидродинамики вязкой жидкости в низкоразмерных системах ($10^{-9} m \leq d \leq 10^{-4} m$) заключаются в следующем:

- в образовании пустого пространства между стенкой сосуда и жидкостью величиной $\Delta = 0,12 \cdot \frac{h}{2}$,

- по глубине жидкости близкой к стенке однородная жидкость будет превращаться в неоднородную,

- механические характеристики неоднородной части жидкости (плотности $\rho(x)$ и вязкости $\mu(x)$) по глубине в зависимости от воздействия напряженности физического поля будут изменяться в виде:

$$\rho = \rho_0 \cdot [1 - \tilde{E}(x)], \quad \mu = \mu_0 \cdot [1 - \tilde{E}(x)]$$

- эпюра распределения скорости течения вязкой жидкости по сечению в нано трубке не будет параболической, т.е. эффект прилипания будет отсутствовать. Скорость жидкости близкой к стенке всегда отлична от нуля $v_0 \neq 0$, т.е. имеет место проскальзывание жидкости за счет влияния квантово-механических эффектов.

- характер скорости проскальзывания на границе раздела между жидкостью и пустым пространством будет слагаться из суммы трех видов скоростей:

1-ая скорость $v_0 = \sqrt{2g \cdot \ell} = 4,43 \frac{M}{сек}$ – характеризующая движение жидкости как твердое тела; 2-ая скорость – возникающая за счет влияния неоднородности пристеночной части жидкости и равна $v_2 = v_0 + (\frac{h}{2} - \Delta - x_0) \cdot \frac{dv}{dr}$; 3-ая скорость - возникающая за счет кажущейся длины проскальзывания жидкости на границе жидкости и пустого пространства $\Delta = 0,12 \cdot \frac{h}{2}$, которая равна величине «запретной зоны» между атомами и равна $v_3 = \Delta \cdot \frac{dv}{dr}$.

- расход жидкости в нано системах многократно выше расхода жидкости даваемое классической теории гидродинамики.

Пример. Ламинарное течение вязкой жидкости

Основное уравнение движения вязкой жидкости в 1-ой области ($0 \leq x \leq x_0$):

$$\frac{d^2 v_z}{dx^2} = - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\Delta p}{\ell}$$

Основные уравнения движения вязкой жидкости во 2-ой области

($x_0 \leq x \leq \frac{h}{2} - \Delta$) будет:

$$\frac{d^2 v_z(x)}{dx^2} - \frac{1}{1 - \tilde{E}(x)} \cdot \frac{d\tilde{E}(x)}{dx} \cdot \frac{dv_z(x)}{dx} = - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{1 - \tilde{E}(x)} \cdot \frac{\Delta p}{\ell}$$

Здесь при изменении координаты x в области $(x_0 \leq x \leq \frac{h}{2} - \Delta)$ область изменения $\tilde{E}(x)$ будет в области $(0 \leq \tilde{E}(x) \leq 1 - \varepsilon)$.

Решением этих уравнений по определению скорости движения вязкой жидкости в 1-ой и во 2-ой областях будут следующие:

1. В области $0 \leq \xi \leq \xi_0$ будет:

$$v_1(\xi) = v_0(\xi_0) + \frac{1}{2\mu_0 a^2} \cdot \frac{p_0 - p_1}{\ell} \cdot (\xi_0^2 - \xi^2)$$

2. В области $\xi_0 \leq \xi \leq 1 - \varepsilon$ будет:

$$v_2(\xi) = v_0(\xi_0) + \frac{1 - \xi_0}{\mu_0 a^2} \cdot \frac{p_0 - p_1}{\ell} \cdot (\xi - \xi_0)$$

Здесь $\xi = ax = \frac{x}{\frac{h}{2} - \Delta}$.

Зная виды функций $v_1(\xi)$ и $v_2(\xi)$ вычислим количество жидкости протекающее в единицу времени в призме, ограниченной стенками и двумя плоскостями $y = 0$ и $y = b$. Для этого вычислим интеграл:

$$\int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon} v(\xi) d\xi = 2 \cdot \left[\int_0^{\xi_0} v_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{1-\varepsilon} v_2(\xi) d\xi \right]$$

Умножая этот интеграл на $z = b$ определим величину расхода жидкости Q в интервале сечения призмы $-(1 - \varepsilon) \leq 2 \cdot \frac{h}{2} \leq (1 - \varepsilon)$ в виде:

$$Q = b \cdot \int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon} v(\xi) d\xi = 2 \cdot b \cdot \left[\int_0^{\xi_0} v_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{1-\varepsilon} v_2(\xi) d\xi \right]$$

Работа Б. Организация мониторинга при токсичных отравлениях.

(Исполнитель к.т.н., в.н.с. Мирзаде И.Х.)

Оперативное оценивание состояния больного является приоритетным в ряде областей медицины. К таким областям, где время t является доминирующим параметром, можно отнести область токсичных отравлений. В этих случаях прежде всего требуется вывести больного из экстремального состояния, то есть сделать все, что требуется в ургентной терапии. Это декомпенсация, антидотная терапия и т.д. Но есть ряд отравлений, специфика которых заключается в том, что они носят длительный характер и отличаются своими серьезными последствиями. Например, в Великобритании и в США в институте Сердца проводились исследования, в результате которых обнаружилось, что после определенного времени больные, отравившиеся угарным газом, заболели инфарктом миокарда и болезнью Паркинсона. Объяснения тому факту очевидны, т.к. при отравлении угарным газом страдает сердечная мышца и центральная нервная система. Отсюда следует, что пострадавшие от отравления пациенты нуждаются в мониторинге после выписки из стационара.

Для увеличения надежности показателей параметра применим непараметрические методы измерений:

U-критерий Манна-Уитни обычно применяется при малых выборках. Число общих рангов равно: $N = n_1 + n_2$, где n_1 – количество параметров в первой выборке, n_2 – во второй выборке. Ранжированный ряд делится на две части и отдельно суммируются ранги в обеих частях. Выбирается наибольший ранг T_x , который соответствует выборке n_x . Тогда по критерию Манна-Уитни для выборок n_1 и n_2 значение критической оценки вычисляется по формуле

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x \quad (3)$$

Если $U \leq$ табличного значения, тогда разница между измерениями параметра существенна. Если же $U >$ табличного значения, принимается нулевая гипотеза. **T-критерий Вилкоксона** применяется при вычислении разности значений показателей до и после лечения. Если значение превышает критическое, принимается нулевая гипотеза.

Критерий Фридмана . Дана выборка из повторных измерений для каждого параметра:

№ параметра	1	2	...	c
1	x_{11}	x_{21}	...	x_{c1}
2	x_{12}	x_{22}	...	x_{c2}

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ n & & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{cn} & \end{array}$$

В качестве нулевой гипотезы рассматривается следующая: «между полученными в разных условиях измерениями имеются лишь случайные различия». Выбирается уровень значимости α , например, $\alpha = 0,01$. Значения ранжируются, вычисляется сумма рангов. Для проверки гипотез используем эмпирическое значение критерия:

$$S = \frac{12n}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ij} - \frac{k+1}{2} \right). \quad (4)$$

Здесь приняты обозначения: даны наблюдения k и n , где $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$. r_{ij} - ранг параметра ($r_{ij} = 1, 2, 3, \dots, k$). Нулевая гипотеза применяется, если критическое значение критерия превосходит эмпирическое. Для малых значений k и n для критического значения Фридмана существуют таблицы для разных значений уровня значимости α (или доверительной вероятности). если $S < S_{\alpha}(n, k)$, тогда принимается нулевая гипотеза (табличное значение S_{α}).

Н-критерий Краскела-Уоллиса предназначен для проверки равенства медиан нескольких выборок. Данный критерий является многомерным обобщением критерия Манна-Уитни. Критерий Краскела-Уоллиса является ранговым, поэтому он инвариантен по отношению к любому монотонному преобразованию шкалы измерения. Например, для k измерений:

$x_1^{n_1} = \{x_{11}, \dots, x_{1n_1}\}, \dots, x_k^{n_k} = \{x_{k1}, \dots, x_{kn_k}\}$. Обобщенная выборка будет $x = x_1^{n_1} \cup x_2^{n_2} \cup \dots \cup x_k^{n_k}$.

Для всех

$$N = \sum_{i=1}^k n_i$$

элементы собираются по возрастанию и через R_{ij} обозначим ранг j -ого элементы в i -ой выборке. Тогда разность между двумя выборками по Краскел-Уоллису вычисляется по формуле (5)

$$H = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{n_i}{N}\right) \left\{ \frac{\bar{R}_i - \frac{N+1}{2}}{\sqrt{\frac{(N-n_i)(N+1)}{12n_i}}} \right\}^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \left(\bar{R}_i - \frac{N+1}{2} \right)^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

$$R_i = \sum_{j=1}^k R_{ij}; \quad \bar{R}_i = \frac{1}{n_i} R_i.$$

(5)

Если $H \geq H_\alpha$, то принимается нулевая гипотеза (H_α – табличное значение).

ТЕМА 2. Интегральное моделирование процесса фильтрации в нефтегазодобыче

(д.ф.-м.н., проф. Алиев Г.Г., д.н. м., в.н.с. Аббасов Э.М.)

Работа А. Моделирование процесса фильтрации газа в системе пласт - скважина

(исполнитель д.м.н., в.н.с. Аббасов Э.М.)

Исследование и изучение процесса фильтрации в нефтегазовых скважинах с учетом динамической связи системы пласт – скважина имеет большое научное и практическое значение.

В работе строится интегральная модель процесса нестационарной фильтрации газа и по устьевым информациям определяются давления на устье и забое скважины, а также динамика дебита.

Рассмотрим плоскорадиальную фильтрацию гомогенного газа в однородном круговом пласте. Уравнение плоскорадиальной фильтрации гомогенного газа имеет вид [1-4]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\theta r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

где $\theta = \frac{kP}{\mu m}$.

Граничные и начальное условия

$$P|_{r=r_c} = P_c(t), \quad t > 0 \quad (2), \quad \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R_k} = 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$2\pi hr \frac{k}{\mu \beta} \frac{P_c(0) + P_c(T)}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{t=0} = G(r). \quad (4)$$

Решение уравнения (1) с учетом граничных условий (2) и (3) будем искать в виде [1]:

$$P = P_c(t) + A(t)f(r), \quad (5)$$

где $A(t)$ - зависящая от времени t неизвестная функция, $f(r)$ - функция, зависящая от координаты r , удовлетворяющая граничным условиям (2) и (3), $P_c(t)$ - давление на забое скважины, k - коэффициент проницаемости пласта, μ - динамическая вязкость газа, m - пористость породы пласта, $P_c(0)$ - начальное давление на забое скважины, P - давление в любой точке пласта. Функцию $f(r)$, удовлетворяющую граничным условиям (2) и (3) выберем так (см. [1]):

$$f(r) = \ln \frac{r}{r_c} - \frac{r}{R_k} + \frac{r_c}{R_k}. \quad (6)$$

Принимая процесс изотермически, масса газа G_0 в пласте в каждый момент времени может быть определена по формуле:

$$G_0 = \frac{2\pi m h}{\beta} \int_{r_c}^{R_k} P \cdot r dr \quad (7)$$

где $\beta = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}}$, h - мощность пласта, P_{atm} - атмосферное давление, ρ_{atm} - плотность газа при атмосферном давлении, r_c - радиус скважины, R_k - радиус контура пласта, r - координата.

Приток газа из пласта в скважину в единицу времени G может быть определен по формуле:

$$G = -\frac{dG_0}{dt} \quad (8)$$

Подставляя выражения (5) и (6) в формуле (7) получим:

$$G_0 = \frac{2\pi m h}{\beta} \left[P_c(t) \frac{R_k^2 - r_c^2}{2} + \frac{R_k^2}{2} D A(t) \right], \quad (9)$$

где $D = \ln \frac{R_k}{r_c} - \frac{7}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_c}{R_k} \right)^2 + \frac{r_c}{R_k} - \frac{1}{3} \left(\frac{r_c}{R_k} \right)^3$.

Подставляя выражение (9) в формуле (8), получим:

$$G = -\frac{\pi m h R_k^2}{\beta} \left[\dot{P}_c \left(1 - \frac{r_c^2}{R_k^2} \right) + D \dot{A}(t) \right]. \quad (10)$$

С другой стороны приток газа в скважину в единицу времени может быть определен по формуле [1]:

$$G = \frac{k(P_c(0) + P_c(T))}{\mu \beta} \pi r_c \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_c} \quad (11)$$

где $P_c(T)$ - давление в забое скважины в конце периода эксплуатации.

Тогда подставляя выражение (5) в формулы (11), получим:

$$G = \frac{k(P_c(0) + P_c(T))}{\mu \beta} \pi h A(t) \left(1 - \frac{r_c}{R_k} \right) \quad (12)$$

Приравнявая выражения (10) и (12), получим:

$$\dot{A} + \alpha A = -\frac{\dot{P}_c(t)}{D}. \quad (13)$$

Решение дифференциального уравнения (13) имеет вид:

$$A = A_0 \exp(-\alpha t) - \frac{1}{D} \int_0^t \dot{P}_c(\tau) \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau, \quad (14)$$

где A_0 - постоянная интегрирования, которая определяется из начального условия (4), $\alpha = \frac{k(P_c(0) + P_c(T))}{\mu m R_k D}$. Подставляя полученное выражение в формулы

(5) получим поле распределения давления в пласте:

$$P = P_c(t) + \left(\ln \frac{r}{r_c} - \frac{r}{R_k} + \frac{r_c}{R_k} \right) \left[A_0 \exp(-\alpha t) - \frac{1}{D} \int_0^t \dot{P}_c(\tau) \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau \right] \quad (15)$$

Теперь рассмотрим движение газа в подъемном трубопроводе. Движение газа в трубе и уравнение неразрывности описываются уравнениями И.А.Чарного [5,6]:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2aQ, \quad -\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q = \rho v \quad (16)$$

где c - скорость распространения звука в газе, t - время, x - координата, ρ - плотность газа при данном давлении, v - осредненная по поперечному сечению трубы скорость потока газа, a - коэффициент сопротивления.

Продифференцировав первое уравнение выражения (16) по времени t , а второе по x и вычитывая друг от друга, получим:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (17)$$

Скорость поперечных сечений столба газа представим как сумма двух скоростей

$$v = v_e + v_r, \quad (18)$$

где v_e - скорость движения столба газа как твердое тело (переносная скорость), v_r - скорость поперечных сечений столба газа от его сжимаемости (относительная скорость)

Подставляя выражение (18) в формулу

$$Q = \rho v = \rho v_e + \rho v_r \quad (19)$$

или

$$Q = u_e + u_r, \quad (20)$$

где $u_e = \rho v_e$, $u_r = \rho v_r$.

Тогда подставляя выражение (20) в уравнение (17), получим:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - 2a \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \quad (21)$$

Так как уравнение (21) линейное, то оно распадается на два уравнения

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{\dot{P}_c - \dot{P}_u}{l} \quad (22)$$

где P_y - давление на устье скважины.

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\dot{P}_u - \dot{P}_c}{l} \quad (23)$$

Поместив начало координатной оси x в нижнем сечении трубы и направив её вверх, для начальных и граничных условий будем иметь:

$$u_e|_{t=0} = \frac{G(0)}{f} \quad (24)$$

$$\left. \frac{du_e}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (25), \quad u_r|_{t=0} = 0 \quad (26), \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (27)$$

$$u_r|_{x=0} = 0 \quad (28), \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (29)$$

где f - площадь проходного сечения трубы.

Применяя преобразование Лапласа и принимая во внимание теоремы свертки [7-9] с учетом начальных условий (24) и (25), получим:

$$u_e = \frac{G(0)}{f} + \frac{1}{l} \int_0^t P_c(\tau) \exp[-2a(t-\tau)] d\tau - \frac{1}{l} \int_0^t P_u(\tau) \exp[-2a(t-\tau)] d\tau - \frac{1}{2al} \exp(-2at) [P_u(0) - P_c(0)] + \frac{1}{2al} [P_u(0) - P_c(0)]. \quad (30)$$

Решение уравнения (23) с учетом граничных условий (28) и (29) будем искать в виде ([5], [6], [7]):

$$u_r = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \left(1 - \cos \frac{i\pi x}{l} \right) \quad (31)$$

где $\varphi_i(t)$ - неизвестная зависящая от времени t функция, l - глубина спуска трубы. Подставляя выражение (31) в уравнение (23), умножая обе части полученного выражения на $\left(1 - \cos \frac{i\pi x}{l} \right)$ и интегрируя его от 0 до l получаем уравнение:

$$\ddot{\varphi}_i + 2a\dot{\varphi}_i + \frac{c^2 i^2 \pi^2}{3l^2} \varphi_i = \frac{2}{3l} (\dot{P}_u - \dot{P}_c) \quad (32)$$

Применяя преобразование Лапласа и принимая во внимание теоремы обращения и свертки ([8], [9]), из уравнения (32) с учетом начальных условий (26) и (27), получаем:

$$\varphi_i = \frac{2}{3l} \left[\int_0^t P_u(\tau) \exp[-a(t-\tau)] \cos[\omega_i(t-\tau)] d\tau - \frac{a}{\omega_i} \int_0^t P_u(\tau) \exp[-a(t-\tau)] \times \right. \\ \left. \times \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau - \frac{P_u(0)}{\omega_i} \exp(-at) \sin(\omega_i t) - \int_0^t P_u(\tau) \exp[-a(t-\tau)] \cos[\omega_i(t-\tau)] d\tau + \right. \\ \left. + \frac{a}{\omega_i} \int_0^t P_c(\tau) \exp[-a(t-\tau)] \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau + \frac{P_c(0)}{\omega_i} \exp(-at) \sin(\omega_i t) \right], \quad (33)$$

$$\omega_i^2 = \frac{c^2 i^2 \pi^2}{3l^2} - a^2.$$

Из условия неразрывности с учетом граничного условия (28) и выражений (30), (31) и (33) получим следующее интегральное уравнение:

$$G(0) \exp(-\alpha t) - \frac{k(P_c(0) + P_k)}{D\mu\beta} \pi h \int_0^t \dot{P}_c(\tau) \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau = G(0) + \frac{f}{2al} [P_u(0) - P_c(0)] + \frac{f}{l} \int_0^t P_c(\tau) \exp[-2a(t-\tau)] d\tau - \frac{f}{l} \int_0^t P_u(\tau) \exp[-2a(t-\tau)] d\tau - \frac{f}{2al} \exp(-2at) [P_u(0) - P_c(0)]. \quad (34)$$

Применяя преобразование Лапласа и принимая во внимание теоремы свертки и обращения, из выражения (34) получим:

$$P_c = P_c(0) \left[\exp(-\beta_1 t) \frac{2a - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \exp(-\beta_2 t) \frac{2a - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right] + \left[\frac{f(P_c(0) - P_u(0))}{2alb} - \frac{G(0)}{b} \right] \times \\ \times \left[\frac{2\alpha a}{\beta_1 \beta_2} + \frac{(\alpha - \beta_1)(2a - \beta_1)}{\beta_1(\beta_1 - \beta_2)} \exp(-\beta_1 t) + \frac{(\alpha - \beta_2)(2a - \beta_2)}{\beta_2(\beta_2 - \beta_1)} \exp(-\beta_2 t) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f}{lb} \left[\frac{\alpha - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \int_0^t P_u(\tau) \exp[-\beta_1(t - \tau)] d\tau + \frac{\alpha - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \int_0^t P_u(\tau) \exp[-\beta_2(t - \tau)] d\tau \right] - \\
& - \frac{f}{2alb} [P_c(0) - P_u(0)] \left(\frac{\alpha - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \exp(-\beta_1 t) + \frac{\alpha - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \exp(-\beta_2 t) \right) + \\
& + \frac{G(0)}{b} \left[\exp(-\beta_1 t) \frac{2a - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \exp(-\beta_2 t) \frac{2a - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right], \tag{35}
\end{aligned}$$

где $b = \frac{k[P_k + P_c(0)]\pi h}{\beta\mu D}$, P_k - давление на контуре пласта.

β_1 и β_2 корни уравнения

$$s^2 + \left(a + \frac{f}{bl}\right)s + \frac{f}{bl}\alpha = 0. \tag{36}$$

Далее рассмотрим как изменится давления на забое скважины при её закрытии с устья.

Предположим, что при закрытии скважины массовой расход газа на ее устье уменьшается по линейному закону

$$Q = G_1 \left(1 - \frac{t}{T_0}\right), \tag{37}$$

где T_0 - промежуток времени за который закрывается скважина, G_1 - приток газа на устье скважины в единицу времени при начале операции закрытия скважины.

Определим при этом устьевое и забойное давления скважины. Из условия неразрывности на устье скважины с учетом выражений (30), (31), (33) и (37) применяя преобразование Лапласа будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \frac{G(0)}{fs} + \frac{1}{l} \frac{\bar{P}_c}{s(s+2a)} - \frac{1}{l} \frac{\bar{P}_u}{s(s+2a)} + \sum_{i=1}^n \frac{2}{3l} \left[\frac{s\bar{P}_u}{(s+a)^2 + \omega_i^2} - \frac{P_u(0) - P_c(0)}{(s+a)^2 + \omega_i^2} - \right. \\
& \left. - \frac{s\bar{P}_c}{(s+a)^2 + \omega_i^2} \right] = \frac{G_1}{f} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{Ts^2} \right). \tag{38}
\end{aligned}$$

Из выражения (38) при $G(0) = G_1$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \bar{P}_c = P_c(0) \frac{(s+a)^2 + \omega^2}{s \left[(s+a)^2 + \omega^2 + \frac{2}{3}(s+2a)s \right]} + \frac{s\bar{P}_u - P_u(0)}{s \left[(s+a)^2 + \omega^2 + \frac{2}{3}(s+2a)s \right]} + \\
& + \frac{2}{3} \bar{P}_u \frac{s(s+2a)}{(s+a)^2 + \omega^2 + \frac{3}{3}(s+2a)s} - \frac{2}{3} \frac{[P_u(0) - P_c(0)](s+2a)}{(s+a)^2 + \omega^2 + \frac{2}{3}(s+2a)s} - \\
& - \frac{G_1 l}{f T s^2} \frac{(s+2a) \left[(s+a)^2 + \omega^2 \right]}{(s+a)^2 + \omega^2 + \frac{2}{3}(s+2a)s}. \tag{39}
\end{aligned}$$

Теперь определяя из выражения (34) изображение \bar{P}_c и приравнявая его к правой части выражения (39), можно найти изображение устьевого давления:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{u1} = & \frac{G(0)\alpha}{s^2} \frac{D\mu\beta}{\pi hk(P_T + P_c(0))} + \frac{P_c(0)}{s} - \frac{f(P_u(0) - P_c(0))}{2al s^2} \frac{D\mu\beta(s+\alpha)}{\pi hk(P_T + P_c(0))} + \\
& + \frac{f(P_u(0) - P_c(0))}{2al s(s+2a)} \frac{D\mu\beta(s+\alpha)}{\pi hk(P_T + P_c(0))} + \frac{P_u(0) - P_c(0)}{s} + \\
& + \frac{(P_u(0) - P_c(0))}{s^2(s+2a)} \frac{f D\mu\beta(s+\alpha)}{\pi hkl(P_T + P_c(0))} - \frac{G_1 l}{f T s^2} \frac{(s+a)((s+a)^2 + \omega_i^2)}{\left[\frac{s^2}{3} + \frac{2as}{3} + \omega_i^2 + a^2 \right]} - \\
& - \frac{G_1}{f T s^3} \frac{(s+a)((s+a)^2 + \omega_i^2)}{\left[\frac{s^2}{3} + \frac{2as}{3} + \omega_i^2 + a^2 \right]} \frac{f D\mu\beta(s+\alpha)}{\pi hk(P_T + P_c(0))}, \tag{40}
\end{aligned}$$

где $\omega_i^2 = \frac{c^2 i^2 \pi^2}{3l^2} - a^2$.

При $t = T_0$ из выражения (37) видно, что $Q = 0$. Тогда изменение устьевого давления при $t \geq T_0$ определяется из выражения (40) только лишь с той разницей, что вместо t везде вставляется $t - T_0$, а вместо $G_1 = 0$.

Таким образом изменение устьевого давления после закрытия скважины происходит согласно формуле

$$P_u^* = P_{u1}(t)[\eta(t) - \eta(t - T_0)] + \eta(t - T_0) \cdot P_{u2}(t), \tag{41}$$

где η - функция Хевисайда, $P_{u1}(t)$ - изменение давления на устье скважины при $0 < t \leq T$, определяемое из уравнения (40), $P_{u2}(t)$ - то же самое, определяемое из выражения (40) при $G_1 = 0$. Переходя к оригиналу из выражения (40) с учетом теоремы свертки и обращения при следующих значениях параметров

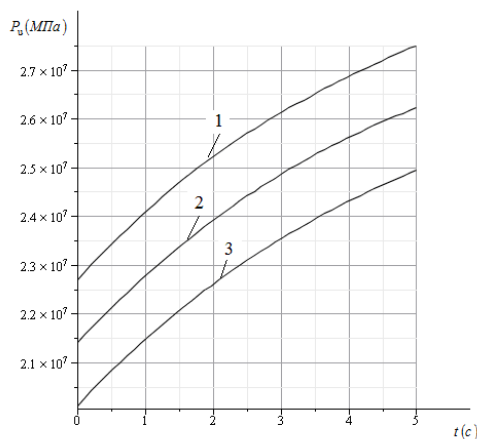
$c = 300 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; $\mu = 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $h = 10 \text{ м}$; $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$; $\rho = 0.668 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$;

$l = 3000 \text{ м}$; $P_k = 2.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$; $P_0 = 24 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $P_T = 8 \cdot 10^6 \text{ Па}$;

$P_c(0) = 24 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Па}$; $T = 5 \text{ с}$; $R_k = 300 \text{ м}$; $\pi = 3,14$;

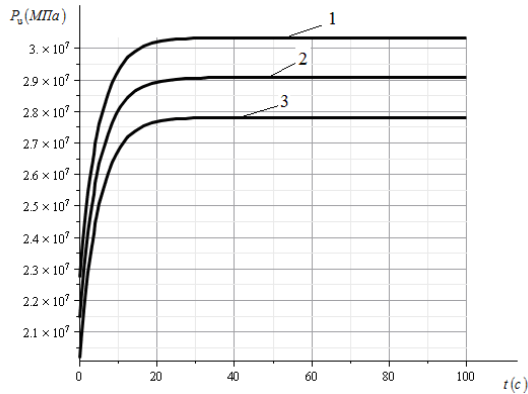
$a = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$; $m = 0.2$; $d = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $r_c = 7.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

получим выражения устьевого давления, графики которого представлены на фиг.1 и фиг.2



Фиг. 1.

Графики динамики давления на устье скважины в промежутке времени закрытая скважины в зависимости от глубины подъемных труб. 1 – $l = 1000\text{м}$, 2 – $l = 2000\text{м}$, 3 – $l = 3000\text{м}$.



Фиг. 2.

Графики динамики давления на устье скважины после закрытия скважины в зависимости от глубины подъемных труб. 1 – $l = 1000\text{м}$, 2 – $l = 2000\text{м}$, 3 – $l = 3000\text{м}$.

Теперь рассмотрим процесс добычи газа. Предположим, что устьевое давление скважины с течением времени убывает по линейному закону

$$P_u(t) = P_u(0) - \frac{P_u(0) - P_u(T)}{T} \cdot t, \quad (42)$$

где T - период добычи газа, $P_u(T)$ - давление на устье скважины в конце добычи. Тогда подставляя выражение (42) в формулу (35) получим

$$\begin{aligned} P_c = P_c(0) & \left[\exp(-\beta_1 t) \frac{2a - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + \exp(-\beta_2 t) \frac{2a - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \right] + \left[\frac{f(P_c(0) - P_u(0))}{2alb} - \frac{G(0)}{b} \right] \times \\ & \times \left[\frac{2\alpha a}{\beta_1 \beta_2} + \frac{(\alpha - \beta_1)(2a - \beta_1)}{\beta_1(\beta_1 - \beta_2)} \exp(-\beta_1 t) + \frac{(\alpha - \beta_2)(2a - \beta_2)}{\beta_2(\beta_2 - \beta_1)} \exp(-\beta_2 t) \right] + \\ & + \frac{f}{lb} \frac{\alpha - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{P_u(0)}{\beta_1} (1 - \exp(-\beta_1 t)) - \frac{P_u(0) - P_0}{T_0} \left[\frac{t}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1^2} (1 - \exp(-\beta_1 t)) \right] \right\} + \\ & + \frac{f}{lb} \frac{\alpha - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \frac{P_u(0)}{\beta_2} (1 - \exp(-\beta_2 t)) - \frac{P_u(0) - P_0}{T_0} \left[\frac{t}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_2^2} (1 - \exp(-\beta_2 t)) \right] \right\} - \\ & - \frac{(P_c(0) - P_u(0))f}{2alb} \left(\frac{\alpha - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \exp(-\beta_1 t) + \frac{\alpha - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \exp(-\beta_2 t) \right) + \\ & + \frac{G(0)}{b} \left[\frac{2a - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \exp(-\beta_1 t) + \frac{2a - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \exp(-\beta_2 t) \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Из выражения (12) с учетом выражения (14) получим:

$$G = G(0) \exp(-\alpha t) - \frac{k(P_c(0) + P_T)}{D\mu\beta} \pi h \int_0^t \dot{P}_c(\tau) \exp[-\alpha(t - \tau)] d\tau, \quad (44)$$

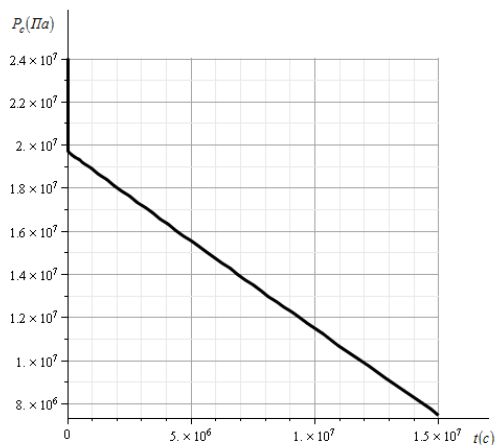
где $G(0)$ - приток газа в скважину в единицу времени в начальный момент.

Теперь из выражения (44) с учетом формулы (43) при выше указанных значениях параметров системы будем иметь:

$$G = 8.5 \cdot 10^{-6} \exp(-2.57 \cdot 10^{-6} t) + 0.28 \exp(-1.34 \cdot 10^{-7} t) - 1.7 \exp(-0.01 t) + 1.41. \quad (45)$$

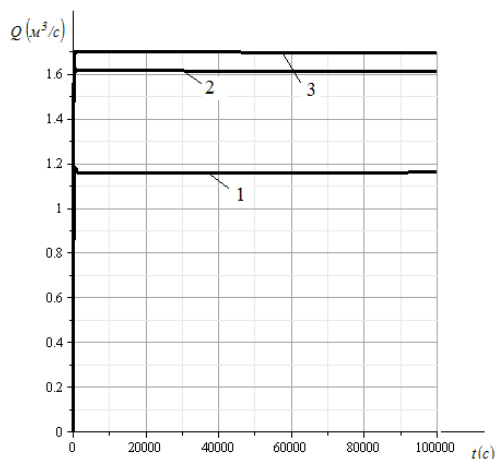
По формулам (43) и (45) произведен численный расчет при выше указанных параметрах системы и $k = 10^{-14} \text{ м}^2$, $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, $k = 10^{-13} \text{ м}^2$.

Результаты численного расчета представлены на фиг. 3, фиг. 4.



Фиг. 3.

График динамики давления на забое скважины.



Фиг. 4.

График притока газа в единицу времени на устье скважины.

1 – $k = 10^{-14} \text{ м}^2$, 2 – $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$, 3 – $k = 10^{-13} \text{ м}^2$.

Таким образом, построена интегральная модель процесса нестационарной фильтрации газа в системе пласт-скважина. Получены аналитические выражения, позволяющие определить производительность скважины, а также давления на ее устье и забое при не мгновенном прекращении притока газа в скважину и изучать кривые восстановления давления.

*Зав. отделом «Прикладная математика»
д.ф.-м.н., проф. Алиев Г.*

Список научной публикации сотрудников отдела

«Прикладная математика» ИММ НАНА за 2019 год

1. Опубликованные статьи

1. **Алиев Г.Г., Алиев А.Г.** Обобщенное условие Навье с учетом влияния квантово-механических эффектов в наногидродинамике. *EESJ-East European Science Journal*, Vol -№-5(45), May, (Poland- Warsaw)-2019, pp. 27-32, [ISSN 2468-5380](https://eesa-journal.com/2019/06/14/vostochno-evropejskij-nauchnyj-zhurnal-45-maj-2019), Impact Factor (2017) –1.572 (<https://eesa-journal.com/2019/06/14/vostochno-evropejskij-nauchnyj-zhurnal-45-maj-2019>).
2. **Аббасов Э.М., Кенкерли Е.С.** Интегральное моделирование процесса вытеснения нефти водой. *Инженерно-Физический Журнал (ИФЖ)*, №2, 2019, том 92, с. 459-467 (Thomson Reuters)
3. **Аббасов Э.М., Ш.П.Казымов, Н.Р.Абдуллаева Н.Р., Гаджикеримова Л.Г.** Утечка жидкости в скважинном штанговом насосе. *Нефтяное хозяйство*, № 4, 2019, с.87-89 (SCOPUS, Russian Scientific Citation Index)
4. **Аббасов Э.М., Агаева Н.А., Керимова Ш.А.** Интегральное моделирование работы газовых скважин с учетом деформируемости коллектора пласта. “Proceedings”, “Oil Gas Scientific Research Project” Institute, SOCAR, (НИПИ «Нефтегаз»), №2, p.p. 45-52, 2019. (SCOPUS, Russian Scientific Citation Index)
5. **Abbasov E.M., Rustamov K.O.** Matematical simulation of influence of herediry on the character of contact pressure distribution between semicylindrical surface with a hole and sealing element. *Transaction of NAS of Azerbaijan, series of Physical-Technical and Matematics science (issue Mechanics)*, vol. 39, issue 7, 2019, p.p. 3-11
6. **Аббасов Э.М., Агаева Н.А., Керимова Ш.А.** Интегральное моделирование процесса восстановления давления. *Инженерно-Физический Журнал (ИФЖ)*, №6, т.92, 2019, (Thomson Reuters).
7. **Abbasov E.M., Baghir Suleymanov, Feyzullayev K.A.** Numerical simulation of water shut-out performance for heterogeneous compasite oil reservoirs. *Applied and Computational matematics*, v.18, №3, 2019. (Tomson Reuters).

2. Статьи в публикации

1. **Mirzəzade İ.N.** Искусственный интеллект в задачах диагностики острых отравлений”. Евразийский Союз Ученых. XXXIX Международная Научно –

Практическая конференция. “Актуальные проблемы в современной науке и пути их решения”.ISSN 2411-6467. Москва 2019 (Çара qəbul olunub).

2. Аббасов Э.М., Кенгерли Т.С., Абдуллаева Н.Р. Интегральное моделирование процесса фильтрации газожидкостной смеси. [Инженерно-Физический Журнал \(ИФЖ\), \(Thomson Reuters\)](#)(çapdadır).

3. Тезисы

1. G.G.Aliyev. Base of nanohydrodynamics of viscous fluid with regard to quantum-mechanical effects. “[Modern Problems of Mathematics and Mechanics](#)” devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. 23-25 October, 2019, Baku, 100-102.(Материалы конференции).

2. Mirzəzadə İ.H. “Искусственный интеллект в задачах диагностики острых отравлений”. [Azərbay. Respublikası Təhsil Nazirliyi. Bakı Dövlət Universiteti, Mexanika-Riyaziyyat fakultəsi. Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri N.Əliyevin anadan olmasının 96-cı il dönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının materialları.](#) səh.131-133. Bakı-2019.

3. Mirzəzadə İ.H. “Differential diagnosis on the basis classification of the biosystems” “[Modern Problems of Mathematics and Mechanics](#)” devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. 23-25 October, 2019, Baku, 379-382.(Материалы конференции).

4. Аббасов Э.М., Сулейманов А.А., Новрузалиев Б.Ф. Диагностирование режима работы газлифтных скважин на основе анализа колебаний технологических показателей. [Мат. Меж. Научно-практической конференции «Состояние и перспективы эксплуатации зрелых месторождений» Актау, 16-17 май, 2019, т.2, с.10-13.](#) (Материалы конференции).

5. Аббасов Э.М., Agayev N. Hidrodynamics of fluid flow in the conjugate reservoir-well-pipeline. [10 Internatiol Conference of the Georgian Matematical Union, September 2-6, 2019, Batumi Gergia, p.p.32 .](#)

*Зав. отделом «Прикладная математика»
д.ф.-м.н., проф. Алиев Г.Г,*

