AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN HİLL OPERATORU ÜÇÜN DÜZ VƏ TƏRS MƏSƏLƏLƏR

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Rakib Feyruz oğlu Əfəndiyev**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2021

Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Qeyri-harmonik analiz” şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Həmzağa Davud oğlu Orucov

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Məmməd Bayramoğlu

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov

riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Mahir Mirzəxan oğlu Səbzəliyev

riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nigar Məhər qızı Aslanova

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA–nın müxbir üzvü, f–r.e.d., professor

_________________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.–r.e.n.
_________________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA–nın həqiqi üzvü, f.–r.e.d., professor

_________________ **Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. İş kompleks qiymətli periodik potensiallı Şredinqer tənliyi üçün müxtəlif qoyuluşlarda duz və tərs məsələlərin həllinə həsr olunmuşdur.

Riyazi fizikanın müxtəlif bölmələrində xüsusi ilə qeyri Ermit kvant mexanikasında və kristallar nəzəriyyəsində kompleks qiymətli periodik əmsallı diferensial operatorların öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Qeyri Ermit kvant mexanikasının əsas ideyası eksperiment zamanı müşahidə olunan kəmiyyətlərin qiymətlərinin kompleks ədədlərlə deyil, həqiqi ədədlər vasitəsi ilə təsvir edilməsidir. Ona görə də hər bir müşahidə olunan kəmiyyətə əsas vektorlar fəzasında təsir edən operator qarşı qoyulur ki, onun məxsusi ədədi müşahidənin nəticəsi olur. Ona görə də bizim operatordan tələbimiz onun məxsusi ədədlərinin həqiqi olmasıdır.

Qeyri Ermit kvant mexanikasının realizasiyası onun Ermit qoşmasının PT-simmetrik çevirmə ilə əvəz olunmasıdır.

P-simmetriya çevirməsi (koordinatların əks olunması) koordinat operatorunun qarşısında işarənin dəyişməsindən, T-simmetriya çevirməsi (zamanın dəyişməsi) isə impulsun qarşısındakı işarənin dəyişməsində, i -nin ($-i$) ilə əvəz olunmasındadır.

Dissertasiya işində istifadə oluna potensial

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx},$$

şəklində olub $q_n=\overline{q_n}$ şərti ödəndikdə PT- simmetrik olur, yəni $q(x)=\overline{q(-x)}$ şərti ödənir. Bu potensiallar ilk dəfə M.G.Qasımov tərəfindən tədqiq edilmişdir. Müxtəlif qoyuluşlarda (1) potensiallı Şredinger tənliyi H.M. Hüseynov K.Shin, R.Carlson, V.Guillemin və A.Uribe , L.Pastur və V.Tkachenko, Феган, E.Orucov və Ə.Orucov tərəfindən öyrənilmişdir.

Dissertasiya işi əsasən 3 istiqaməti əhatə edir.

1. Yüksək tərtib kompleks periodik potensiallı operatorlar və diferensial operatorlar dəstəsi uçun tərs məsələlər öyrənilir. Bu tip məsələlər özünə məxsus mürəkkəbliyi ilə seçilir. Belə ki, baxılan

halda çevirmə operatorları üçün Qursa məsələsi qeyri korrekt olur və yalnız analitik əmsallı tənliklər üçün bu məsələnin həlli haqqında danışmaq olar. Bu baxımdan çevirmə operatorları olan adi diferensial operatorlar sinfinin seçilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

2. Müxtəlif növ kəsilən kompleks qiymətli periodik potensiallı diferensial operatorlar üçün tərs məsələlər öyrənilir. Kvant fizikasında vacib tətbiqləri nəzərə alaraq bu məsələlərin spektral xarakteristikaları maraq kəsb edir. Bir qayda olaraq bu tip məsələlər mühitin fiziki xarakteristikalarının kəsilən xarakteristikaya malik olmasından irəli gəlir.

3. Kvant qraflarında səpilmə məsələləri öyrənilir. Kvant qraflarında Hill məsələsi elmin müxtəlif sahələrində meydana gəlir. Bu məsələlərə dalğa ötürücü sistemlərdən, neyron şəbəkələrdən tutmuş Laplasyanın Riman coxobrazlarda diskret-kəsilməz aproksimasiyasına qədər olan müxtəlif məsələlərdə rast gəlmək olar.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti öz-özunə qoşma olmayan operatorların spektral analizidir. Buraya müxtəlif qoyuluşlarda periodik, kompleks potensiallı Hill operatoru üçün düz və tərs məsələlər aiddir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Xarakterizasiya məsələsinin, yəni diferensial operatorlar dəstəsi üçün tam tərs məsələnin həll edilməsi; spektral parametr tənliyə polinomial şəkildə daxil olan yüksək tərtib diferensial operatorlar üçün tərs məsələnin həlli və onun spektral xarakteristikalarının tədqiqi; Hill operatoru üçün iki spektrə görə indefinit spektral məsələnin tədqiqi; kəsilən sürətli dalğa tənliyi üçün tərs məsələnin həlli; delta potensiallı diferensial operatorlar dəstəsinin köməkliyi ilə qeyri-konservativ mühitdə dalğaların yayılmasının tədqiqi; budaqlanan simlərdə dalğaların yayılmasının kvant qraflarında Şredinger tənliyinin spektral xarakteristikalarının köməkliyi ilə tədqiq olunması.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində operatorların spektral nəzəriyyəsi, kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər və riyazi fizika tənliklərinin metodlarında istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- Operatorlar dəstəsi üçün tam tərs məsələnin həlli;

- Spektral parametrin tənliyə polinomial daxil olan halı üçün yuksək tərtib diferensial təhliklər üçün tərs məsələlər;
- Müxtəlif tipl kompleks qiymətli periodik potensiallı kəsilən diferensial operatorlar üçün tərs məsələlərin həlli;
- Kompleks qiymətli periodik potensiallı diferensial operatorlar üçün kvant qraflarında səpilmə məsələsinin həlli.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

- Verilmiş kompleks ədədlər ardıcıllığının uyğun olaraq ikinci tərtib operatorlar dəstəsinin və yüksək tərtib diferensial operatorların spektral verilənləri olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılıb.
- Spektral parametri tənliyə polinomial daxil olan 2n tərtibli adi diferensial tənlik üçün duz və tərs məsələ həll edilmişdir. Göstərilmişdir ki, operatorlar dəstəsinin spektri kəsilməzdir , $\{k\omega_j : 0 \le k \le \infty, j = \overline{0.2m-1}\}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{n}\right)$, oxlarını doldurur və burada $\frac{n\omega_j}{2}, j = \overline{0.2m-1}, n = 1,2,3,\ldots,$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər. Ümumiləşdirilmiş normallaşdırıcı ədədlərə görə əmsalların yenidən bərpası kimi tərs məsələ həll olunmuşdur.
- Kompleks qiymətli, periodik potensiallı Şredinger operatoru üçün bütün oxda tərs məsələ həll olunmuşdur. Fundamental həllərin əsas xarakteristikaları öyrənilmiş, operatorun spektri araşdırılmışdır. Tərs məsələnin qoyuluşu formalaşdırılmış, onun üçün yeganəlik teoremi isbat edilmiş, tərs məsələnin həlli üçün konstruktiv alqoritm verilmişdir.
- Klassik Hill operatoru üçün alınmış nəticələr ulduz və ilmə şəkilli qraflara genişləndirilmişdir. Bu tip qraflarda xüsusi sərhəd şərtləri və qrafın təpə nöqtəsindəki tikmə şərtlərinin köməkliyi ilə Hill operatoru təyin olunmuşdur. Operatorun rezolventi aşkar şəkildə yazılmış, spektri dəqiq araşdırılmış və əks olunma əmsalına görə tərs məsələ həll olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Kompleks potensiallı Hill operatoru üçün müxtəlif qoyuluşlarda duz və tərs məsələlərin tədqiqi üçün riyazi metodlar verilmişdir. İlk dəfə olaraq kompleks, periodik potensiallı operatorlar dəstəsi üçün tam tərs məsələ tədqiq edilmiş, normallaşdırıcı ədədlərə görə spektral parametr polinomial şəkildə tənliyə daxil olan halda yüksək tərtib operatorlar üçün tərs məsələ həll edilmişdir. Müxtəlif növ kəsilən tərs məsələlər tədqiq olunmuşdur. Klassik Hill operatoru üçün alınmış nəticələr kvant qraflarına ümumiləşdirilmişdir. Dissertasiya işində alınmış nəticələr riyazi və kvant fizikasının tərs və duz məsələlərində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun elmi seminarında (rəhbər akad. F.Q.Maqsudov); "Qeyri-harmonik analiz" (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov), "Funksional analiz" (prof. H.İ.Aslanov) və "Diferensial tənliklər" (prof. Ə.B.Əliyev) şöbələrinin seminarlarında, Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi riyaziyyat Elmi Tədqiqat İnstitutunun elmi seminarında (rəhbər akad. F.Ə.Əliyev); Bakı Dövlət Universitetinin Tətbiqi Riyaziyyat kafedrasının seminarında (rəhbər akad. M.G.Gasımov); Fransa Respublikasının Nant Universitetinin riyaziyyat bölümünün elmi seminarında (rəhbər prof. Nachaoui A.); İspaniya krallığının Valensiya Politexnik Universitetinin riyaziyyat bölümünün elmi seminarında (rəhbər prof. Luis Garsia Raffi); Çex Respublikasının Masaryuk Universitetinin diferensial tənliklər üzrə elmi seminarında (rəhbər prof. Zuzanna Dosla); İngiltərə krallığının Keele Universitetinin riyaziyyat bölümünün elmi seminarında (rəhbər prof. Y.Kaplunov) məruzə edilmişdir.

Bundan əlavə aşağıdakı elmi konfranslarda məruzə edilmişdir:

Akad. M.M.Lavrentyevin 70 illik yubileyinə həsr olunmuş "Tərs və qeyri korrekt məsələlər"ə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Rusiya, Novosibirsk, 5-9 avqust, 2002); 38-ci İran riyaziyyat konfransında (İran, Zəncan, 3-10 sentyabr, 2007); Turk dunyası riyaziyyat cəmiyyətinin III konfransında (Azərbaycan, Bakı, 30 iyun-4 iyul, 2009); "Riyazi analiz, diferensial tənliklər və onların tətbiqləri" Bolqar-Turk-Ukrayna elmi konfransında (Bolqariya, 15-20 sentyabr, 2010); V.E.Lyançenin 90 illiyinə həsr olunmuş funksional analizin problemlərinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Ukraina, Lvov, 3-10 noyabr, 2010); Turk dunyası riyaziyyat cəmiyyətinin IV konfransında (Azərbaycan , Bakı, 11-13 iyul, 2018).

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqatın məqsədini göstərməkdən və istiqamətinin seçilməsindən ibarətdir. Bundan əlavə, alınan bütün nəticələr və tədqiqat üsulları şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiya üzrə müəllifin 35 elmi işi, Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 24 məqalə, 11 tezisi nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işi titul səhifə (645), mündəricat (3524), giriş (75000), dörd fəsil (birinci fəsil – 122000 işarə, ikinci fəsil – 38000 işarə, üçüncü fəsil – 76000 işarə, dördüncü fəsil – 84000 işarə), nəticə (1832) və 140 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi – 401.001 işarə sayıdır.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Giriş hissəsində dissertasiya mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış, tədqiqat işinin məqsəd və qısa xülasəsi verilmişdir.

Dissertasiya işinin **birinci fəsli** xarakterizasiya məsələsinin, qurulan potensialın müəyyən sinfə aid olması üçün səpilmə verilənləri üzərinə zəruri və kafi şərtlərin tapılması məsələsinin həllinə həsr olunub.

R həqiqi oxundan 2π $L_2[0,2\pi]$ fəzasına daxil olan kompleks qiymətli funksiyaları özündə saxlayan Q^2 sinfi və onun alt sinfi

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx}, \qquad (1)$$

funksiyalarından ibarət Q_+^2 sinfi təyin edilir.

Tədqiqat obyekti öz-özünə qoşma olmayan L operatorlar dəstəsidir. Bu L operatorlar dəstəsi $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv-\frac{d^2}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)-\lambda^2 \tag{2}$$

diferensial ifadəsi ilə təyin olunur, burada $p(x),q(x)\in Q_+^2$, və

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot|p_n| = p<\infty;\quad \sum_{n=1}^{\infty}|q_n| = q<\infty \tag{3}$$

şərtləri ödənilir, λ isə kompleks parametrdir.

1.1.2-də $Ly=0,$ tənliyinin həllərinin xassələri tədqiq olunur, bunun üçün isə

$$-y''(x)+2\lambda p(x)y(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x) \tag{4}$$

tənliyinin fundamental həlləri qurulur.

Teorem 1. Fərz edək ki, $p(x),q(x)$ potensialları Q_+^2 sinfinə aiddirlər və onlar üçün (3) şərti ödənilir. Onda (4) diferensial tənliyinin xüsusi həlləri var və onlar

$$f^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{V_{n\alpha}^{\pm}}{n\pm 2\lambda}e^{i\alpha x}\right) \tag{5}$$

şəklindədirlər. Burada $V_n^{\pm}$, $V_{n\alpha}^{\pm}$ ədədləri üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|;\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|V_n^{\pm}\right| \tag{6}$$

sıraları yığılır.

(5) ifadəsindən görunur ki, $f^{\pm}(x,\lambda)$ funksiyaları λ parametrinə görə holomorf olub $\lambda=\pm\frac{n}{2}, n=1,2,3\ldots$ nöqtələrində birinci tərtib polyusa malikdirlər.

Lemma 1. $\lambda\neq 0, \lambda\neq\pm n/2,$ qiymətlərində $f^{\pm}(x,\lambda)$ funksiyaları (4) tənliyinin fundamental həllər sistemini təşkil edir.

Göstərilmişdir ki,

$$f_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\pm n/2}(n\pm 2\lambda)f^{\pm}(x,\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}e^{-i(n/2)x} \qquad (7)$$

funksiyası üçün

$$f_n^{\pm}(x)=S_n^{\pm}f^{\mp}(x,\mp n/2).. \qquad (8)$$

münasibəti doğrudur. Buradan düsturların müqayisəsindən asanlıqla

$$S_n^{\pm}=V_{nn}^{\pm} \qquad (9)$$

olduğunu almaq olar.

Tərif 1. (9) düsturunun köməkliyi ilə qurulmuş $\{S_n^{\pm}\}_1^{\infty}$ ardıcıllığı $p(x),q(x)\in Q_+^2$ potensiallı L operatorunun spektral verilənləri adlanır.

Teorem 2 (fəslin əsas teoremi) Verilmiş $\{S_n^{\pm}\}_1^{\infty}$ kompleks ədədlər ardıcıllığının $p(x),q(x)\in Q_+^2$ potensiallı L operatorunun spektral verilənləri olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərin ödənilməsidir.

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}n\left|S_n^{\pm}\right|<\infty \qquad (10)$$

2. Sonsuz determinant

$$D(z)=\det\left\|\delta_{nm}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4s_m^{-}s_k^{+}}{(m+k)(n+k)}e^{i\frac{m+k}{2}z}e^{i\frac{n+k}{2}z}\right\|_{n,m=1}^{\infty} \qquad (11)$$

var, kəsilməzdir, qapalı $\overline{C_+}=\{z:\operatorname{Im}z\ge 0\}$ yarımmüstəvisində sıfıra çevrilmir və $C_+=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ yarımmüstəvisinin daxili nöqtələrində analitikdir.

1.1.3-də əvvəlcə L operatorunun səpilmə nəzəriyyəsinin tərs məsələsinə baxılır. Bunun üçün L operatorunun

$$-y''(x)+2\lambda p(x)y(x)+q(x)y(x)=\lambda^2 y(x).$$

tənliyinin Floke həllərinin tədqiqinə əsaslanan spektral xassələri öyrənilir. $q,p\in Q_{2\pi}^{+}$ funksiyaları yuxarı $\Pi^{+}=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$

yarımmüstəvisinə analitik davam edilə bildiklərinə görə (4) tənliyinə bütün $x \in \Pi^{+}$ dəyişənlərinə görə baxılması məqsədəuygundur.

(4) tənliyində $x = it, \quad \lambda = -i\mu, \quad Y(t) = y(x), \, t \in R^{+}$, əvəzləməsi aparsaq

$$-Y''(t) + 2\mu \, \overline{p}(it)Y(t) + \overline{q}(it)Y(t) = \mu^2 Y(t) \tag{12}$$

tənliyini alarıq ki, burada

$$\overline{p}(t) = ip(it) = i\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{-nt} \tag{13}$$

$$\overline{q}(t) = -q(it) = -\sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{-nt}. \tag{14}$$

şəklindədirlər.

Nəticədə potensialları $t \to \infty$ eksponensial azalan (12) tənliyini almış oluruq. Bu isə tərs məsələlər nəzəriyyəsindən yaxşı məlum olan operator cevirməsi üsulunun tətbiq edilməsin təmin edir. Sonsuzluğa bağlanmış çevirmə operatorunun tərifinə görə (12) tənliyinin $f_{\pm}(t, \mu)$ həlli aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər

$$f_{\pm}(t, \mu) = \Psi^{\pm}(t)e^{\pm i\mu t} + \int_{t}^{\infty} K^{\pm}(t, u)e^{\pm i\mu u} du. \tag{15}$$

(15) və (12) düsturlarını müqayisə etsək

$$K^{\pm}(t, u) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty} V_{n\alpha}^{\pm} e^{-\alpha t} e^{-(u-t)n/2} \tag{16}$$

$$\Psi^{\pm}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{\pm} e^{-nt} \tag{17}$$

olduğunu görərik.

$K^{\pm}(t, u)$- çevirmə operatorunun nüvəsi və $\Psi^{\pm}(t)$ funksiyası bizim halda konstruktiv qurulur.

Beləliklə aşağıdakı teorem isbat edilmiş olur.

Teorem 3. (12) tənliyinin $+\infty$ bağlanmış çevirmə operatorunun nüvəsi $K^{\pm}(t, u), \ u \geq t$ və $\Psi^{\pm}(t)$funksiyası (16)-(17) şəklindədir və

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|V_n^{\pm}\right|$$

sıraları yığılır.
Sonra tərs məsələnin əsas tənliyi çıxarılır.

1.2-də $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında

$$l(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+\sum_{\gamma=0}^{2m-2}P_\gamma(x)y^{(\gamma)}(x) \tag{18}$$

potensialı $P_\gamma(x)\in Q_+^2$ olan diferensial ifadəsi ilə təyin olunmuş L_1 operatoru üçün tam tərs məsələ həll olunur. Burada Q_+^2

$$P_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{\gamma n}e^{inx};\quad \sum_{\gamma=0}^{2n-2}\sum_{n=1}^{\infty}n^\gamma\left|P_{\gamma n}\right|<\infty \tag{19}$$

funksiyalarından ibarət olub $L_2[0,2\pi]$ fəzasına daxil olan, təyin olunma oblastı R, həqiqi oxundan olan bütün $2\pi-$ periodlu kompleks qiymətli funksiyaları özündə saxlayan Q^2 sinfinin alt sinfidir. Bu paraqrafda qoyulmuş məsələnin həlli zamanı istifadə olunan məlum fakt və anlayışlar daxil edilmiş əsas teorem ifadə edilmişdir.

Teorem 4. Verilmiş $\left\{\tilde{S}_{nj}\right\}_{n=1,\,j=1}^{\infty,\,2m-1}$ kompleks ədədlər ardıcıllığının (18) diferensial ifadəsi ilə təyin olunmuş L_1 operatorunun spektral verilənləri olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı şərtlərin eyni zamanda ödənilməsidir.

1) $$\left\{n\,\tilde{S}_{nj}\right\}_{n=1,\,j=1}^{\infty,\,2m-1}\in l_1 \tag{20}$$

2) sonsuz determinant

$D(z) \equiv$

$$\equiv \det \left\| \delta_{rn} E_{2m-1} - \left\| \frac{i(1-\omega_j)\tilde{S}_{nj}}{r\omega_l(1-\omega_j) - n(1-\omega_j)} e^{i\frac{n}{1-\omega_j}z} e^{-i\frac{r\omega}{1-\omega_l}z} \right\|_{j,l=1}^{2m-1} \right\|_{r,n=1}^{\infty} \quad (21)$$

var, kəsilməzdir, qapalı $\overline{C_+} = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ yarımmüstəvisində sıfıra çevrilmir və açıq $C_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ yarımmüstəvisinin daxilində analitikdir.

1.3.1-də bir sinif spektral parametri tənliyə polinomial daxil olan cüt tərtib diferensial tənlik üçün tərs və duz məsələlərə baxılır.

Baxılan $L_2(k)$ operatorlar dəstəsi $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında

$$l(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + \sum_{\gamma=0}^{2m-2} P_\gamma(x,k) y^{(\gamma)}(x) - k^{2m} y(x), \quad (22)$$

diferensial ifadəsi ilə təyin edilmişdir. Burada

$$P_\gamma(x,k) = \sum_{s=0}^{2m-\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_{\gamma sn} k^s e^{inx} \quad (23)$$

və

$$\sum_{\gamma=0}^{2m-2} \sum_{s=0}^{2m-\gamma-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma+s} |p_{\gamma sn}| \quad (24)$$

sırası yığılır, k isə spektral parametrdir.

$L_2(k)$ operatorlar dəstəsinin resolventi qurulmuş və aşağıdakı teoremin köməkliyi ilə spektri tədqiq edilmişdir.

Teorem 5. $L_2(k)$ operatorlar dəstəsinin spektri tamam kəsilməz olub

$$\left\{ k\omega_j : 0 \leq k < \infty;\ j = \overline{0.2m-1}, \omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{m}\right) \right\},$$

oxlarını doldurur, kəsilməz spektrdə $\frac{n\omega_j}{2}, n = 1,2,\ldots$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər vardır. Daha sonra məxsusi ədələrə görə ayrılış yazılmış və tərs məsələ həll edilmişdir.

Fərz edək ki,

$$a_m = \max_{\substack{1\le j\le l\le 2m-1 \\ 1\le n,\ r<\infty}} \frac{\left|(1-\omega_j)(n+r)\right|}{\left|r(1-\omega_j)-n(1-\omega_l)\omega_j\right|},$$

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{2m-1}\sum_{j=1}^{2m-1} n^{2m-2}\left|S_{j\nu n}\right|$$

Teorem 6. Fərz edək ki, $S_{j\nu n}$, $j=\overline{0.2m-1}$, $\nu = 0.2m-1$, $n\in N$ ədədləri üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir

$$\sum_{n=1n}^{\infty} n\left|S_n\right| < \infty$$

$$4^{m-1} a_m \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|S_n\right|}{n+1} = \rho < 1$$

Onda (23) şəkilli $p_\gamma(x,k), \gamma=\overline{0.2m-2}$, funksiyaları var ki, onlar üçün (24) şərti ödənir və $S_{j\nu n}$ ədədləri bərpa edilmiş potensiallı operatorun "umumiləşmiş normallaşdırıcı ədədləri" olurlar .

1.4-də iki spektrə görə Hill operatorunun bərpası məsələsi tədqiq edilir.

Burada (1) və (3) şərtini ödəyən kompleks qiymətli periodik $q(x)$ potensiallı

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y,\ 0\le x\le 2\pi, \tag{25}$$

tənliyi

$$y'(0) = y(2\pi) = 0, \tag{26}$$

$$y'(0) = y'(2\pi) = 0. \tag{27}$$

sərhəd şərtləri daxilində tədqiq olunur.

(25), (26) və (25), (27) məsələlərinin məxsusi ədələrinin uyğun olaraq $\{\lambda_n\}$ və $\{\mu_n\}$ kimi işarə edək.

Onda əgər $\varphi(x,\lambda)$ və $\psi(x,\lambda)$ (25) tənliyinin

$$\phi(0,\lambda)=1,\ \ \phi'(0,\lambda)=0,$$

$$\psi(0,\lambda)=0,\ \ \psi'(0,\lambda)=1,$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlləri olarsa (25), (26) və (25), (27) sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədləri uyğun olaraq

$$\Phi_1(\lambda)=\varphi(2\pi,\lambda) \text{ və } \Phi_2(\lambda)=\varphi'(2\pi,\lambda)$$

funksiyalarının kökləri ilə üst-üstə düşür.

Teorem 7. $q(x)$ potensialı (25), (26) və (25), (27) məsələlərinin $\{\lambda_n\}$ və $\{\mu_n\}$ spektrlərinə görə birqiymətli təyin olunur.

İkinci fəsil potensialı spektral parametrdən xətti asılı, enerjidən asılı, potensiallar üçün indefinit spektral məsələlərin tədqiqinə həsr olunub.

$L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv\frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)\right\}$$

diferensial ifadəsi ilə təyin olunmuş L_3 öz-özunə qoşma olmayan diferensial operatorlar dəstəsinin spektral analizi öyrənilir. Burada λ kompleks ədəd $p(x),q(x)$ potensialları (1), (3) vasitəsi ilə təyin olunur, $\rho(x)$ isə aşağıdakı kimidir

$$\rho(x)=\begin{cases}1 & olduqda \quad x\ge 0,\\ -1 & olduqda \quad x<0.\end{cases} \tag{28}$$

2.2-də $l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)=\lambda^2 y(x)$ tənliyinin xüsusi həlləri aşağıdakı teoremin köməkliyi ilə öyrənilir.

Teorem 8. Fərz edək ki, $p(x),q(x)$ uyğun olaraq (1) və (3) $\rho(x)$ isə (28) dusturu ilə təyin olunurlar. Onda

$$-y''(x)+2\lambda p(x)y(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x) \tag{29}$$

tənliyinin həlləri $x\ge 0$ olduqda

$$f_1^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2i\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}\right)$$

$x<0$ halı üçün isə

$$f_2^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2i\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}\right)$$

şəklindədir. Burada $V_n^{\pm}$ və $V_{n\alpha}^{\pm}$ ədədləri rekurrent münasibətlər vasitəsi ilə təyin olunub onlar üçün aşağıdakı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left|V_n^{\pm}\right|$$

sıraları yığılır.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $f_1^{+}(x,\lambda)$, $f_1^{-}(x,\lambda)$, $\left(f_2^{+}(x,\lambda),\right.$ $\left.f_2^{-}(x,\lambda)\right)$, funksiyaları (29) tənliyinin $\lambda\neq 0, \lambda\neq\pm\frac{n}{2}$ və $\lambda\neq\pm\frac{in}{2}$. qiymətləri üçün fundamental həllər sistemini təşkil edir.
Onda

$$y(0+)=y(0-)$$

$$y'(0+)=y'(0-)$$

tikmə şərtlərindən istifadə edərək (29) tənliyinin hər bir həllini uyğun həllərin xətti kombinasiyası kimi göstərə bilərik.

$$f_2^{+}(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f_1^{+}(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f_1^{-}(x,\lambda)\quad x\geq 0 \qquad (30)$$

$$f_1^{+}(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f_{21}^{+}(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f_{21}^{-}(x,\lambda)\quad x<0 \qquad (31)$$

(30) və (31) düsturlarında istifadə edərək, $C_{21}(\lambda)$, $C_{22}(\lambda)$ əmsalları üçün

$$C_{22}(\lambda)=iC_{11}(-\lambda);\quad C_{21}(\lambda)=iC_{12}(\lambda)$$

münasibətlərinin doğru olduğunu görərik.
Göstərilmişdir ki,

$$f_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2}}(n\pm 2\lambda)f_1^{\pm}(x,\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{\pm}e^{i\alpha x}e^{ii\frac{n}{2}x}$$

və $f_1^{\pm}\left(x,\mp\frac{n}{2}\right)$ funksiyaları xətti asılıdır. Beləliklə alırıq ki,

$$f_1^{\pm}(x) = S_n^{\pm} f_1^{\pm}\left(x, \mp\frac{n}{2}\right) \qquad (32)$$

Bu düsturun analizi göstərir ki, $S_n^{\pm} = V_{nn}^{\pm}$..

2.3-də $L_2(-\infty, +\infty)$ fəzasında

$$\frac{1}{\rho(x)}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda p(x) + q(x)\right)$$

diferensial ifadəsi ilə təyin olunmuş L_3, operatorunun spektri öyrənilir.

Göstərilmişdir ki, $S_k = \left\{\frac{k\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{(k+1)\pi}{2}, k = \overline{0,3}\right\}$

işarələməsi daxilində L_3, operatorunun rezolventinin nüvəsi üçün aşağıdakı ayrılış dogrudur.

$$R_{11}(x,t,\lambda) = \frac{1}{W[f_1^+, f_2^+]}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda) f_2^+(t,\lambda) & t < x \\ f_1^+(t,\lambda) f_2^+(x,\lambda) & t > x \end{cases} \qquad \lambda \in S_0$$

$$R_{12}(x,t,\lambda) = \frac{1}{W[f_1^+, f_2^-]}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda) f_2^-(t,\lambda) & t < x \\ f_1^+(t,\lambda) f_2^-(x,\lambda) & t > x \end{cases} \qquad \lambda \in S_1$$

$$R_{21}(x,t,\lambda) = \frac{1}{W[f_1^-, f_2^-]}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda) f_2^-(t,\lambda) & t < x \\ f_1^-(t,\lambda) f_2^-(x,\lambda) & t > x \end{cases} \qquad \lambda \in S_2$$

$$R_{22}(x,t,\lambda) = \frac{1}{W[f_1^-, f_2^+]}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda) f_2^+(t,\lambda) & t < x \\ f_1^-(t,\lambda) f_2^+(x,\lambda) & t > x \end{cases} \qquad \lambda \in S_3$$

Rezolventin düsturundan asanlıqla görmək olar ki, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ və $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$ kənarda yerləşən və $C_{11}(\pm\lambda) \neq 0$, $C_{12}(\pm\lambda) \neq 0$ şərtini ödəyən hər bir λ üçün L_3, operatorunun rezolventi $R_\lambda = \left(L_3 - \lambda^2 I\right)^{-1}$ var və məhduddur.

Teorem 9. L_3 operatorunun həqiqi və sırf xəyali məxsusi ədədləri yoxdur. Kəsilməz spektr $\operatorname{Re}\lambda = 0$ və $\operatorname{Im}\lambda = 0$ oxlarını doldurur və onların üzərində $\frac{in}{2}, \frac{n}{2}, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər. L_3 operatorunun məxsusi ədədləri $C_{11}(-\lambda), C_{11}(\lambda)$, $C_{12}(\lambda), C_{12}(-\lambda)$ funksiyalarının uyğun olaraq $S_k = \left\{ \frac{k\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{(k+1)\pi}{2}, k = \overline{0,3} \right\}$ sektorlarında olan sıfırları ilə üst-üstə düşür.

Tərif 2. $\{C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ verilənləri L_3 operatorunun spektral verilənləri adlanır.

Teorem 10. Bütün $V_{n\alpha}^{\pm}, n < \alpha$ və $V_{\alpha}^{(\mp)}$ ədədləri $V_{nn}^{\pm}$. ədədlərinin köməkliyi ilə yeganə şəkildə tapılır.

Üçüncü fəsil kəsilən əmsallı diferensial operatorların spektral analizinə həsr olunmuşdur.

3.1. dörd hissədən ibarət olub spektral analizin kəsilən tip tərs məsələlərin həllinə həsr olunub.

$L_2(-\infty, +\infty, \rho(x))$ fəzasında $\frac{1}{\rho(x)}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)$ diferensial ifadəsi ilə təyin edilmiş L_4 operatoruna baxaq.

Əvvəlcə kəsilən surətli dalğa tənliyi üçün spektral analizin tərs məsələsi həll olunur. Bunun üçün $L_2\left(-\infty, +\infty, \rho(x)\right)$ fəzasında

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 \rho(x) y(x) \qquad (33)$$

tənliyinə baxılir. Burada $q(x)$ (1),(3) kimi , $p(x)$ isə aşağıdakı

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0, \\ \beta^2 & x < 0, \beta \ne 1, \beta > 0 \end{cases}$$

kimi təyin olunurlar, λ parametri isə kompleks ədəddir.

3.1.2-də (33) tənliyinin xüsusi həlləri öyrənilir. Göstərilir ki, əgər $q(x)$ (1),(3) kimi təyin olunsa onda

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x)$$

tənliyinin

$$f_1^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pm 2\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right)\quad x\geq 0$$

$$f_2^{\pm}(x,\lambda)=e^{\mp ii\lambda\beta x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mp 2\lambda}\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}e^{i\alpha x}\right)\quad x<0$$

şəklində xüsusi həlləri vardır. Burada $V_{n\alpha}$ ədədləri aşağıdakı rekurrent münasibətlərdən tapılırlar

$$\alpha(\alpha-n)V_{n\alpha}+\sum_{s=n}^{\alpha-1}q_{\alpha-s}V_{ns}=0,\ \ 1\leq n\leq\alpha$$

$$\alpha\sum_{s=n}^{\alpha-1}V_{n\alpha}+q_{\alpha}=0$$

və onlar üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\alpha|V_{n\alpha}|$$

sırası yığılır.

Qeyd edək ki, $f_1^+(x,\lambda)$ və $f_1^-(x,\lambda)$ $f_1^+(x,\lambda)$ $\left(f_2^+(x,\lambda)\right.$ və $\left.f_2^-(x,\lambda)\right)$ həlləri xətti asılı deyil və Vronskianı $2i\lambda(-2i\lambda\beta)$ bərabərdir.

Onda (33) tənliyinin hər bir həlli o biri həllərin xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər

$$f_2^+(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f_1^+(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f_1^-(x,\lambda)\quad x\geq 0$$

$$f_1^+(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f_{21}^+(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f_{21}^-(x,\lambda)\quad x<0$$

$C_{ij}(\lambda), i,j=1,2$ əmsalları $f_1^{\pm}(x,\lambda)$ və $f_2^{\pm}(x,\lambda)$ həllərinin Vronskianı vasitəsi ilə ifadə olunur.
Doğrudan da

$$C_{11}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f_2^+(0,\lambda), f_1^-(0,\lambda)\right],$$

$$C_{12}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f_1^+(0,\lambda),\, f_2^+(0,\lambda)\right],$$

$$C_{22}(\lambda)=-\frac{1}{\beta}C_{11}(-\lambda),\; C_{21}(\lambda)=\frac{1}{\beta}C_{12}(\lambda).$$

$f_1^{\pm}(x,\lambda)$ və $f_2^{\pm}(x,\lambda)$ həllərinin fiziki mənasını nəzərə alsaq $\frac{C_{11}(\lambda)}{C_{12}(\lambda)}$ – ifadəsinə əksolunma əmsalı, $\frac{1}{C_{12}(\lambda)}$ və $\frac{1}{C_{21}(\lambda)}$ ifadələrinə keciricilik əmsalları adlandıra bilərik.

Lemma 2. L_4 operatorunun məxsusi ədədləri sonlu saydadır və $C_{12}(\lambda)$, $C_{12}(-\lambda)$, funksiyalarının uyğun olaraq $S_k, k=0,1,$ sektorlarında olan sıfırları ilə üst-üstə düşür. Göstərilib ki, $L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$ fəzasında $\frac{1}{\rho(x)}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$ diferensial ifadəsi ilə təyin edilmiş L_4, operatorunun $\left(L_4-\lambda^2 I\right)$ rezolventinin nüvəsi $\operatorname{Im}\lambda>0$ olduqda

$$R_{11}(x,t,\lambda)=\frac{1}{C_{12}(\lambda)}\begin{cases} f_1^+(x,\lambda)f_2^+(t,\lambda) & t\le x\\ f_1^+(t,\lambda)f_2^+(x,\lambda) & t\ge x\end{cases}$$

$\operatorname{Im}\lambda<0$ halı üçün isə

$$R_{12}(x,t,\lambda)=\frac{1}{C_{12}(-\lambda)}\begin{cases} f_1^-(x,\lambda)f_2^-(t,\lambda) & t\le x\\ f_1^-(t,\lambda)f_2^-(x,\lambda) & t\ge x\end{cases}$$

şəklindədir.

Beləliklə, $R_{\lambda^2}(x,t,\lambda)=\left(L_4-\lambda^2 I\right)^{-1}$ var, müsbət yarımoxdan kənarda yerləşən bütün λ^2 üçün məhduddur və $C_{12}(\pm\lambda)\neq 0.$ İsbat olunub ki, $C_{12}(\lambda)$, əmsalı $\operatorname{Im}\lambda>0$ üçün analitik funksiyadır və sonlu sayda sıfırları var. Əgər $C_{12}(\lambda_n)=0,$ olarsa onda

$$\frac{d}{d\lambda}\left[C_{12}(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_n}=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)f_1^+(x,\lambda_n)f_2^+(x,\lambda_n)dx.$$

Teorem 11. L_4 operatorunun spektri həqiqidir, tam kəsilməzdir və $[0,\infty)$ oxunu doldurur. Kəsilməz spektrdə $(n/2)^2, (n/2\beta)^2, n=1,2,\ldots$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər.

Məxsusi funksiyalara görə ayrılış məsələsinə 3.1.3-də toxunulub. İsbat olunub ki, $L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$, fəzasından olan ixtiyarı $\Psi(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı məxsusi funksiyalara görə ayrılış ödənilir

$$\Psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)\Psi(t)\left[\int_{\Gamma_0^-}\frac{f_1^+(x,\lambda)f_1^+(t,\lambda)}{2i\lambda C_{12}(\lambda)C_{22}(\lambda)}d\lambda+G_{11}(\lambda_n,x,t)+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{in}V_{nn}f_1^+(x,n/2)f_1^+(t,n/2)+F\left(x,t,\frac{n}{2\beta}\right)\right]dt$$

3.1.4-də L_4 operatorunun $\{C_{12}(\lambda),V_{nn}\}$ spektral verilənlərinə görə tərs məsələsi həll olunur.

İsbat olunur ki, $\{C_{12}(\lambda),V_{nn}\}$ spektral verilənlərə vasitəsi ilə $q(x)$ və β yeganə şəkildə bərpa olunurlar.

3.2-də kəsilən əmsallı öz-özünə qoşma olmayan operatorlar dəstəsinin spektri öyrənilir.

$L_2(-\infty,+\infty,\rho(x))$ fəzasında

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv\frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)\right\}, \tag{34}$$

diferensial ifadəsi ilə təyin olunan kompleks periodik əmsallı L_5 operatorlar dəstəsi üçün spektral məsələyə baxılır. Burada λ kompleks ədəd, $p(x),q(x)$ potensialları (1), (3) vasitəsi ilə təyin olunurlar и $\rho(x)$ isə aşağıdakı şəkildədir

$$\rho(x)=\begin{cases}1 & x\in(-\infty,b_1)\\ \gamma_1^2 & x\in(b_1,b_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \gamma_n^2 & x\in(b_n,\infty)\end{cases} \tag{35}$$

burada $\gamma_j \neq 0(j=1,2,\ldots,n)$.

Məlumdur ki, L_5 operatorlar dəstəsinin spektral xüsusiyyətlərinin tədqiqi

$$-y''+[2\lambda p(x)+q(x)]y=\lambda^2\rho(x)y, x\in R \tag{36}$$

tənliyinin həllərinin analizi ilə sıx bağlıdır.

Teorem 12. Tutaq ki, $p(x),q(x)$ potensialları (1), (3), $\rho(x)$ üçün isə (35) şərti ödənilir. Onda $L_5(y)=\lambda^2\rho(x)y$ tənliyinin həlləri hər bir $x\in(b_j,b_{j+1})$ $j=0,1,2,\ldots m,\ \gamma_0=1,\ b_0=-\infty,\ b_{m+1}=\infty$ üçün

$$f_j^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda\gamma_j x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^{\pm}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\upsilon_{n\alpha}^{\pm}}{n\pm 2\lambda\gamma_j}e^{i\alpha x}\right)$$

şəklindədir.

Burada $\upsilon_n^{\pm}$ və $\upsilon_{n\alpha}^{\pm}$ ədədləri rekurrent münasibətlərin köməkliyi ilə təyin olunur və $f_j^{\pm}(x,\lambda)$ funksiyasını iki dəfə hədbəhəd diferensiallamaq olur.

Teorem 13. L_5 operatorlar dəstəsinin kəsilməz $(-\infty,+\infty)$ oxunu doldurur və kəsilməz spektrdə $\left(\pm\frac{n}{2\gamma_j}\right)$, $n\in N$, $j=0,1,2,3,\ldots,m,$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər.

3.3-də bir sinif öz-özünə qoşma olmayan ümumiləşmiş funksiyalı diferensial operatorlar dəstəsinin spektral analizi tədqiq edilir.

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right)\equiv-\frac{d}{dx^2}+2\lambda p(x)+q(x)+\beta\delta(x)-\lambda^2,$$

diferensial ifadəsi ilə $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında təyin olunan L_6 öz-özunə qoşma olmayan operatorlar dəstəsi üçün tərs məsələyə baxılır.

Burada $\delta(x)$ - Dirakın, delta funksiyası, $\beta<0-$ həqiqi ədəd, $\lambda-$kompleks ədəd, a $p(x),q(x)$ əmsalları üçün isə (1) və (3) şərtləri ödənilir.

İsbat olunur ki, L_6 operatorlar dəstəsinin spektri birdən cox olmayan məxsusi ədəddən və $\{-\infty<\lambda<+\infty\}$ oxunu dolduran kəsilməz spektrdən ibarətdir. Kəsilməz spektrdə $\pm {}^{n}\!/_{20},\ n\in N$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər. $\{S_n^{\pm}\}$ ədədlərinin köməkliyi ilə $q(x), p(x)$ funksiyalarının bərpası və β ədədinin tapılması kimi tərs məsələ həll olunur. Bunun üçün əvvəlcə $\{S_n^{\pm}\}$ və $\{V_{n\alpha}^{\pm}\}$, $\{V_n^{\pm}\}$ ədədləri arasında aşağıdakı kimi aşkar

$$V_{mm}^{\pm}=S_m^{\pm}V_{m,\alpha+m}^{\pm}=S_m^{\pm}\left(V_{\alpha}^{\mp}+\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{V_{n\alpha}^{\mp}}{n+m}\right),$$

münasibətlər tapılır β isə

$$\beta=-\frac{y'(+0)-y'(-0)}{y(0)}$$

dusturunun köməkliyi ilə təyin olunur.

Bu münasibətlər $\{q_\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ və β, $\{S_n^{\pm}\}$ ədədlərinin tapılması üçün əsas tənliklər rolunu oynayır.

Teorem 14. $\{S_n^{\pm}\}$ ədədlərinin (1), (3) potensiallı L_6 operatorlar dəstəsinin normallaşdırıcı ədədləri olması üçün kafi şərt

$$\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\left|S_m^{*}\right|=\delta<\infty;\ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left|S_m^{*}\right|}{1+m}=p<1,$$

haradakı

$$\left|S_m^*\right| = \max\left\{\left|S_m^+\right|, \left|S_m^-\right|\right\}.$$

şərtlərinin ödənilməsidir.

3.4-də öz-özünə qoşma olmayan pilləvarı potensiallı Hill operatorunun spektral analizi məsələsinə baxılır.
Bunun üçün $L_2(-\infty,+\infty)$ fəzasında

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \tag{37}$$

tənliyinə baxılır. Burada

$$q(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^+ e^{inx} & x \ge 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n^- e^{inx} & x < 0 \end{cases};$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|q_n^{\pm}\right| = q < \infty, \quad q_n^+ \ne q_n^-, \ \lambda -$ isə kompleks ədəddir.

Onda (37) tənliyinin

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} f^+(x,\lambda) & x \ge 0 \\ f^-(x,\lambda) & x < 0 \end{cases}$$

şəklində həlli var, burada

$$f^{\pm}(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left(1 + \sum_{n=1} \frac{1}{n \pm 2\lambda} \sum_{\alpha=n} V_{n,\alpha}^{\pm} e^{i\alpha x}\right)$$

və $V_{n,\alpha}^{\pm}$ ədədləri rekurrent münasibətlərlə təyin olunur və onlar üçün

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n} \alpha \left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|$$

sırası yığılır.

$f^+(x,\pm\lambda)$ və $f^-(x,\pm\lambda)$ funksiyaları (37) tənliyinin uyğun olaraq $x \ge 0$ və $x < 0$ üçün xətti asılı olmayan həlləri olduğuna görə $f^+(x,\lambda)$ həlli üçün

$$\begin{pmatrix} y(+0) \\ y'(+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(-0) \\ y'(-0) \end{pmatrix}$$

tikmə şərtlərindən istifadə edərək onları həll kimi $x < 0$ və $x \ge 0$ intervallarına davam etdirmək olar.

$$f^+(x,\lambda)=C_{11}(\lambda)f^-(x,\lambda)+C_{12}(\lambda)f^-(x,-\lambda),\ x<0$$
$$f^-(x,\lambda)=C_{22}(\lambda)f^+(x,\lambda)+C_{21}(\lambda)f^+(x,-\lambda),\ \ x\geq 0$$

burada

$$C_{11}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f^+(0,\lambda), f^-(0,-\lambda)\right],$$
$$C_{12}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f^-(0,\lambda), f^+(0,\lambda)\right],$$
$$C_{22}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f^-(0,\lambda), f^+(0,-\lambda)\right],$$
$$C_{21}(\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}W\left[f^+(0,\lambda), f^+(0,\lambda)\right].$$

Aşağıdakı işarələməni qəbul etsək

$$f_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2}}(n\pm 2\lambda)f^+(x,\pm\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{+}e^{i\alpha x}e^{-i\frac{n}{2}x},$$

$$\varphi_n^{\pm}(x)=\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2}}(n\pm 2\lambda)f^-(x,\pm\lambda)=\sum_{\alpha=n}^{\infty}V_{n\alpha}^{-}e^{i\alpha x}e^{-i\frac{n}{2}x},$$

onda

$$f_n^{\pm}(x)=V_{nn}^{+}f^+\left(x,\frac{n}{2}\right)\ \text{və}\ \varphi_n^{\pm}(x)=V_{nn}^{-}f^-\left(x,\frac{n}{2}\right).$$

olduğunu alarıq.

3.4.2-də isbat olunur ki, $L=\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$ operatorunun spektri $C_{12}(\lambda)=0$ tənliyinin kökləri kimi təyin olunan sonlu sayda məxsusi ədədlərdən və $[0,\infty)$ müsbət yarımoxunu dolduran kəsilməz spektrdən ibarətdir, burada $\left(\frac{n}{2}\right)^2, n=1,2,\ldots$ ədədləri ilə üst–üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər

3.4.3-də L operatoru üçün tərs məsələ öyrənilir.

Tərs məsələ: Verilmiş $\{C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ spektral verilənlərə görə $q(x)$ potensialının bərpa edin.

Bu paraqrafda spektral verilənlərə görə tərs məsələnin həlli üçün konstruktiv alqoritm verilir.

Beləliklə $\{C_{11}(\lambda), C_{12}(\lambda)\}$ verilənlərə görə $q(x)$ potensialı birqiymətli və effektiv bərpa oluna bilir.

Dördüncü fəslin məqsədi simlər kimi olan, laylı, qeyri bircins mühitlərdə dalğaların yayılmasının spektral analizidir.

4.1-də düz məsələnin qoyuluşu verilir.

Bir birinə bağlı simlərdə dalğaların yanılmasını öyrənmək üçün biz $L_2(G) = \bigoplus_{k=1}^{n} L_2[o_k, \infty)$ fəzasında

$$\begin{cases} -y_1''(x_1,\lambda) + [2\lambda p_1(x_1) + q_1(x_1)]y_1(x_1,\lambda) = \lambda^2 y_1(x_1,\lambda) \\ -y_2''(x_2,\lambda) + [2\lambda p_2(x_2) + q_2(x_2)]y_2(x_2,\lambda) = \lambda^2 y_2(x_2,\lambda) \\ -y_3''(x_3,\lambda) + [2\lambda p_3(x_3) + q_3(x_3)]y_3(x_3,\lambda) = \lambda^2 y_3(x_3,\lambda) \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ -y_n''(x_n,\lambda) + [2\lambda p_n(x_n) + q_n(x_n)]y_n(x_n,\lambda) = \lambda^2 y_n(x_n,\lambda) \end{cases}$$

sistem tənliyini müsbət yarımoxun başlanğıc nöqtəsində ğdənilən aşağıdakı sərhəd şərtləri ilə birgə baxmalıyıq

$$\begin{cases} y_1(0,\lambda) = y_2(0,\lambda) = y_3(0,\lambda) = \cdots = y_n(0,\lambda) \\ y_1'(0,\lambda) + y_2'(0,\lambda) + y_3'(0,\lambda) + \cdots + y_n'(0,\lambda) = 0 \end{cases} \tag{38}$$

Burada $p_k(x_k)$ və $q_k(x_k)$, $k = 1,2,3,$ potensialları

$$p_k(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kn} e^{inx_k}, \sum_{n=1}^{\infty} n|p_{kn}| < \infty;$$

$$q_k(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{kn} e^{inx_k}, \sum_{n=1}^{\infty} |q_{kn}| < \infty;$$

şəklindədir

o_k işarələməsində indekslə $k-$cı müsbət yarımoxun başlanğıc nöqtəsi $\oplus$ işarəsi ilə isə fəzaların düz cəmi işarə edilir.

Sadəlik üçün ümumiliyi pozmadan $n=3$ halına baxılır.

$(f,g)_{L_2(G)} = \sum_{k=1}^{3}(f_k, g_k)_{L_2(N_k)}$, skalyar hasili $L_2(G) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(N_k)$, $N_k[o_k,\infty)$ təyin olunmuş $L_2(G)$ fəzasında $L_G = \bigoplus_{k=1}^{3} L_k$, operatoruna baxaq. Burada L_k operatoru təyin olunma oblastı

$$D(L_G) = \{y(x) | y_k(x), y_k'(x) \in AC[0,R] \text{ bütün}$$

$$R>0, y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)$$

$$y_1'(0)+y_2'(0)+y_3'(0)=0,\ y_k(x), y_k''(x) \in L_2(R^+), k=1,2,3\}$$

olub

$$L_k = -d^2/dx_k^2 + 2\lambda p_k(x_k) + q_k(x_k)$$

kimi təyin olunur.

Onda məsələni

$$L_G = \bigoplus_{k=1}^{3} L_k,$$

operatorunun qeyri kompakt qraflarda tədqiqi kimi başa düşmək olar.

Spektral məsələ aşağıdakı kimi yazıla bilər:

Elə bir $y_k(x_k,\lambda) = (y_{k1}(x_1,\lambda), y_{k2}(x_2,\lambda), y_{k3}(x_3,\lambda))$ funksiyası tapın ki, hər bir $N_k, k=1,2,3$ yarımoxunda

$$-y_k''(x_k,\lambda) + 2\lambda p_k(x_k) y_k(x_k,\lambda) + q_k(x_k) y_k(x_k,\lambda) = \lambda^2 y_k(x_k,\lambda), \quad (39)$$

(39) tənliyini ödəsin və onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənsin.

a) y_k üçün qrafın təpə nöqtəsində

$$y_{k1}(0,\lambda) = y_{k2}(0,\lambda) = y_{k3}(0,\lambda); \quad (40)$$

şərti ödənilir və

b)

$$y_{k1}'(0,\lambda) = y_{k2}'(0,\lambda) = y_{k3}'(0,\lambda) = 0. \quad (41)$$

Hər bir qeyd olunmuş $k=1,2,3$ üçün qrafın N_k qollarında (39) tənliyinin $f_k^{\pm}(x_k,\lambda)$ fundamental həllər sistemi var və $\lambda \neq \pm n/2$, $n \in N$, $\lambda \neq 0$ üçün

$$f_k^{\pm}(x_k,\lambda) = e^{\pm i\lambda x_k}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(\pm k)} e^{inx_k} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{V_{n\alpha}^{(\pm k)}}{n \pm 2\lambda} e^{i\alpha x_k}\right)$$

şəklindədirlər, burada $V_n^{(\pm k)}\, V_{n\alpha}^{(\pm k)}$ ədədlərdir və onlar üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|V_n^{\pm}\right|; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n+1}^{\infty}\alpha(\alpha-n)\left|V_{n\alpha}^{\pm}\right|; \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left|V_{nn}^{\pm}\right|$$

sıraları yığılır.

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək

Məsələnin həlli dedikdə

$$Y(x,\lambda) = \left\lfloor y_{jk}(x_k,\lambda)\right\rfloor_{k,\,j=1,2,3}$$

matrisini başa düşəcəyik ki, onun üşün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. $L_G Y = \lambda^2 Y$;
2. $y_{jk}(x_k,\lambda)$ tənliyin $N_k = [0,\infty), k=1,2,3$ qolunda olan həllidir
3. $y_{jk}(x_k,\lambda) = T_{jk}(\lambda) f_k^{+}(x_k,\lambda), k \neq j$

və

$$y_{kk}(x_k,\lambda) = f_k^{-}(x_k,\lambda) + R_{kk}(\lambda) f_k^{+}(x_k,\lambda), k=1,2,3,$$

$Y(x,\lambda) = \left\lfloor y_{kj}(x_k,\lambda)\right\rfloor_{k,\,j=1,2,3}$ həllin fiziki mənasını nəzərə alaraq $T_{kj}(\lambda)$ və $R_{kk}(\lambda)$ əmsallarını uyğun olaraq $L_G = \bigoplus_{k=1}^{3} L_k$, operatoru-nun keçmə və əksolunma əmsalları adlandıracağıq. T_{jk} və $R_{kk}(\lambda)$ əmsallarını $y_{jk}(x_k,\lambda)$ həlli üç sərhəd şərtlərini yazmaqla hesablamaq olar. Xüsusi halda $k=1$ üçün alariq ki,

$$f_1^{-}(0,\lambda) + R_{11}(\lambda) f_1^{+}(0,\lambda) = T_{12}(\lambda) f_2^{+}(0,\lambda) = T_{13}(\lambda) f_3^{+}(0,\lambda),$$

$$f_1^{-'}(0,\lambda) + R_{11}(\lambda) f_1^{+'}(0,\lambda) + T_{12}(\lambda) f_2^{+'}(0,\lambda) + T_{13}(\lambda) f_3^{+'}(0,\lambda) = 0.$$

Bu sistemi $R_{11}(\lambda)$, $T_{12}(\lambda)$ və $T_{13}(\lambda)$ nəzərən $W[f_1^+(0,\lambda), f_1^-(0,\lambda)] = 2i\lambda,$ olduğunu nəzərə alaraq həll etsək, alarıq ki,

$$R_{11}(\lambda) = -\frac{f_1^-(0,\lambda)}{f_1^+(0,\lambda)} + \frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\, f_1^+(0,\lambda) G(\lambda)}$$

$$T_{12}(\lambda) = \frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\, f_2^+(0,\lambda) G(\lambda)}$$

$$T_{13}(\lambda) = \frac{2i\lambda}{f_1^+(0,\lambda)\, f_3^+(0,\lambda) G(\lambda)}$$

burada

$$G(\lambda) = \frac{f_1^{+'}(0,\lambda)}{f_1^+(0,\lambda)} + \frac{f_2^{+'}(0,\lambda)}{f_2^+(0,\lambda)} + \frac{f_3^{+'}(0,\lambda)}{f_3^+(0,\lambda)}.$$

4.2 –də L_G operatorunun spektri tədqiq edilmişdi.

İsbat olunmuşdur ki, L_G operatorunun həqiqi məxsusi ədələri yoxdur.

Tərs məsələ: Spektarl verilənlər kimi $R_{kk}(\lambda)$ əksolunma əmsallarını nəzərə almaqla hər bir N_k qolunda $p_k(x_k)$ və $q_k(x_k)$ potensiallarını qurun.

Teorem 15. Hər bir qeyd olunmuş N_k, $k=1,2,3.$, $n \in N$, qolunda aşağıdakı münasibətlər ödənilir

$$\lim_{\lambda\to n/2}(n-2\lambda)R_{kk}(\lambda) = V_{nn}^{(-k)},$$

$$\lim_{\lambda\to -\frac{n}{2}}(n+2\lambda)\frac{1}{R_{kk}(\lambda)} = V_{nn}^{(-k)}.$$

İndi isə $p_k(x_k)$ və $q_k(x_k)$ potensiallarını verilmiş $R_{kk}(\lambda)$ əmsallarına görə qurmaq üçün $V_{nn}^{(\pm k)}, V_{n\alpha}^{(\pm k)}$ və $V_{\alpha}^{(\pm k)}$ ardıcıllıqları arasında aşkar əlaqələr tapilmalıdır. Göstərilmişdir ki,

$$V_{m\alpha+m}^{(\pm k)} = V_{mm}^{(\pm k)}\left(V_{\alpha}^{(\mp k)} + \sum_{n=1}^{\alpha}\frac{V_{n\alpha}^{(\mp k)}}{n+m}\right), m,\alpha = 1,2,3,\dots$$

Bu münasibətlər $p_{nk}(x_k)$ və $q_{nk}(x_k)$ potensiallarının məlum $V_{n\alpha}^{\pm k}$, $V_n^{\pm k}$ ədələrinə görə tapilması məsələsində əsas tənliklər rolunu oynayir.

Teorem 16. Butun $V_{n\alpha}^{\pm k}, n > \alpha$ və $V_{\alpha}^{(\mp k)}$ ədədləri məlum $V_{nn}^{\pm k}$ ədədləri vasıtəsi ilə birqiymətli təyin oluna bilərlər.

Teorem 17. Spektral verilənlər hər bir N_k, $k = 1,2,3.$ qolunda $p_k(x_k)$, $q_k(x_k)$ potensiallarını birqiymətli bərpa edir.

4.2-də ilmə səkilli G qrafda (ilməyə bağlı yarımoxun əmələ gətirdiyi qrafda) Hill operatoru uçun tərs spektral məsələyə baxılır.

Qeyd edək ki baxılan qraf üç hissədən ibarətdir:

Qeyri kompakt olan hissə $\gamma_0 = \{x | 0 < x < \infty\}$ kompakt hissə $\gamma_1 = \{z | 0 < x < 2\pi\}$ ilməsi qeyd edək ki, biz ilmənin uzunluğunu 2π – yə bərabər götürürük; $\gamma_2 = \{\{x = 0\} = \{z = 0\} = \{z = 2\pi\}\}$ qrafın təpə nöqtəsinə uyğun çoxluq.

Biz G qrafda kvant hissəciyinin birölçülü yayılması kimi spektral məsələni tədqiq edəcəyik.

$L_2(G) = L_2(R) \oplus L_2(0,2\pi)$ fəzasında aşağıdakı tənliyə baxaq

$$-Y'' + \{q(X) - \lambda^2\}Y = 0, \quad X \in G \setminus \{\gamma_2\} \tag{42}$$

$$Y(x = 0) = Y(z = 0) = Y(z = 2\pi),$$

$$Y'(x = 0 + 0) + Y'(z = 0 + 0) - Y'(z = 2\pi - 0) = 0.$$

(42) sistemində X görə diferensiallamaq dedikdə biz $X \in \gamma_0$ olduqda x görə, $X \in \gamma_0$ olduqda isə z parametrinə görə diferensiallamaq başa düşəcəyik. Qrafın təpə nöqtəsində isə diferensiallaşma təyin olunmayıb.

Biz fərz edirik ki, $q(X)$ potensialı

$$q(X) = \begin{cases} q_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_{1n} e^{inx}, & X \in \gamma_0 \\ q_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_{2n} e^{inx}, & X \in \gamma_1 \end{cases}$$

kimi təyin olunub və onun üçün $\sum_{n=1}^{\infty}|q_{kn}| < \infty,\ k = 1,2;$ şərti ödənilir, λ isə spektral parametrdir.

G qeyri kompakt qrafda (42) spektral məsələnin həllini biz

$$Y(X,\lambda) = \begin{cases} y(x,\lambda), & X \in \gamma_0 \\ u(z,\lambda), & X \in \gamma_1 \end{cases}$$

şəkilində axtaracağıq.

Fərz edirik ki onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir

1. $LY = \lambda^2 Y;$
2. $y(x,\lambda) = f(x,-\lambda) + R_{11}(\lambda) f(x,\lambda)$
3. burada $R_{11}(\lambda)$ əks olunma əmsalı və

$$f(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2\lambda} \sum_{\alpha=n}^{\infty} V_{n\alpha}^{\gamma_0} e^{i\alpha x}\right)$$

$V_{n\alpha}^{\gamma_0}$ ədədləri aşağıdakı rekurrent münasibətlərdən tapılır

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-n)V_{n\alpha}^{\gamma_0} + \sum\limits_{s=n}^{\alpha-1} q_{1\alpha-s} V_{ns}^{\gamma_0} = 0, \ \ 1 \le n \le \alpha \\ \alpha \sum\limits_{n=1}^{\alpha} V_{n\alpha}^{\gamma_0} + q_{1\alpha} = 0 \end{cases}$$

və onlar üçün

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \alpha(\alpha-n)\left|V_{n\alpha}^{\gamma_0}\right|;\ \sum_{n=1}^{\alpha} n\left|V_{n\alpha}^{\gamma_0}\right|$$

sıraları yığılır.

Qeyd edək ki

$$\lim_{\lambda \to \mp\frac{n}{2}} (n \pm 2\lambda) f(x,\pm\lambda) = V_{nn}^{\gamma_0} f\left(x, \mp\frac{n}{2}\right)$$

münasibəti ödənilir.

G qrafının γ_1 kompakt olan hissəsində $u(z,\lambda)$ həllini qurmaq üçün biz operatorun ilmədə Qrin funksiyasını quracağıq. İlmədəki Qrin funksiyası $\varphi(z,\lambda), \theta(z,\lambda)$ fundamental həllərin köməkliyi ilə qurulur onlar üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir.

$$\varphi(0,\lambda)=\theta'(0,\lambda)=1$$
$$\varphi'(0,\lambda)=\theta(0,\lambda)=0.$$

Bununla yanaşı Qrin funksiyası üçün ilmədəki sərhəd şərtləri

$$\begin{cases} G(0,y,\lambda)=G(2\pi,y,\lambda) \\ G'(0,y,\lambda)=G'(2\pi,y,\lambda) \\ \lim_{z\to y+0} G(z,y,\lambda)=\lim_{z\to y-0} G(z,y,\lambda) \end{cases} \tag{43}$$

olur.

Alarıq ki,

$$G(z,y,\lambda)=\frac{\theta(y,\lambda)+\varphi(\pi,\lambda)\theta(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\theta(y,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\varphi(z,\lambda)+$$
$$+\frac{\varphi(y,\lambda)\theta'(\pi,\lambda)-\varphi'(\pi,\lambda)\theta(y,\lambda)-\varphi(y,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\theta(z,\lambda),\ y\ge z$$

$$G(z,y,\lambda)=\frac{\varphi(y,\lambda)\theta(\pi,\lambda)+\varphi(y,\lambda)\theta'(\pi,\lambda)-\theta(y,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\varphi(z,\lambda)+$$
$$+\frac{\varphi(y,\lambda)-\varphi(y,\lambda)\varphi(\pi,\lambda)-\varphi'(\pi,\lambda)\theta(y,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\theta(z,\lambda),\ y\le z$$

Onda verilmiş spektral məsələnin ilmədəki həllini qurmaq üçün lazım olan funksiyanın şəkli

$$G(z,0,\lambda)=G(z,\pi,\lambda)=\frac{\theta(\pi,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\varphi(z,\lambda)+$$
$$+\frac{1-\varphi(\pi,\lambda)}{\varphi(\pi,\lambda)+\theta'(\pi,\lambda)-2}\theta(z,\lambda)$$

kimi olacaqdır.

Beləliklə, spektral məsələsinin həllini

$$Y(X,\lambda)=\begin{cases} f(x-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(x,\lambda), & X\in\gamma_0 \\ \alpha\, G(z,0,\lambda), & X\in\gamma_1 \end{cases}$$

şəkildə axtaracağıq burada α sabitdir.

Onda (42) sərhəd şərtlərindən alarıq ki,

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=\alpha G(0,0,\lambda)=\alpha G(2\pi,0,\lambda)$$

$$f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)+\alpha[G'(0+0,0,\lambda)-G(0+0,0,\lambda)]=0.$$

İlmədə Qrin funksiyası üçün olan (43) şərtlərini nəzərə alsaq

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=\alpha G(0,0,\lambda)$$

$$f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,\lambda)=\alpha.$$

olduğunu görərik.
Beləliklə alarıq ki,

$$f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)=[f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)]G(0,0,\lambda)$$

və yaxud

$$G(0,0,\lambda)=\frac{f(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f(0,-\lambda)}{f'(0,-\lambda)+R_{11}(\lambda)f'(0,-\lambda)},$$

əks olunma əmsalı üçün isə

$$R_{11}(\lambda)=\frac{\alpha-f'(0,-\lambda)}{f'(0,\lambda)}$$

münasibəti ödənilir.

Baxılan sistem üçün tərs məsələnin həlli bir birindən asılı olmayan iki məsələnin köməkliyi ilə $q(x)=[q_1(x),q_2(z)]$potensialının uyğun olaraq γ_0 və γ_1 qollarında bərpası məsələsinə gətirilir.

$R_{11}(\lambda)$ əks olunma əmsalını

$$y(0)=u(0)=u(2\pi)$$

və

$$y'(0+0)+u'(0+0)-u'(2\pi-0)=0$$

tikmə şərtlərindən tapmaq mümkün olduğuna görə tərs məsələnin qoyuluşunu belə formalaşdıra bilərik :

Qeyri kompakt G qrafında $q(x)$ potensialını əks olunma əmsalı $R_{11}(\lambda)$,

$$\begin{cases} -u''(z,\lambda)+q_2(z)u(z,\lambda)=\lambda^2 u(z,\lambda), \; z\in[0,2\pi] \\ u(0,\lambda)=u(2\pi,\lambda)=0 \end{cases}$$

Dirixle məsələsinin məxsusi ədədləri və

$$\begin{cases} -u''(x,\lambda)+q_2(z)u(z,\lambda)=\lambda^2 u(z,\lambda), \ z\in[0,2\pi] \\ \qquad u(0,\lambda)=u'(\pi,\lambda)=0 \end{cases}$$

Neyman məsələsinin məxsusi ədədlərinə görə bərpa edin.

Теорема 18. Spektral verilənlərin spesifikasiyası $q(X)=[q_1(x),q_2(x)]$ potensialını ilmə qrafda birqiymətli təyin edir.

4.3-də ulduz qraflarda Dirak operatoru üçün tərs spektral məsələyə baxılır.

Burada yeganə təpə nöqtəsində sonlu sayda $N_j=\lfloor o_j,\infty), \ j=1,2,\dots,n,$ qolların birləşdiyi G qeyri-kompakt qrafa baxaq. o_j ilə $j-$ci qolun başlanğıc nöqtəsi işarə olunur.

$$(f,g)_{L_2(G)}=\sum_{j=1}^{n}(f,g)_{L_2(G)}$$

skalyar hasili

$$L_2(G)=\oplus_{j=1}^{n}L_2(N_j),$$

fəzası təyin edib

$$L_2(G)=\oplus_{j=1}^{n}L_j,$$

L_G operatoruna baxaq, burada

$$L_j\equiv B\frac{d}{dx_j}+\Omega_j(x_j),$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j(x_j)=\begin{Vmatrix} p_j(x_j) & q_j(x_j) \\ q_j(x_j) & -p_j(x_j) \end{Vmatrix} \tag{44}$$

və

$$p_j(x_j)=\sum_{n=1}^{\infty}p_{jn}e^{inx_j}; \ q_j(x_j)=\sum_{n=1}^{\infty}q_{jn}e^{inx_j}, \ \sum_{n=1}^{\infty}\{|p_{jn}|+|q_{jn}|\}<\infty$$

olub operatorun təyin olunma oblastı aşağdıakı kimi təyin olunur

$$D(L_G)=\left\{\begin{array}{l} y(x)\big| y_j(x), y_j'(x)\in AC[0,R]\ \ R>0, \\ y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=\cdots=y_n(0), \\ y_1'(0)+y_2'(0)+y_3'(0)+\cdots+y_n'(0)=0, \\ y_j(x), y_j''(x)\in L_2\left(R^+\right), j=1,2,\ldots,n. \end{array}\right\}$$

Onda baxılan məsələ

$$L_G=\oplus_{j=1}^{n}L_j,$$

Operatorun qeyri-kompakt G qrafında tədqiq olunması kimi şərh edilə bilər. Spektral məsələ aşağıdakı kimi yazıla bilər:

Elə bir $y_j(x_j,\lambda)=\left(y_{j1}(x_1,\lambda), y_{j2}(x_2,\lambda), y_{j3}(x_3,\lambda)\right)$ vektor funksiyasını tapın ki, hər bir $N_j=\lfloor o_j,\infty); j=1,2,\ldots n,$ yarımoxunda

$$By_j'+\Omega_j(x_j)y_j=\lambda^2 y_j \tag{45}$$

Dirak tənliyinin həlli olsun və onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənsin:

1. $y_j(x_j,\lambda)$ həlli qrafın düyün nöqtəsində kəsilməzdir. Xüsusi halda

$$y_{j1}(0)=y_{j2}(0)=y_{j3}(0)=\cdots=y_{jn}(0);$$

2. Düyün nöqtəsindən çıxan qollar üzrə törəmələrin cəmi sıfra bərabərdir

$$y_{j1}'(0)+y_{j2}'(0)+y_{j3}'(0)+\cdots+y_{jn}'(0)=0;$$

Məsələnin həlli dedikdə

$$Y(X,\lambda)=\left\|y_{jk}(x_k,\lambda)\right\|_{j,k=1,2,3}$$

Matrisini başa düşəcəyik ki, onun üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

1. $BY'+\Omega(X)Y=\lambda Y$
2. $y_{jk}(x_k,\lambda)=T_{jk}(\lambda)f_k(x_k,\lambda)$
3. $y_{jj}(x_j,\lambda)=\varphi_j(x_j,\lambda)+R_{jj}(\lambda)f_j(x_j,\lambda)$

burada $\varphi_j(x_j,\lambda), f_j(x_j,\lambda)$ sonsuz qollarda Yost həlləri olub aşağıdakı teormelə təyin olunurlar.

Teorem 19. Fərz edək ki, $\Omega_j(x_j)$ (44) düsturu ilə təyin olunub. Onda (45) tənliyinin aşağıdakı kimi təyin olunmuş $\varphi_j(x_j,\lambda)$, $f_j(x_j,\lambda)$ xüsusi həlləri vardır

$$f_j(x_j,\lambda)=\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\vartheta_{n\alpha}^{j}}{\frac{n}{2}+\lambda}e^{i\alpha x_j}\right)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda x_j}$$

$$\varphi_j(x_j,\lambda)=\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\frac{\vartheta_{n\alpha}^{j}}{\frac{n}{2}-\lambda}e^{i\alpha x_j}\right)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i\lambda x_j}$$

burada

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ və } \upsilon_{n\alpha}^{j}=\begin{pmatrix}\upsilon_{n\alpha}^{11j}&\upsilon_{n\alpha}^{12j}\\\upsilon_{n\alpha}^{21j}&\upsilon_{n\alpha}^{22j}\end{pmatrix},\quad \upsilon_{n\alpha}^{ikj}, i,k=1,2,\ j=1,2,\ldots$$

ədədləri aşağıdakı rekurrent münasibətlərdən təyin olur.

$$(\alpha-n)\left(\upsilon_{n\alpha}^{21j}+\upsilon_{n\alpha}^{12j}\right)=i\sum_{s=n}^{\alpha-1}\left[p_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{11j}+\upsilon_{ns}^{22j}\right)+q_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{11j}-\upsilon_{ns}^{22j}\right)\right.$$

$$(\alpha-n)\left(\upsilon_{n\alpha}^{22j}-\upsilon_{n\alpha}^{11j}\right)=i\sum_{s=n}^{\alpha-1}\left[p_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{12j}-\upsilon_{ns}^{21j}\right)+q_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{22j}+\upsilon_{ns}^{11j}\right)\right.$$

$$\alpha\left(\upsilon_{n\alpha}^{21j}-\upsilon_{n\alpha}^{12j}\right)=i\sum_{s=n}^{\alpha-1}\left[p_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{11j}-\upsilon_{ns}^{22j}\right)+q_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{11j}+\upsilon_{ns}^{22j}\right)\right.$$

$$\alpha\left(\upsilon_{n\alpha}^{22j}+\upsilon_{n\alpha}^{11j}\right)=i\sum_{s=n}^{\alpha-1}\left[p_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{12j}+\upsilon_{ns}^{21j}\right)+q_{j\alpha-s}\left(\upsilon_{ns}^{22j}-\upsilon_{ns}^{11j}\right)\right.$$

$\alpha=n+1,n+2,\ldots,\ n=1,2,\ldots$ olduqda və $\alpha=1,2,\ldots$ qiymətləri üçün isə

$$\upsilon_{\alpha\alpha}^{21j}-\upsilon_{\alpha\alpha}^{12j}=0,\quad \upsilon_{\alpha\alpha}^{22j}+\upsilon_{\alpha\alpha}^{11j}=0,$$

$$\upsilon_{\alpha\alpha}^{21j}+\upsilon_{\alpha\alpha}^{12j}=2ip_{j\alpha}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\upsilon_{n\alpha}^{21j}+\upsilon_{n\alpha}^{12j}\right)$$

$$\upsilon_{n\alpha}^{22j} - \upsilon_{n\alpha}^{11j} = 2iq_{j\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\upsilon_{n\alpha}^{22j} - \upsilon_{n\alpha}^{11j}\right)$$

münasibətləri ödənilir və

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{\alpha=n}^{\infty}\left|v_{n\alpha}^{ikj}\right| < \infty.$$

sırası yığılır.

Verilən hər bir qolda diferensial operatorun qurulması kimi tərs məsələyə baxılır.

Tərs məsələ. Verilmiş $R_{j\,j}(\lambda)$ əksolunma əmsallarına görə hər bir $N_j,\ j = 1,2,\ldots.$ qolunda $p_j(x_j)$ və $q_j(x_j)$ potensiallarını qurun.

Teorem 20. Spektral verilənlərin xüsusiyyətləri $p_j(x_j)$ və $q_j(x_j)$ potensiallarını hər bir qolunda birqiymətli təyin edir. Hər bir $N_j,\ j = 1,2,\ldots.$ qolunda aşağıdakı münasibətlər ödənilir

$$\lim_{\lambda\to\frac{n}{2}}(n-2\lambda)R_{jj}(\lambda) = S_{nj}^{+},$$

$$\lim_{\lambda\to\frac{n}{2}}(n+2\lambda)\frac{1}{R_{jj}(\lambda)} = S_{nj}^{-}.$$

Nəhayət

$$\upsilon_{nn}^{11j} = -\upsilon_{nn}^{22j} = \frac{S_{nj}^{+} + S_{nj}^{-}}{2},$$

$$\upsilon_{nn}^{12j} = \upsilon_{nn}^{21j} = \frac{S_{nj}^{+} - S_{nj}^{-}}{2i}.$$

düsturlarından istifadə etməklə $p_j(x_j)$ və $q_j(x_j)$ potensiallarını hər bir $N_j,\ j = 1,2,\ldots.$ qollarında verilən spektral verilən əksolunma əmsalı olan $R_{j\,j}(\lambda)$ funksiyasına nəzərən birqiymətli təyin etmək olar.

NƏTİCƏ

Disseratasiya işi kompleks qiymətli, periodik potensiallı operatorlarıin spektral tədqiqinə həsr edilmişdir. Müxtəlif növ kompleks qiymətli, periodik potensiallı kəsilən operatorlar üçün tərs məsələlər öyrənilmiş, kvant qraflarında səpilmə məsələləri tədqiq edilmişdir. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır.

- Verilmiş kompleks ədədlər ardıcıllığının uyğun olaraq ikinci tərtib operatorlar dəstəsinin və yüksək tərtib diferensial operatorların spektral verilənləri olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılıb.
- Spektral parametri tənliyə polinomial daxil olan 2n tərtibli adi diferensial tənlik üçün duz və tərs məsələ həll edilmişdir. Göstərilmişdir ki, operatorlar dəstəsinin spektri kəsilməzdir, $\{k\omega_j : 0 \le k \le \infty, j = \overline{0.2m-1}\}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{ij\pi}{n}\right)$, oxlarını doldurur və burada $\frac{n\omega_j}{2}, j = \overline{0.2m-1}, n = 1,2,3,\dots,$ ədədləri ilə üst-üstə düşən spektral məxsusiyyətlər ola bilər. Ümumiləşdirilmiş normallaşdırıcı ədədlərə görə əmsalların yenidən bərpası kimi tərs məsələ həll olunmuşdur.
- Kompleks qiymətli, periodik potensiallı Şredinger operatoru üçün bütün oxda tərs məsələ həll olunmuşdur. Fundamental həllərin əsas xarakteristikaları öyrənilmiş, operatorun spektri araşdırılmışdır. Tərs məsələnin qoyuluşu formalaşdırılmış, onun üçün yeganəlik teoremi isbat edilmiş, tərs məsələnin həlli üçün konstruktiv alqoritm verilmişdir.
- Klassik Hill operatoru üçün alınmış nəticələr ulduz və ilmə şəkilli qraflara genişləndirilmişdir. Bu tip qraflarda xüsusi sərhəd şərtləri və qrafın təpə nöqtəsindəki tikmə şərtlərinin köməkliyi ilə Hill operatoru təyin olunmuşdur. Operatorun rezolventi aşkar şəkildə yazılmış, spektri dəqiq araşdırılmış və əks olunma əmsalına görə tərs məsələ həll olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Эфендиев, Р.Ф. Существование операторов преобразования для дифференциальных уравнений, полиномиально зависящих от параметра//Труды конференции, посвященной 80-летию К.Т.Ахмедова, -Баку: -30-31 октября, -1997, -с.81-82.
2. Efendiev, R.F. To the spectral analysis of ordinary differential operators polynomially depending on a spectral parameter with periodic matrix coefficients. //-Baku: Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, Academy of Science of Azerbaijan, -2000, v.12(20), p.30-34.
3. Эфендиев, Р.Ф. К спектральному анализу обыкновенных дифференциальных операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра с периодическими матричными коэффициентами//Theory and Practice of Differential Equations, Mathematical Research, -Saint-Petersburg: - 2000, с.142-146.
4. Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка//The Third International Conference “Tools for mathematical modelling”, -Saint-Petersburg, -18-23 june, -2001,-p.124.
5. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса дифференциальных операторов второго порядка//-Баку: Доклады НАН Азерб., -2001, v.57 № 4-6, -p.15-20.
6. Efendiev, R.F. Inverse problem for a class of second order differential operator//General Guide & Abstracts of Third Joint Seminar on Applied Mathematics, -Baku: Baku State Univers. & Zanjan Univers., -6-8 September -2002, -p.107.
7. Efendiev, R.F. Inverse problem for a class of ordinary differential operators with periodic coefficients // Conference on ILL-POSED and INVERSE PROBLEMS in honour of the 70-th anniversary of the birth of prof. M.M.Lavrent'ev,-Russia, Novosibirsk: -5-9 August, -2002, -p.

8. Эфендиев, Р.Ф. Необходимые и достаточные условия решения обратной задачи для операторных пучков с комплексными периодическими коэффициентами// Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики, информатики» посв., 80-летию проф. Л.А.Толоконникова, -Россия, Тула: -18-21 ноября -2003, -с.49-51
9. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса несамосопряженных опертаорных пучков с периодическими коэффициентами//»Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посв. 80-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева, -Москва: -2003, -с.247-249
10. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса операторов с комплексными периодическими коэффициентами//-Баку: Доклады НАН Азерб, -2004, №1-2, -р.39-43.
11. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами//-Kharkov: *Математическая физика, анализ и геометрия,* -2004, т.11, №1, -с.114-121 **(Impact factor 0.424)**.
12. Эфендиев, Р.Ф. Об одной задаче характеризации для пучка операторов с комплексными периодическими коэффициентами//-Баку: Доклады НАН Азерб, -2005, №3, -р.6-11.
13. Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторных пучков с обобщенной функцией//-Москва: Теоретическая и математическая физика, -2005, т.145, №1, -с. 102-107.
14. Èfendiev, R.F. Spectral analysis of a class of nonselfadjoint differential operator pencils with a generalized function//-Moscow: Theoretical and Mathematical Physics, -2005, v.145, №1, -p.1457–1461**(Impact factor 0.901)**.
15. Efendiev, R.F. Complete solution of an inverse problem for one class of the high order ordinary differential operators with periodic coefficients//Journal of Mathematical Physics Analysis and Geometry, -2006, v.2, №1, -p.73-86. **(Impact factor 0.424)**.

16. Efendiev, R.F. Inverse wave scattering with discontinuous wave speed// International conference «Inverse and III-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to prof. M. M.Lavrent'ev on the occasion of his 75-th birthday, -Russia, Novosibirsk: -20-25 August, -2007, -1p.
17. Efendiev, R.F. The characterization problem for one class of second-order operator pencil with complex periodic coefficients//-Moscow: Moscow Mathematical Journal, -2007, v.7, №1, -p.55–65. **(Impact factor 0.746)**.
18. Efendiev, R.F, Inverse spectral problem for a differential operator with discontinuity wave speed//-Baku: Report of National Academy of Science Azerbaijan, -2008, №3, -p. 6-11.
19. Efendiev, R.F. An iterative algorithm for the solution of the discrete periodic optimal regulator problem/ F.A.Aliev, N.A.Safarova, A.Nachaoui, Y.S.Gasimov, R.F.Efendiev// -Baku: Report of National Academy of Science Azerbaijan, -2008, v. LXIV, № 6, –p.1-16.
20. Эфендиев, Р.Ф. Обратная задача для дифференциального оператора второго порядка с разрывными коэффициентами// -Баку: Вестник Бакинского Государственного Университета, -2008, №4, -p.17-22.
21. Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint Hill operators with a step like Potentials //International conference on Functional Analysis dedicated to 90-th anniversary of V.E.Lyantse. - Lviv, Ukraine: -17-21 November, -2010, -p.37-38.
22. Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D. Inverse wave spectral problem with discontinuous wave speed, //-Ukraine: Journal of *Mathematical Physics, Analysis,* Geometry, -2010, v.6, №3, -p.255- 265. **(Impact factor 0.424)**.
23. Orucov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint Hill operators // -Baku: Journal of Qafqaz University, Mathem. and comp. sciences -2010, № 29, v.1, -p. 47-54.
24. Efendiev, R.F. Spectral analysis for one class of second-order indefinite nonselfadjoint differential operator pencil// Journal Applicable Analysis, -2011, v. 90, №12, -p.1837-1849. **(Impact factor 1.076)**.

25. Orucov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of nonselfadjoint hill operator with step-like potentials // -Baku: Journal of Qafqaz University, -2011, №31, -p. 8-15.
26. Efendiev, R.F. Wave propagation in a one-dimensional layered-inhomogeneous medium with a barrier// The 4-th Congress of the Turkic World Mathematics Society, -Baku, -1-3 July, -2011, -p.192
27. Orujov, H.D., Efendiev, R.F. Spectral analysis of the wave equation in a one-dimensional layered inhomogeneous medium with barrier//-Baku: Journal of Qafqaz University, -2012, № 33,-p. 45-49.
28. Niftiyev, A.A., Efendiev, R.F., Alisheva, K.I. Variable domain eigenvalue problems for the Laplace operator with density //-Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, -ISSN: 2222-5498, -2012, v.2, №1, -p.
29. Niftiyev, A.A., Efendiev, R.F. Variable domain eigenvalue problems for the Laplace operator with density// International *Journal of Nonlinear Science, -2013, v.*16, №3, -p.280-288.
30. Оруджев, Г.Д., Эфендиев, Р.Ф. Спектральный анализ одного несамосопряженного операторного пучка с разрывными коэффициентами//-Киев: Доклады НАН Украины, -2014, №4, -с. 25-32.
31. Efendiev R.F, Garcia-Raffi, Luis M. Spectral analysis of the complex hill operator on the star graph//-Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2014, v.40, special issue, -p.124–132.
32. Orudzhev, H.D., Efendiev, R.F. Recovering of the Hill operator by two spectra //-Baku: Journal of Qafqaz University, -2015, v.3, № 2, -p. 8-15.
33. Efendiev, R.F., Orudzhev, H.D., Zaki, FA El-Raheem. Spectral analysis of wave propagation on branching strings//-London: Boundary Value Problems, -2016, 215, -p.1-18 DOI: 10.1186/s13661-016-0723-3. **(Impact factor 1.637)**.
34. Efendiev, R.F. Spectral analysis of Hill operator on lasso shaped graph. // International conference on “Operators in Morrey-type spaces and applications” dedicated to 60-th birthday of prof.

V.S.Guliyev, -Kirsehir-Turkey: 10-13, July -2017, -p.153. (OMTSA-2017).
35. Efendiev, R.F. Inverse spectral problem for hill operator on lasso graph//The 6-th international conference on control and optimization with Industrial Applications, -Baku: 11-13 July, -2018, -p.150-151.

Dissertasiyanın müdafiəsi **30 iyun 2021-ci il tarixində saat 14^{00}** –da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **26 may 2021-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 25.05.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 80000
Tiraj: 30