**АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА**

*На правах рукописи*

**ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ**

 **ПОРЯДКА**

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Годжаева Хадиджа Рафаэль кызы**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

доктора философии

**Баку – 2021**

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математи-ческий анализ» Азербайджанского Государственного Педагоги-ческого Университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор

 **Вали Магеррам оглы Курбанов**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

**Мамед Байрамоглы**

доктор физико-математических наук, профессор

**Назим Бахыш оглы Керимов**

кандидат физико-математических наук, доцент

**Ширмаил Гасан оглы Багиров**

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Актуальность темы и степень разработки.** Настоящая диссертация посвящена исследованию сходимости спектраль-ных разложений по собственным и присоединенным функциям обыкновенного дифференциального оператора четного порядка.

Изучение вопросов асимптотики собственных значений и сходимости спектральных разложений для различных классов краевых задач начинаются с классических работ Ж.Лиувилля, Ш.Штурма, а более позднее с работ В.А.Стеклова, Я.Д.Тамаркина, Д.Биркгофа, М.Л.Расулова и других авторов.

При построении спектральной теории дифференциальных операторов важную роль играют вопросы о базисности систем корневых функций изучаемого дифференциального оператора, в том или ином пространстве; вопросы об абсолютной и рав­но­мерной сходимости спектрального разло­жения функции из класса, вообще говоря, не совпадающего с областью определения диффе­рен­циального оператора; вопросы о равносходимости спект­­рального разложения произвольной функции из того или иного класса по системе корневых функций изучаемого диф­ферен­циального оператора с разложением той же функции в тригонометрический ряд Фурье и т.д.

В течении длительного времени основным объектом изучения были спектральные свойства самосопряженных диф­ференциальных операторов. Однако, начиная со первой половины двадцатого века возник ряд новых задач мате­ма­тической физики, приводящих к изучению спектральных свойств неса­мосо­пря­женных дифференциальных операторов. Примером задач такого рода может служить задача Бицадзе­-Самарского с нелокальными краевыми условиями для уравнения теплопроводности.

При изучении несамосопряженных задач было замечено, что система собственных функций таких операторов, вообще говоря, не только не образует базиса в классе  но и не является полной в . Поэтому такие системы должны были быть пополнены присоединенными функциями. В этих задачах собственные и присоединенные функции (корневые функции), вообще говоря, не ортогональны в  и ни их замкнутость, ни их минимальность, не влечет за собой их базисности в этом пространстве. Таким образом, исследования не самосопряжен- ных задач потребовали новых подходов.

Факт полноты в $ L\_{2}$специально построенной системы кор­невых функций для широкого класса краевых задач уста­новил М.В.Келдыш. Изучение вопроса о полноте для широкого класса краевых задач в дальнейшем был продолжен многими математиками.

 Класс усиленно регулярных краевых задач, обеспечиваю- щих базисность Рисса систем корневых функций в удалось вы­делить в работах В.П.Михайлова и Г.М.Кесельмана. Блок-базисность (или базисность со скобками) систем корневых функций регулярных краевых задач установлена в работе А.А.Шкаликова.

Первый наибольший из результатов равномерной равно- сходимости для обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями и достаточными гладкими коэффициентами получен Я.Д.Тамаркиным. Значительно позже М.Стоун получил аналогичный результат для оператора с сум­ми­руемыми коэффициентами. А.П. Хромов распространил теорему равносходимости Тамаркина на интегральные операторы, ядра, которых обобщают свойства функции Грина дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями.

В основе выше перечисленных работ лежал резольвент- ный метод и получение в этих работах равносходимости явля­ются блок–равно сходимостями (равносходимость со скобками).

Одним из методов изучения дифференциальных опера­торов является\_метод разработанный В.А.Ильиным. Им было выявлено, что при наличии бесконечного числа присое­ди­нен­ных функций свойства базисности и равносходимости, в отличие от свойства полноты, существенно зависит от выбора корневых функ­ций, а также не определяется только конкретным видом краевых условий. На эти свойства влияют также значения коэф­фициентов дифференциального оператора, причем, эти свойст­ва изменяются при каком угодно малом изменении значений коэффициентов в метриках тех классов, которых заданы эти коэф­фициенты. Следовательно, этой ситуации нельзя сфор­му­лировать условия базисности и равносходимости в терминах краевых условий.

В связи с этим, В.А.Ильиным была предложена новая трактовка корневых функций, которые понимаются как регулярные решения соответствующего уравнения со спек- тральным параметром безотносительно к виду краевых условий. Она позволяет рассматривать произвольные краевые условия (как локальные, так и нелокальные), системы функций, не связанные какими-либо краевыми условиям и, а также некоторые системы, полученные объединением подмножеств корневых функций двух различных краевых задач.

В работах В.А.Ильина рассматривалась систем корневых функций обыкновенного дифференциального оператора и при определенных естественных условиях доказаны теоремы о равномерной равносходимости и базисности на компакте. Дальнейшее изучение этих и других вопросов спектральной теории дифференциальных операторов развивались в работах В.А.Ильина и его последователей В.В.Тихомирова, Ш.А.Алимов, И.Йо, И.С.Ломова, В.И.Каморника, Н.Б.Керимова, В.Д.Будаева, Н.Лажетича, В.М.Курбанова, Л.В.Крицковаи других.

В последнее время интенсивно исследуется зависимость скорости сходимости и равносходимости от различных характеристик и получен ряд важных результатов в работах В.M.Курбанова и А.Т.Гараевой, В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова, И.С.Ломоваи А.С.Маркова. Дифференциальные операторы второго и третьего порядка более основательно исследованы в работах В.M.Курбанова и А.Т.Гараевой, И.С.Ломова, А.Т.Гараевой, А.Т.Гараевой и Э.Б.Ахундовой.

Представляет интерес дальнейшее исследование этих и других вопросов для дифференциальных операторов более высокого порядка методом В.А.Ильина.

**Цель и задачи исследования.** Исследовать вопросы абсолютной и равномерной сходимости и скорости равномерной равносходимости на компакте спектральных разложений по корневым функциям обыкновенного дифферен-циального оператора четного порядка.

 **Методы исследования.** В работе применяются методы спектральной теории дифференциальных операторов, теории функционального анализа и теории гармонического анализа.

**Основные положения, выносимые на защиту.**

* Результаты исследования вопросов об абсолютной схо­ди­мости, скорость равномерной сходимости ортогонального раз­ложения по собственным функциям обыкновенного диф­фе­ренциального оператора произвольного четного порядка с суммируемыми коэффициентами.
* Результаты исследования вопросов об абсолютной и равно­мерной сходимости биортогональных разложений функ­ций из класса  по корневым функциям диффе­рен­ци­ального оператора четного порядка с гладкими коэффициентами.
* Результаты исследования влияния интегрального модуля непрерывности коэффициента при *(2m-2)-ой* производной на скорость равномерной равносходимости биортогонального разложения с обычным тригонометрическим рядом Фурье.
* Результаты исследования скорости равномерной равно- сходимости на компакте для функций из функциональных пространств Соболева, Никольского, Бесова.

**Научная новизна исследования.** В диссертации полу-чены следующие результаты:

* Исследована абсолютная и равномерная сходимость спект­раль­ного разложения функции из класса ,,, по собственным функциям обыкновенного диффе­рен­циального опе­ра­тора *2m-го* порядка и оценен остаток этого разложения в метрике 
* Найдена скорость равномерной равносходимости на ком­пакте спектрального разложения функции из класса  по соб­с­твенным функциям обыкновенного дифференциального опе­ра­тора *2m-го* порядка с тригонометрическим разложением Фурье.
* Доказаны теоремы об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных разложений функций из класса  по системе корневых функций обыкновенного диффе­рен­циального оператора *2m-го* порядка с гладкими коэф­фициентами и установлена скорость равномерной сходимости.
* Доказаны теоремы о равномерной равносходимости на компакте с тригонометрическим рядом разложений в биорто-гональный ряд произвольной функции из класса  по корневым функциям обыкновенного дифференциального опера-тора *2m-го* оператора с суммируемыми коэффициентами. Оценены скорости равномерной равносходимости для функций из различных функциональных классов ().

**Теоретическая и практическая ценность исследова-ния.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов; при обосновании методом Фурье решения задач математической физики и в теории аппроксимации функции.

**Апробация работы и применение.** Основные резуль-таты диссертации докладывались: на Международной конфе-ренции посвященной 55-летию Института Математики и Механики (Баку,2014); на Международной конференции Азербайджан-Турция-Украина МАДЕА7 (Баку, 2015); Internatio- nal Workshop on “Non-harmonic Analysis and Differential Operators” (Baku, 2016); на Международной Научной Конференции посвященной 55-летию Сумгаитского (Сумгаит, 2017); на Республиканской Научной Конференции “Актуальные проблемы Математики и Механики” (Баку, 2018); An International Workshop Dedicated to the 80th anniversary of an academician Mirabbas Geogja oglu Gasymova “Spectral Theory and its Applications” (Baku,2019); Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компютерных наук (Россия, г. Махачкала, 2019 г.), на семинаре кафедры «Математический анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.А.Алиев) Азербайджанского Государственного Педаго- гического Университета, на семинаре отдела «Функциональный анализ» (рук. д.ф.-м.н., проф. Г.И.Асланов) Института Мате­ма­тики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

 **Личный вклад автора.** Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

**Публикации автора.** Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приводится в конце автореферата.

 **Наименование учреждения, где выполнена диссерта-ционная работа.** Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

 **Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).** Общий объем диссертационной работы –2137000 знаков (титульная страница – 320 знаков, содержание 2180 знаков, введение – 54000 знаков, первая глава – 110000 знаков, вторая глава – 46000 знаков, заключение – 1200). Список используемой литературы состоит из 88 наименований.

**СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

 Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации.

 В первой главе диссертации исследуется сходимость спектральных разложений функций из класса  по собственным функциям обыкновенного дифферен- циального оператора четного порядка с суммируемыми коэффициентами. Устанавливаются достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости, оцениваются скорость равномерной сходимости на этих разложений.

В этой главе так же изучаются вопросы равномерной равносходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четвертого порядка с тригонометрическим рядом. Для функции из классов в  устанавливается скорость равномерной равносходимости на любом компакте .

 В параграфе 1.1 на интервале рассматривается дифференциальный оператор



с вещественными коэффициентами , , .

Обозначим черезкласс функций, абсолютно непрерывных вместе со своим производными до *(2m-1)-*го порядка включительно на отрезке.

Под собственной функцией оператора  отвечающей собственному значению  будем понимать любую тождественно не равную нулю функцию, удовлет-воряющую почти всюду в  уравнению  (см.[14]).

 Пусть полная ортонормированная в  система, состоящая из собственных функций оператора , а  соответствующая система собственных значений, причем 

Через  обозначим класс абсолютно непре-рывных на  функций , для которых.

Обозначая,  введем частичную сумму ортогонального разложения функции  по системе :



 Главным результатом данного параграфа является следующая теорема.

 **Теорема 1.** *Пусть система  равномерно ограни-чена, и выполняются условия*

** (1)

** (2)

 *Тогда спектральное разложение функции  по систе-ме  сходится абсолютно и равномерно на*  *и справедлива оценка*

 (3)

*где  модуль непрерывности в* *,  не зависит от функции .*

 Отметим, что подобные результаты для оператора вто­ро­го порядка установлены в работах Н.Б.Лажетича, В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова, А.Т.Гараевой а для оператора четвертого порядка данная теорема доказана в работе Я.И.Гусейновой.

 Из теоремы 1 следует ряд следствий:

**Следствие 1.** *Если в теореме 1 функция  удовлетворяет условию , то условие (1) выполняется заведомо (с константой ) и её спектральные разложение сходится абсолютно и равномерно на отрезке .*

**Следствие 2.** *Если в теореме 1 функция  удовлетворяет условиям  и , (\_класс Никольского), то её спектральное разложение схо­дится абсолютно и равномерно на  и выполняется оценка*

**

*где .*

**Следствие 3.** *Если в теореме 1 функция  удовлетворяет условиям  и* * то её спектральное разложение сходится абсолютно и равномерно на  и выполняется оценка*

**

 В параграфе 1.2. исследуется сходимость спектральных разложений функций из класса , по собст­вен­ным функциям обыкновенного дифференциального опера­тора ** четного порядка с суммируемыми коэффициентами. Найдены достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости, оце­нена скорость равномерной сходимости на  этих разложений.

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть функция  принадлежащая классу , , и система  удовлетворяют условию*

** (4)

*Тогда спектральное разложение функции  по системе  сходится абсолютно и равномерно на  и для остатка  справедлива оценкагде,,,; и постоянная const не зависит от f(x).*

 **Следствие 4.** *Если в теореме 2 константа  равна нулю или , то справедлива оценка*

 ** (6)

 **Следствие 5.** *Если в теореме 2 функция , удовлетворяет условию , то условие (4) выполняется заведомо и справедлива оценка*

** (7)

*Причем const не зависит от , т.е. для функций , их спектральное разложение по собственным функциям полуограниченного самосопряженного оператора L сходится на  абсолютно и равномерно, и для таких функций имеет место оценка (7).*

Для доказательства сформулированных выше результатов необходимо оценить коэффициенты Фурье  функции , удовлетворяющей условию (4).

 Обозначим через , , различные корни -й степени из единицы, причем .

 **Лемма 1.** *Для коэффициентов Фурье функции , удовлетворяющей условию (4), имеет место оценка ():*

**

**

** (8)

 Отметим, что в работе Н.И.Лажетича, рассматривался оператор Штурма-Лиувилля  с двух­точечными самосопряженными краевыми условиями (коэф­фициенты в краевых условиях действительные) и при условии  доказана абсолютная и равномерная сходимость на  разложений функций  из класса   по ортонормированным собственным функциям дан­ного оператора. Также доказано, что скорость равномерной схо­­димости имеет порядок , , где -порядок час­тичной суммы спектрального разложения функции *f(x.)* При дополнительном условии  для ско­рос­­ти равномерной сходимости установлен порядок В работах В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова рассматривался оператор *L* с вещественным потенциалом  не связанный с конкретными краевыми условиями (в частности допускаются и самосопряженные краевые условия с комплексными коэффициентами). Для функций  удовлет-воряющих условию *f(0)=f(1)=0* получены результаты, совподяющие при *p>1* с утверждениями следствий 4 и 5.

В параграфе 1.3 изучается сходимость разложения функции ** по системе собственных функций того же оператора *L,* без требовании равномерной ограниченности системы собственных функций  .

**Теорема 3.** *Пусть  принадлежит классу  выполняется условие (4) и неравенство (2).*

*Тогда спектральное разложение функции  по системе  сходится абсолютно и равномерно на и справедлива оценка*

(9)

* модуль непрерывности в* *, const не зависит от функции f(x) .*

 **Следствие 6.** *Если в теореме 3 функция  удовлетворяет условию , то условие (4) выполняется заведомо (с константой C1(f)=0) а ее спектральное разложение по системе  сходится абсолютно и равномерно на отрезке  и справедлива оценка*



 **Следствие 7.** *Если в теореме 3 функция  удовлетворяет условию  и , , (-класс Никольского), то условия (4), (2) заведомо выполняются, а ее спектральное разложение по системе  сходится абсолютно и равномерно на и справедлива оценка*

** (10)*,const не зависит от функции.*

 **Следствие 8*.*** *Если в теореме 3 функция  удовлетворяет условию  и  ,,  то условия (4), (2) за-ведомо выполняются, а ее спектральное разложение по сис-теме  сходится абсолютно и равномерно на . При этом справедлива оценка*

** (11)

 Доказательства выше сформулированных результатов опираются на следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 2.** *Для коэффициентов Фурье  функции , удовлетворяющей условию (4), справедлива оценка ()*

**

** (12)

 **Лемма 3.** *Пусть функция  удовлетворяет условию (2). Тогда справедлива оценка*

** (13)

*где  положительная постоянная не зависящая от  и функции .*

В следующем параграфе результаты, полученные в параграфах 1.1.-1.3. применяются к некоторым конкретным диф­ференциальным операторам.

В параграфе 1.5. рассматривается дифференциальный оператор четвертого порядка на интервале  Изучаются вопросы равномерной равносходимости спектрального разло­жения по собственным функциям данного оператора с триго­нометрическим рядом. Для функции из классов , установлена скорость равномерной равносходимости на любом компакте .

Рассмотрим на интервале  формальный диффе-ренциальный оператор



с суммируемыми вещественными коэффициентами 

Пустьполная ортонормированная в  система, состоящая из собственных функций оператора *L*, а ,  соответствующая система собственных значений.

Введем частичную сумму спектрального разложения функции  по системе :

**

 Обозначим  где  час­тич­ная сумма тригонометрического ряда Фурье функции , т.е.



 Если  при , то будем говорить, что разложения функции  в ортогональный ряд по системе  и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на компакте .

Основные результаты данного параграфа сосредоточены в следующих теоремах.

**Теорема 5.** *Пусть функция , и система  удовлетворяют условию*

** (14)

 *Тогда разложение функции  в ортогональный ряд по сис­теме  и в тригонометрический ряд Фурье равн­о­мерно равносходятся на любом компакте  и справедлива оценка*

, (15)

*где* , *если система  равномерна ограничена;* *, если система  не является равномерной ограниченной.*

**Теорема 6.** *Пусть  выполняются условия (14) и (2). Тогда разложения функции  в ортогональный ряд по системе  и в тригонометрический ряд Фурье рав­но­мерно рав­носходятся на любом компакте*  *и* *справедлива оценка (15).*

На основе доказательств теорем 5. и 6. лежат формула среднего значения для собственных функций  и оценки (9), (12) при *m=2* для коэффициентов Фурье  функции 

Во второй главе диссертации рассматривается обыкно-венный дифференциальный оператор четного порядка на интервале *G=(0,1).* Исследуются абсолютная и равномерная сходимость на  биортогонального разложения функции из класса  по собственным и присоединенным функциям данного оператора. А также исследуются вопросы равномерной равносходимости на компакте биортогонального разложения функции из класса,  , c тригонометрическим рядам Фурье. Оценивается скорость равномерной равносходимости на компакте, изучается влияние модуля непрерывности коэффициента  на скорость равносходимости.

В параграфе 2.1. данной главы диссертации рассматри-вается обыкновенный дифференциальный оператор



с комплекснозначными коэффициентами  Изучается абсолютная и равномерная сходимость биор­то­гонального разложения функции *f(x)* из класса , удов­лет­воряющей условию *f(0)=f(1)=0,* по собственным и при­соединенным функциям данного оператора и оценивается ско­рость равномерной сходимости этого разложения на .

 Рассмотрим произвольную систему ** состоящую из собственных и присоединенных функций оператора *L*, отвечающую системе собственных значений ** и потребуем чтобы вместе с каждой корневой функцией порядка ** это система содержала также соответствующие ей корневые функции порядка меньше *r* и ранг собственных функцией был равномерно ограничен. Это означает, ** и удов­лет­воряет почти всюду в *G* уравнению

,

 где  равно либо 0 (в этом случае **-собственная функция), либо 1 (в этом случае требуем ** называем ** присоединенной функцией). Обозначим через** где , 

Через  обозначим формально сопряженный оператор к оператору *L*  т.е.



требовать, что система ** удовлетворяет следующим условиям, которые мы будем называть условиями А:

 1) система ** полна и минимальна в **

 2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

 (16)

** (17)

 3) система ** биортогонально сопряженная к ** является системой корневых функций формально сопряженного оператора , т.е.



4) выполняются следующие анти-априорные оценки

 (18)

 (19)

5) существует постоянная  такая, что

 (20)

6) для любого выполняются оценки

** (21)

** (22) 

Для произвольной функции  введем частич­ную сумму ее биортогонального разложения по системе **

**

 Главным результатом данного параграфа является следующая теорема об абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложения.

**Теорема 7.** *Пусть выполняются условия А и функция*  *удовлетворяет условию*  *Тогда биор­то­гональное разложение функции*  *сходится абсо­лютно и равномерно на отрезке*  *и справедлива оценка*

 (23)

 *и const не зависит от функции f(x).*

**Следствие *9.*** *Пусть выполняются условия А****.*** *Тогда биортогональное разложение функции*   *сходится абсолютно и равномерно и справедливы оценки:*

 ( 24)

  (25)

*где const не зависит от f(x), символ «о» зависит от функции f(x).*

В параграфе 2.2 исследуются вопросы равномерной равносходимости на компакте спектрального разложения по корневым функциям дифференциального оператора четного порядка с тригонометрическим разложением. Выявляется зависимость скорости равномерной равносходимости от модуля непрерывности коэффициента при ой производной в данном операторе. Исследование проводятся методом В.А.Ильина.

Равномерная равносходимость на компакте исчер­пы­вающим образом исследована в работах В.А.Ильина, В.М.Кур­банова дифференциального оператора произвольного порядка. Влияние степени суммируемости коэффициентов диффе­рен­циального оператора на скорость равносходимости изучались в работах В.М.Курбанова, И.С.Ломова.

Отметим, что в работах В.М.Курбанова установлены оценки равномерной равносходимости в терминах интегральных модулей непрерывности разлагаемых функций.

 Зависимость скорости равномерной равносходимости от модулей непрерывности потенциала одномерного оператора Шредингера изучена в работах В.М.Курбанова и Р.А.Сафарова В.М.Курбанова и А.Т.Гараевой. В данном параграфе мы распространяем эти результаты на случай произвольного дифференциального оператора четного порядка.

Рассмотрим на интервале  оператор *L* с комплекснозначными коэффициентами ,, и пусть система , состоящая из его корневых функций, удовлетворяет условиям *Ap* (условия В.А.Ильина):

1) система  замкнута и минимальна в  при фиксированном;

2) выполняются условия Карлемана и «сумма единиц»

 

,

3) для любого компакта  существует постоянная такая, что

 , где    биортогонально сопряженная система к системе , .

Вводим следующие обозначения:





где -коэффициенты Фурье функции  по нормированной в  тригонометрической системе;

где -модуль непрерывности функции  в ;

;

 

;

;

где  целая часть число  .

Пусть  не убывающая, не прерывная функция на  и удовлетворяет условиям

 а)  при ; b)  не возрастает.

Через , обозначим множество функций из  удовлетворяющих условию , где -постоянная зависящая от . Норма в  определяется равенством

.

А через , обозначим класс функций Бесова с нормой

.

Отметим что,  при  (-класс функций Никольского).

**Теорема 8.** *Пусть ,  и система  удовлетворяет условиям . Тогда разложения произвольной функции  в биортого­наль­ный ряд по системе  и в тригонометрический ряд Фурье равномерно равносходятся на любом компакте , т.е.*

 (26)

*и справедливы оценки*

 *при* ; (27)

 *при*  (28)

*где*, *положительные постоянные не зависящие от  и*.

**Теорема 9.** *Пусть выполняются условия теоремы 8 при и для коэффициентов  функции  выпол-няется оценка*

 . (29)

*Тогда при  справедлива оценка*

 (30)

*а при справедлива оценка*

 (31)

*где постоянные ,  не зависят от  и .*

Из теоремы 9 следуют следующие следствия.

**Следствие 10.** *При условиях теоремы 9 справедливы оценки*

при  (32)

 (33)

*если  где .*

**Следствие 11*.*** *Пусть  и выполняются условия теоремы 9. Тогда для любой функции  выполняется оценка*

**** (34)

*а если дополнительно требовать, что , , , то при  выполняется оценка*

 (35)

*где , символ «O» зависит от функции . В частности при ,  справедлива оценка*

 ** (36)

В заключении, выражаю глубокую благодарность науч­ному руково­ди­телю профессору В.М.Курбанову за постановку задачи, постоянное внимание и полезные советы к работе.

**ВЫВОД**

* Исследована абсолютная и равномерная сходимость спектрального разложения функции из ,,, по собственным функциям обыкновенного дифференциального оператора *2m-го* порядка и оценен остаток этого разложения в метрике 
* Найдена скорость равномерной равносходимости на ком­пак­те спектрального разложения функции из класса  по собственным функциям обыкновенного дифференциального опе­ратора *2m-го* порядка с тригонометрическим разложением Фурье.
* Доказаны теоремы об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных разложений функций из класса  по системе корневых функций обыкновенного диффе­рен­циального оператора *2m-го* порядка с гладкими коэф­фициентами и установлена скорость равномерной сходимости.
* Доказаны теоремы о равномерной равносходимости на ком-пакте с тригонометрическим рядом разложений в биортого-нальный ряд произвольной функции из класса  по корневым функциям обыкновенного дифференциального опера-тора *2m-го* оператора с суммируемыми коэффициентами. Оце-нены скорости равномерной равносходимости для функций из различных функциональных классов ().

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**

1.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. О скорости равномерной равно-схо­димости разложения по собственным функциям дифференциаль­но­го четного порядка. //Актуальные проблемы математики и меха­ники. Материалы международной конференции посвященной 55-летно Института Математики и Механики, -Bakı: -2014. - с.250-251

2.Годжаева (Мехдизаде), Х.Р. Сходимости спектрального разло-жения функции из класса  по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Известия Педагогического Университета, -Bakı: -2015. №2, -c. 35-38.

3.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On convergence of spectral expansion in eigen functions of an even order differential operator. // Mathematical Analysis. Differential Equations and their applications. Madea-7. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference, - Baku: -2015. -pp.97.

4. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. İnfluence of summability degree of the expanded function on equiconvergence rate for differential operator even order. // İnternational Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators, Baku: -2016. May 25-27; - pp.66.

5. Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. Convergence of biorthogonal expansion of a function  in eigen an associated functions of even order ordinary differential operator // Proceeding of the Institute of Mathematics and Mechanics. NAS of Azerbaijan, - 2017. v.43, №2, - pp. 252-260.

6.Kurbanov, V.M., Gojayeva, X.R. On influence of modulus of continuty of the coefficient  on uniform equiconvergence rate for an even order differential operator. // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, -2017. v.XXXVII, №4. -pp77-86.

7.Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения функ-ции из класса  по собственным функциям дифференциаль-ного оператора четного порядка. Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq Elmi Konfransın materialları. –Sumqayıt: -2017. -s.71-72.

8.Годжаева, Х.Р. О сходимости биортогонального разложения по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора четного порядка. “Riyaziyyatın və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, May; 17-18 . -Bakı: -2018. - s.145-146.

9.Годжаева, Х.Р. О скорости равносходимости спектрального разложения с тригонометрическим рядом для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка. // Известия Педагогического Университета, - Bakı: -2019. №1, - c.1-16.

10.Годжаева, Х.Р. О скорости равномерной равносходимости на ком­пакте для обыкновенного дифференциального оператора чет­вер­того порядка. // XIII Международная конференция Фун­да­мен­таль­ные и прикладные проблемы математики и информатики, приу­роченная к 55-летию ФМиКН ДГУ, - Махачкала: -2019 г. - с.56-57.

11.Курбанов, В.M., Годжаева, Х.Р. О сходимости спектрального разложения по собственным функциям дифференциального оператора четного порядка. // Дифференциальные уравнения, - 2019, т.55, №1, - с.10-24.

12. Kurbanov, V.M., Gojayeva X.R. On equiconvergence rate of spectral expansion in eigen function of even order differential operator with trigonometric series.//Spectral Theory and Its Applications, An International Workshop dedicated to the anniversary of an academician Mirabbas Geogja oglu Gasymov,-Baku: -2019.–pp.101-102.

Защита диссертации состоится 31 мая 2021 года в 1400 часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам 26 апреля 2021 года.

Подписано в печать: 26.04.2021

Формат бумаги: 60х84 1/16

Объём: 80000

Тираж: 70