AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALAR FƏZASININ ALTCƏBRLƏRİ CƏMİ İLƏ YAXINLAŞMA

İxtisas: 1202.01 - Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Aida Xurşud qızı Əsgərova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2021

Dissertasiya işi Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda "Funksiyalar nəzəriyyəsi" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: r.e.d., dosent
Vüqar Elman oğlu İsmayılov

Rəsmi opponentlər: r.e.d., dosent
Rövşən Əlifağa oğlu Bəndəliyev

f.-r.e.d., professor
Alik Malik oğlu Nəcəfov

f.-r.e.n., dosent
Fuad Ağca oğlu Abdullayev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:

AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor

Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.-r.e.n.

Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f.-r.e.d., professor

Bilal Telman oğlu Bilalov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. 1885-ci ildə Karl Veyerşrtrass göstərmişdir ki, parçada kəzilməz funksiya ixtiyari dəqiqliklə ən sadə funksiyalarla – polinomlarla yaxınlaşdırıla bilər. Marşal Stoun bu teoremi ümumiləşdirərək göstərdi ki, ixtiyari X kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanı kəsilməz funksiyalar fəzasının hər hansı altcəbrindən olan funksiyalarla o zaman yaxınlaşdırmaq olar ki, bu cəbr X fəzasının nöqtələrini ayırsın və X -in heç bir nöqtəsində 0 -a çevrilməsin. Bu teorem klassik Veyerştrass teoremini iki istiqamətdə ümumiləşdirir: $[a,b]$ parçası əvəzinə ixtiyari X kompakt Hausdorf fəzası, polinomlar sinfi əvəzinə isə kəsilməz funksiyalar fəzasından olan daha ümumi funksiyalar sinfi götürülür. Ədəbiyyatda bu vacib teorem Stoun-Veyerştrassın adı ilə məhşurdur. Qeyd edək ki, yuxarıda və dissertasiya işində həqiqi qiymətlər alan kəsilməz funksiyalar fəzasından söhbət gedəcək.

Hal-hazırda klassik Stoun-Veyerştrass teoreminin gücləndirilməsi, ümumiləşməsi, analoqlarının alınması istiqamətində bir çox maraqlı nəticələr mövcuddur (bax: E.Bishop, S. Machado, S. Boel, T. Carlsen, N. Hansen, P. Chernoff, R. Rasala, W. Waterhouse, J. Prolla, K. Srikanth, R. Yadav, R. Stephenson və s.). Azərbaycan riyaziyyatçılarının Stoun-Veyerştrass teoreminin ümumiləşməsinə və analoqlarına həsr olunan işləri sırasında B. Bilalov, V. Mirzəyev, A. Turovskinin işlərini qeyd etmək olar.

Stounun ideyalarının ümumiləşməsində bir vacib istiqamət kəsilməz funksiyalar fəzasının bir cəbri halından bir neçə cəbrlər cəmi halına keçidlə bağlıdır. Tutaq ki, X yuxarıdakı kimi kompakt Hausdorf fəzası, $C(X)$ X -də həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyalar fəzası və A_i, $i=1,...,k$, $C(X)$ fəzasının hər hansı altcəbrləridir. $C(X)$ fəzasından olan funksiyaların $A_1+\cdots+A_k$ altcəbrlərindən olan funksiyalarla yaxınlaşmasına baxaq. Bu yaxınlaşmaya nəzərən aşağıdakı təbii məsələlər meydana çıxır:

1) Hansı şərtlər daxilində $C(X)$ $A_1+\cdots+A_k$ cəmi ilə tamamilə üst-üstə düşür?

2) Hansı şərtlər daxilində $A_1+\cdots+A_k$ cəmi $C(X)$-də hər yerdə sıxdır?

3) Konkret $f\in C(X)$ funksiyasının $A_1+\cdots+A_k$ cəmindən olan funksiyalarla yaxınlaşma xətasını necə hesablamaq olar?

4) Verilmiş $f\in C(X)$ funksiyasına $A_1+\cdots+A_k$-dan olan ən yaxşı yaxınlaşmanı (ekstremal elementi) necə xarakterizə etmək olar?

(1) və (2) məsələləri üçün kafi şərtlər maraqlı olduğu qədər zəruri şərtlər də maraqlıdır. Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qeyd olunan məsələlərin siyahısını genişləndirmək olar. Yaxınlaşmalar nəzəriyyəsi baxımından, həmçinin $A_1+\cdots+A_k$ cəminin $C(X)$-də qapalılığı və proksiminallığı məsələləri, $(A_1+\cdots+A_k)^{\perp}$ annulyatorunun təsviri, yəni $A_1+\cdots+A_k$-dan olan hər bir elementi annulə edən funksionallar fəzasının strukturu və s. məsələlər də elmi maraq kəsb edir.

Qeyd edək ki, $C(X)$-in altcəbrlərinə nəzərən məsələlər diapazonu A.N. Kolmoqorovun məşhur superpozisiya teoremindən sonra meydana çıxmışdır. Bu teorem cəbrlər dilində aşağıdakı şəkildə səslənir: I^d vahid kubu üçün ($\mathrm{I}=[0,1]$, $d\geq 2$) elə $2d+1$ sayda cəbr mövcuddur ki, $C(\mathrm{I}^d)=$ $A_1+\cdots+A_{2d+1}$. Qeyd edək ki, burada hər bir cəbr özünün bir məxsusi elementi ilə doğrulur, yəni A_i üçün elə $s_i\in A_i$ elementi mövcuddur ki, $A_i=\{g_i\circ s_i : g_i\in C(\mathrm{R})\}$. Bu teorem xətti superpozisiyalarla və kəsilməz funksiyalar fəzasının altcəbrləri cəmi ilə yaxınlaşmada bir çox məsələlərin araşdırılmasının başlanğıcı olmuşdur. Kolmoqorovun superpozisiya teoremindən sonra çoxlu vacib və maraqlı işlər meydana çıxmışdır. Bu işlərin arasında Lorentz, Fridman, Vitushkin və Henkin, Ostrand, Sternfeld, Sprecher, Sproston və Straus, Marshall və O'Farrell, Khavinson, İsmayılovun işlərini qeyd etmək olar. Bu işlər əsasən Kolmoqorovun

superpozisiya teoremini ümumiləşdirməyə, gücləndirilməyə və kəsilməz funksiyalar fəzasının ixtiyari cəbrləri cəminin xassələrini öyrənməyə yönəlmişdir. Məsələn, Ostrand Kolmoqorov teoremini kompakt metrik fəzalara ümumiləşdirmişdir. O, isbat etmişdir ki, d ölçülü X kompakt metrik fəzası üçün elə kəsilməz $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2d+1} \subset C(X)$ funksiyaları var ki, $C(X) = A_1 + \cdots + A_{2d+1}$, $A_i = \{g_i \circ \alpha_i : g_i \in C(\mathrm{R})\}$, $i = 1,...,2d+1$. Sternfeld göstərmişdir ki, hər hansı d ölçülü X metrik fəzası üçün cəbrlərin sayı $2d+1$-dən az ola bilməz. Bundan əlavə, o, metrik fəzanın d ölçülü olmasının cəbrlər cəmi ilə xarakterizasiyasını vermişdir. O göstərmişdir ki, X metrik fəzası yalnız və yalnız o zaman d ölçülüdür ki, $2d+1$ sayda $A_i \subset C(X)$ altcəbr mövcud olsun ki, $C(X) = A_1 + \cdots + A_{2d+1}$ və $2d+1$-dən az sayda altcəbr halında $B_i \subset C(X)$, $i = 1,...,k$, $k < 2d+1$ $C(X) \neq B_1 + \cdots + B_k$ doğrudur. Bu nəticədən alınır ki, Kolmoqorov superpozisiya teoremindəki toplananların sayı azaldıla bilməz.

Sternfeldin işlərində kəsilməz funksiyalar fəzasının altcəbrləri cəminin xassələrinin öyrənilməsinə müstəqil istiqamət kimi başlanılmışdır. Kolmoqorov teoremində və onun ümumiləşmələrində deyilir ki, konkret X topoloji fəzası üçün (d ölçülü kub, d ölçülü kompakt Evklid fəzası, d ölçülü metrik kompakt üçün) elə A_i, $i = 1,...,2d+1$ cəbrləri var ki, $C(X) = A_1 + \cdots + A_{2d+1}$. Daha ümumi məsələ qoyula bilər: Tutaq ki, X kompakt topoloji fəza və A_i, $i = 1,...,k$ $C(X)$-in altcəbrləridir. Hansı şərtlər daxilində $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$? Bu məsələdə şərtlər A_i cəbrlər ailəsi üzərinə qoyulmalıdır. Məsələn, kompakt metrik və kompakt Hausdorf X fəzaları üçün uyğun olaraq Sternfeld və Sproston, Straus $C(X)$ fəzasının $A_1 + \cdots + A_k$ cəmi ilə üst-üstə düşməsi üçün kafi şərt almışlar (həmin şərt $A_2 = \cdots = A_k$ halında həm də zəruridir).

Dissertasiya işində kəsilməz funksiyalar fəzasının altcəbrləri cəmi ilə yaxınlaşmasına aid bir sıra məsələlərin öyrənilməsi davam

etdirilir. Daha dəqiq yuxarıda qeyd olunan (1)-(4) məsələləri öyrənilir və uyğun məlum nəticələri ümumiləşdirən, tamamlayan və gücləndirən bir neçə teorem isbat edilir.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Kəsilməz funksiyalar fəzası, kəsilməz funksiyalar fəzasının cəbrləri cəmi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. 1) Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının bu fəzanın altcəbrləri cəmi şəklində göstəriliş məsələsini araşdırmaq. Cəbrlər cəminin kəsilməz funksiyalar fəzasında sıxlığı haqqında məsələni öyrənmək.

2)Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın kəsilməz funksiyalar fəzasının iki altcəbrinin cəmi ilə yaxınlaşma məsələsində Diliberto-Straus alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılmasını araşdırmaq.

3) Cəbrlər cəminin elementinin verilmiş kəsilməz funksiya üçün ən yaxşı yaxınlaşma (ekstremal element) olması üçün zəruri və kafi şərti tapmaq.

4) Alınmış ümumi nəticələri konkret, tətbiqi baxımdan vacib olan ridge funksiyalar cəbrlərinin approksimativ xassələrinin öyrənilməsinə tətbiq etmək.

Tədqiqat metodları. İşdə funksiyalar nəzəriyyəsinin, funksional analizin, topologiyanın və yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. 1) Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının bu fəzanın altcəbrləri cəmi ilə göstərilişi haqqında nəticələr.

2) Cəbrlər cəminin kəsilməz funksiyalar fəzasında sıxlığı haqqında nəticələr.

3) Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın kəsilməz funksiyalar fəzasının iki altcəbrləri cəmi ilə yaxınlaşma məsələsində Diliberto-Straus alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılması haqqında nəticə.

4) Cəbrlər cəmi ilə ən yaxşı yaxınlaşmanın xarakterizasiyası üçün Çebışev tipli teorem haqqında nəticə.

5) Ridge funksiyalar cəbrləri cəminin approksimativ xassələri

haqqında nəticələr. Çoxdəyişənli funksiyanın iki ridge cəbrin cəmi ilə yaxınlaşma xətasının hesablaması üçün düstur.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. 1) Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının bu fəzanın altcəbrləri cəmi şəklində göstərilişi üçün zəruri şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər belə göstərilişin mümkünlüyü üçün Sproston və Strausun kafi şərtlərini tamamlayır.

2) İsbat edilmişdir ki, iki cəbr halı üçün yuxarıda göstərilən zəruri şərt həmçinin kafidir. Alınmış nəticə klassik Stoun-Veyerştrass teoremini bir cəbr halından cəbrlər cəmi halına ümumiləşdirir.

3) Cəbrlər cəminin kəsilməz funksiyalar fəzasında sıxlığı üçün (xüsusi halda həm də kafi olan) zəruri şərt alınmışdır.

4) Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın cəbrlər cəmi ilə approksimasiya məsələsində Diliberto-Straus alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılması isbat edilmişdir.

5) Cəbrlər cəminin elementinin verilmiş kəsilməz funksiya üçün ən yaxşı yaxınlaşma (ekstremal element) olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır. Alınmış nəticə ən yaxşı yaxınlaşma verən polinomun xarakterizasiyası üçün Çebışevin teoreminin analoqudur.

6) Alınmış ümumi nəticələr ridge funksiyalar cəbrləri cəminin approksimativ xassələrinin öyrənilməsinə tətbiq olunmuşdur. Çoxdəyişənli funksiyanın iki ridge cəbrləri cəminin elementləri ilə yaxınlaşma xətasının hesablanması üçün düstur alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İş nəzəri xarakter daşıyır. İşin nəticələrindən funksiyalar nəzəriyyəsində, yaxınlaşmalar nəzəriyyəsində, funksional analizdə və mürəkkəb funksional asılılıqların sadə funksiyalarla (ridge funksiyalar, radial funksiyalar və s.) approksimasiyası tələb olunan oblastlarda istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. İşin əsas nəticələri Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının "Funksiyalar nəzəriyyəsi" şöbəsinin seminarlarında (şöbə müdiri r.e.d. V.E. İsmayılov), o cümlədən, respublika və beynəlxalq elmi konfranslarda, Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-illik

yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı respublika elmi konfransında (17 – 18 May, Bakı 2017), akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" adlı beynəlxalq elmi konfransda (6 – 8 Dekabr, Bakı 2017), akademik E.İ. Moisseev, akademik V.Ş. Şaqapov, A.P. Soldatovun 70-illik yubileyinə həsr olunmuş «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» adlı beynəlxalq elmi konfransda (25 – 29 iyun, Sterlitamak, Ufa), «Complex Analysis and Approximation Theory» (29 – 31 May, Ufa 2019), AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" mövzusunda beynəlxalq elmi konfransda (23-25 oktyabr, Baku 2019) məruzə edilmişdir.

İddiaçının şəxsi töhfəsi. Dissertasiyada isbat olunmuş bütün teoremlər, kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının bu fəzanın altcəbrlərinin cəmi şəklində göstərilməsi haqqında; cəbrlər cəminin kəsilməz funksiyalar fəzasında sıxlığı haqqında; kəsilməz funksiyanın bu fəzanın iki altcəbrindən olan funksiyalarla approksimasiya məsələsində Diliberto-Strauss alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılması haqqında; cəbrlər cəmi ilə ən yaxşı yaxınlaşmanın xarakterizasiyası üçün Çebışev tipli teorem haqqında; ridge funksiya cəbrləri cəminin approksimasiya edici xassəsi haqqında; çoxdəyişənli funksiyanın iki ridge cəbrinin cəminin elementləri ilə yaxınlaşma xətasının hesablanması haqqında teoremlər müəllif tərəfindən alınmışdır.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu.

Nəşrlər. İşin nəticələri, siyahısı avtoreferatın sonunda verilmiş 15 (8 məqalə, bunlardan 7-si Clarivate Analytics-in Web of Science platformasında indekslənir (3-ü "Science Citation Index Expanded" bazasında, 4-ü "Emerging Sources Citation Index" bazasında) və 7 tezis (6-sı beynəlxalq, 1-i respublika səviyyəli elmi konfranslarda məruzə edilmişdir)) işdə öz əksini tapmışdır.

İşin strukturu və həcmi. Dissertasiya işi giriş (~ 48000), 3

fəsil (I Fəsil ~ 52000, II Fəsil ~ 76000, III Fəsil ~ 44000), 116 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi 125 səhifədir (~ 220000 işarə sayı).

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, 3 fəsil, ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəsildə kəsilməz funksiyalar fəzasının öz altcəbrləri cəmi ilə göstəriliş və cəbrlər cəminin $C(X)$-də hər yerdə sıx olması məsələlərinə baxılır. Bu fəsil 5 paraqrafdan ibarətdir. Paraqraf 1.1-də cəbrlər cəmi ilə göstəriliş məsələsi şərh olunur və belə göstərilişin mümkünlüyü üçün bir neçə məlum zəruri və ya kafi şərtlər müzakirə olunur. Tutaq ki, X kompakt Hausdorf fəzası, $C(X)$ müntəzəm yığılma topologiyası ilə təmin edilmiş həqiqi kəsilməz funksiyalar fəzasıdır. Tutaq ki, bundan əlavə bizə $C(X)$ kəsilməz funksiyalar fəzasının sonlu sayda $A_1,...,A_k$ qapalı, sabit funksiyaları özündə saxlayan altcəbrləri verilmişdir. Aşağıdakı məsələyə baxaq. $A_1,...,A_k$ üzərinə qoyulan hansı şərtlər $C(X)=A_1+\cdots+A_k$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruri və / və ya kafidir? Bu paraqrafda əvvəlcə növbə ilə yuxarıdakı bərabərlik üçün 2 sadə zəruri şərtə, məhz aşağıdakı şərtlərə baxılır:

a) iki müxtəlif $x, y \in X$ nöqtələri üçün bu nöqtələri ayıran A_i cəbri mövcuddur;

b) iki müxtəlif $P, Q \subset X$, $P \cap Q = \varnothing$ qapalı çoxluq üçün bu çoxluqları ayıran A_i cəbri mövcuddur.

Növbə ilə göstərilir ki, bu şərtlər $C(X)=A_1+\cdots+A_k$ göstərilişi üçün kafi deyil. Sonra Sproston və Strausun $k=2$ halında həm də zəruri olan bir kafi şərti gətirilir.

Paraqraf 1.2-də kəsilməz funksiyalar fəzasının sonlu sayda altcəbrlərinə nəzərən *dövr* və *yarımdövr* adlanan yeni obyektlər və bu obyektlərlə doğrulan funksionallar təyin olunur. Uyğun obyektləri təyin etmək üçün X-in nöqtələri üçün əvvəlcə R_i, $i=1,...,k$

ekvivalentlik münasibətinə baxaq:

$$a \overset{R_i}{\sim} b \Leftrightarrow \text{əgər bütün } f \in A_i \text{ üçün } f(a) = f(b)$$

X fəzası özü kompakt olduğuna görə hər bir $i = 1,...,k,$ üçün $X_i = X/R_i$ faktor fəzası kompaktdır. Bundan əlavə, $s_i : X \to X_i$ kanonik proyeksiyaları kəsilməzdir.

Stoun-Veyerştrass teoremindən alınır ki, hər bir A_i, $i = 1,...,k$ cəbri (çoxluq kimi) aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər:

$$A_i = \{ f(s_i(x)) : f \in C(X_i)\}, i = 1,...,k.$$

A_i, $i = 1,...,k,$ cəbrlər ailəsinə nəzərən *dövr* və *yarımdövr* aşağıdakı şəkildə təyin olunur.

Tərif 1. *Əgər* 0 *olmayan tam komponentli elə* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, *vektoru varsa ki, aşağıdakı bərabərlik ödənilsin, onda* $l = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ *nöqtələr çoxluğu* A_i, $i = 1,...,k,$ *cəbrlər ailəsinə nəzərən dövr adlanır.*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{s_i}(x_j) = 0 \text{ bütün } i = 1,...,k \text{ üçün}$$

Burada δ_a a-nöqtəsində toplanmış vahid nöqtəvi yükdür (Dirak ölçüsüdür).

Misal üçün, $l = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$ çoxluğu I^3, $\mathrm{I} = [0,1]$, $A_i = \{p(z_i) : \quad p \in C[0,1]\}, i = 1,2,3$ cəbrlər ailəsinə nəzərən dövr təşkil edir. Tərif 1-də λ vektoru $(-2,1,1,1,-1)$ kimi seçilə bilər.

Tərif 2. *Əgər* 0 *olmayan tam komponentli elə* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ *vektoru varsa ki, hər bir* $i = 1,...,k,$ *indeksi üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilsin, onda* $l = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ *nöqtələr çoxluğu* A_i, $i = 1,...,k,$ *cəbrlər ailəsinə nəzərən yarımdövr adlanır.*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{s_i(x_j)} = \sum_{t=1}^{r_i} \lambda_{i_t} \delta_{s_i(x_{i_t})}, r_i \le k.$$

Qeyd edək ki, hər bir $i = 1,\ldots,k$ üçün $\{\lambda_{i_t}, t = 1,...,r_i\}$ çoxluğu $\{\lambda_j,\ j = 1,..., n\}$ çoxluğunun altçoxluğudur. Bu o deməkdir ki, hər bir i indeksi üçün $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\delta_{s_i(x_j)}$ cəmində k-dan çox olmayan sayda toplanan var (bütün qalan toplananların cəmi eyniliklə 0-ra bərabərdir).

Yarımdövrə aid bir misal gətirək. Tutaq ki, uyğun olaraq s_1 və s_2 kanonik inkaslarına malik A_1 və A_2 cəbrləri verilmişdir. Tutaq ki, $l = \{x_1, x_2,..., x_n\}$ növbəti xassəli çoxluqdur:

$$s_1(x_1) = s_1(x_2), s_2(x_2) = s_2(x_3), s_1(x_3) = s_1(x_4),..., s_2(x_{n-1}) = s_2(x_n).$$

Onda $l = \{x_1,\ldots,x_n\}$ çoxluğu A_1 və A_2 cəbrlərinə nəzərən yarımdövr olacaq.

Qeyd edək ki, Marshall və O'Farrellin işində $x_i \neq x_{i+1}$ şərtini və aşağıdakı bərabərliklər zəncirini ödəyən $s_1(x_1) = s_1(x_2)$, $s_2(x_2) = s_2(x_3)$, $s_1(x_3) = s_1(x_4),...,$ və ya $s_2(x_1) = s_2(x_2)$, $s_1(x_2) = s_1(x_3)$, $s_2(x_3) = s_2(x_4),...,$ $(x_1,\ldots,x_n)$ nizamlı nöqtələr çoxluğu (A_1, A_2) cəbrlərinə nəzərən ildırım adlanır. Analoji qayda ilə $(x_1, x_2,...)$ sonsuz ildırımı təyin olunur. Əgər $(x_1,..., x_n, x_1)$ də ildırım və n cüt ədəd olarsa, onda $(x_1,\ldots,x_n)$ çoxluğu qapalı ildırım adlanır.

Paraqraf 1.2-də daha bir tərif daxil edilir.

Tərif 3. *Əgər l-lə bağlı olan λ vektoru elə seçilə bilərsə ki, $|\lambda_i| \le q,\ \ i = 1,..., n,$ olsun və q bu xassəli minimal ədəddirsə, onda l dövrü (və ya yarımdövrü) q-dövr (q-yarımdövr) adlanır.*

Məsələn, yuxarıda baxılan yarımdövr 1-yarımdövrdür. Əgər bu misalda, $s_2(x_{n-1}) = s_2(x_1)$, onda $\{x_1, x_2,..., x_{n-1}\}$ çoxluğu 1-dövrdür. $U = \{u(x)\}$, $V = \{v(y)\}$ cəbrlərinə nəzərən 2-dövrə aid bir sadə misal gətirək. İki $[0,1]^2$ və $[0,2]^2$ kvadratlarının təpə nöqtələrinin birləşməsinə baxaq, yəni

$$\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0)\}.$$

Aydındır ki, bu çoxluq $(2,1,1,-1,-1,-1,-1)$ vektoru ilə bağlı olan 2-dövrdür.

Eyni qayda ilə ixtiyari q natural ədədi üçün q-dövr və ya q-yarımdövrə misal gətirmək olar.

Hər bir $l=\{x_1,\ldots,x_n\}$ yarımdövrü və onunla bağlı olan $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ vektoru aşağıdakı funksionalı doğurur

$$F_{l,\lambda}(f)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(x_j), \quad f\in C(X).$$

Aydındır ki, $F_{l,\lambda}$ norması $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|$ bərabər olan, xətti məhdud funksionaldır.

1.3-cü paraqrafda hər hansı kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının onun k sayda qapalı cəbrlər cəmi ilə göstərilişi üçün zəruri şərt alınır. Yuxarıda qeyd olunan məsələ üçün kafi şərtlər Sternfeld tərəfindən 1978-ci ildə alınmışdır. Bu paraqrafda əvvəlcə aşağıdakı lemma isbat edilir:

Lemma 1. *Əgər* $l=\{x_1,\ldots,x_n\}$ *dövrdürsə, onda hər bir* $g\in A_1+\cdots+A_k$ *elementi üçün* $F_{l,\lambda}(g)=0$.

Sonra əsas nəticə isbat edilir:

Teorem 1. *Aşağıdakı şərtlər* $C(X)=A_1+\cdots+A_k$ *bərabərliyinin ödənilməsi üçün zəruridir:*

(Z_1) X *fəzasında* A_i, $i=1,...,k$ *cəbrlərinə nəzərən dövr mövcud deyil,*

(Z_2) *Hər bir* $q\in\mathbb{N}$ *üçün bütün* q*-yarımdövrlərin uzunluqları müntəzəm məhduddur.*

Paraqraf 1.4-də isbat edilir ki, iki altcəbr ($k=2$) halı üçün (Z_1) və (Z_2) həmçinin kafi şərtlərdir. Bir ($k=1$) altcəbr halında alınmış nəticə klassik Stoun-Veyerştrass teoremi ilə üst-üstə düşür.

Teorem 2. *Əgər* $k=2$, *onda* (Z_1) *və* (Z_2) *şərtləri birlikdə* $C(X)=A_1+\cdots+A_k$ *göstərilişi üçün zəruri və kafidir. Bundan əlavə* (Z_2) *şərtində yalnız* 1*-yarımdövrlərə baxmaq kifayətdir.*

Teorem 2-ni tətbiq üçün daha rahat şəkildə aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Teorem 3. $C(X) = A_1 + A_2$ *göstərilişi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki,* X *-də* (A_1, A_2) *cəbrlərinə nəzərən qapalı ildırım yoxdur və ildırımların uzunluqları müntəzəm məhduddur.*

$X \subset \mathrm{R}^2$ kompakt metrik çoxluq, $U = \{u(x)\}$ və $V = \{v(y)\}$ X -in uyğun koordinat oxlarına proyeksiyalarında təyin olunmuş birdəyişənli funksiyalar cəbrləri üçün teorem 3 ilk dəfə Khavinson tərəfindən alınıb. Sternfeldin nəticələrindən istifadə edərək Khavinson öz monoqrafiyasında bu nəticəni xətti superpozisiyalar halı üçün də isbat etmişdir.

Daha sonra bu paraqrafda isbat edilir ki, Stoun-Veyerştras teoremi teorem 3-ün nəticəsidir və teorem 1-in şərtləri $C(X) = A_1 + \cdots + A_k$ göstərilişi üçün $k > 2$ olduqda zəruri şərtlər deyil.

1.5-ci paraqrafda kəsilməz funksiyalar fəzasının sonlu sayda qapalı cəbrlər cəminin qapanması şəklində göstərilişi üçün bir zəruri şərt alınmışdır. Alınmış nəticə kəsilməz funksiyanın cəbrlər cəminin elementləri ilə ixtiyari dəqiqliklə yaxınlaşmasının mümkünlüyü haqqında məsələni müsbət həll edir. Bu paraqrafın əsas nəticəsini aşağıdakı teorem təşkil edir.

Teorem 4. *Tutaq ki,* $\overline{A_1 + \cdots + A_k} = C(X)$. *Onda* X *fəzasında* A_i, $i = 1,...,k$ *cəbrlər ailəsinə nəzərən dövr yoxdur.*

İkinci fəsildə kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın iki qapalı cəbrlər cəmi ilə ən yaxşı yaxınlaşma məsələsinə baxılır və Diliberto-Straus alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılması araşdırılır. Bundan əlavə ən yaxşı yaxınlaşmanı (ekstremal elementi) xarakterizə etmək üçün Çebışev tipli teorem isbat edilir. Bu fəsil 5 paraqrafdan ibarətdir. 2.1-ci paraqrafında məsələnin qoyuluşu şərh olunur və müxtəlif yaxınlaşma məsələləri üçün Diliberto-Straus alqoritminin yığılması haqqında bir neçə məlum nəticələr gətirilir. Tutaq ki, X kompakt Hausdorf fəzası, $C(X)$ X -də həqiqi kəsilməz funksiyalar fəzası və $A_1 \subset C(X)$,

$A_2 \subset C(X)$ sabit funksiyaları saxlayan qapalı cəbrlərdir. $h \in C(X)$ funksiyasının $A_1 + A_2$ cəminin elementləri ilə yaxınlaşmasına baxaq. Aşağıdakı funksional ardıcıllığı quraq:

$$h_1(x) = h(x), h_{2n} = h_{2n-1} - Fh_{2n-1}, h_{2n+1} = h_{2n} - Gh_{2n}, n = 1,2,...,$$

burada $F : C(X) \to A_1$ və $G : C(X) \to A_2$ ən yaxşı yaxınlaşma operatorlarıdır. Bu ardıcıllığın hədlərinin qurulması prosesi Diliberto-Straus alqoritmi adlanır. Aydındır ki, $\|h_1\| \geq \|h_2\| \geq \|h_3\| \geq \cdots \geq E(h)$, $E(h)$ yaxınlaşma xətasıdır, yəni

$$E(h) = \inf_{w \in A_1 + A_2} \|h - w\|.$$

Məsələ aşağıdakından ibarətdir: Hansı şərtlər daxilində Diliberto-Straus alqoritmi yaxınlaşma xətasına yığılır, yəni $\|h_n\| \to E(h)$, $n \to \infty$?

Bu məsələnin həlli üçün paraqraf 2.2-də $s : X \to X_1$ və $p : X \to X_2$ kanonik inikaslarının köməyi ilə qurulan maksimum və minimum funksiyalarının kəsilməzliyi məsələsi araşdırılır. Burada X_1 və X_2 faktor fəzaları, uyğun olaraq

$$a \overset{R_i}{\sim} b \Leftrightarrow \text{əgər bütün } f \in A_i \text{ üçün } f(a) = f(b) \ (i = 1,2),$$

ekvivalentlik münasibəti ilə doğrulur. Tutaq ki, $h \in C(X)$. Aşağıdakı həqiqi funksiyalara baxaq

$$f_1(a) = \max_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x), \ f_2(a) = \min_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x), a \in X_1,$$

$$g_1(b) = \max_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x), g_2(b) = \min_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x), b \in X_2.$$

Nə zaman f_i və g_i uyğun olaraq X_1 və X_2 çoxluqlarında kəsilməzdir? Bu funksiyaların kəsilməzliyi ciddi şəkildə s və p faktor inikaslarından asılıdır. Əgər f_i və g_i funksiyaları hər bir $h \in C(X)$ üçün kəsilməzdirlərsə, onda deyəcəyik ki, A_1 və A_2 cəbrləri C-xassəyə malikdirlər. C-xassəyə nəzərən növbəti teorem

doğrudur.

Teorem 5. *Tutaq ki, X kompakt sekvensial Hausdorf fəzasıdır və A $C(X)$ fəzasının sabitləri özündə saxlayan, qapalı altcəbridir. Tutaq ki, X_1 yuxarıda göstərilən ekvivalentlik münasibətilə doğrulan faktor fəza və $s: X \to X_1$ təbii faktor inikasıdır. Onda ixtiyari $h \in C(X)$ üçün o zaman f_1 və f_2 X_1-də kəsilməzdir ki, $s(x) = s(y)$ bərabərliyini ödəyən iki müxtəlif x və y nöqtələri və ixtiyari x-ə yığılan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı üçün y-ə yığılan və $s(y_n) = s(x_n)$, $n = 1,2,..,$ ödəyən $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı mövcud olsun.*

Daha sonra tətbiqi nöqteyi nəzərdən vacib olan, konkret ridge funksiyalar cəbri üçün bu teoremin nəticəsi isbat edilir.

Nəticə 1. *Əgər Q R^d-nin kompakt qabarıq çoxluğudursa, onda $A = \{g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\}$ cəbri C-xassəyə malikdir.*

Xüsusi halda bu nəticədən alınır ki, Q_x və Q_y $Q \subset \mathrm{R}^2$ kompakt qabarıq çoxluğunun uyğun olaraq x və y koordinat oxlarına proyeksiyalarıdırsa, onda $A_1 = \{f(x): \quad f \in Q_x\}$ və $A_2 = \{g(y): \ g \in Q_y\}$ cəbrləri C-xassəyə malikdirlər.

Paraqraf 2.3-də

$$F: C(X) \to A_1, \ Fh(a) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x) + \min_{\substack{x \in X \\ s(x)=a}} h(x) \right), a \in X_1,$$

$$G: C(X) \to A_2, \ Gh(b) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x) + \min_{\substack{x \in X \\ p(x)=b}} h(x) \right), b \in X_2$$

operatorları təyin olunur və növbəti teorem isbat edilir:

Teorem 6. *Tutaq ki, X kompakt Hausdorf fəzası və A_i, $i = 1,2$, $C(X)$ fəzasının sabitləri saxlayan qapalı altcəbrləridir. Fərz edək ki, bundan əlavə bu altcəbrlər C-xassəyə malikdirlər. Onda F*

və G $C(X)$ fəzasından uyğun olaraq A_1 və A_2 cəbrlərinə təsir edən mərkəzi ən yaxşı yaxınlaşma operatorlarıdır. Bundan əlavə bu operatorlar ekspansiv deyil, yəni onlar üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:

$$\|Fv_1 - Fv_2\| \le \|v_1 - v_2\| \text{ və } \|Gv_1 - Gv_2\| \le \|v_1 - v_2\|,$$

ixtiyari $v_1, v_2 \in C(X)$ üçün.

Bu teoremdən və Golombun ümumi nəticəsindən müəyyən şərtlər daxilində iki cəbrin cəmi ilə yaxınlaşma üçün Diliberto-Straus alqoritminin yığılması alınır.

Teorem 7. *Tutaq ki, X kompakt Hausdorf fəzası və A_i, $i = 1,2$ $C(X)$ fəzasının sabitləri saxlayan qapalı altcəbrləridir. Tutaq ki, bundan əlavə, bu altcəbrlər C-xassəyə malikdirlər və $A_1 + A_2$ cəmi $C(X)$-də qapalıdır. Onda $\|h_n\|$ ardıcıllığı yaxınlaşma xətasına yığılır.*

Paraqraf 2.4-də teorem 7-nin isbatı tamamilə yeni ideyaların tətbiqi ilə verilir. Bu isbatda cəbrlər cəminin qapalılığının nə üçün lazım gəldiyini görmək olur. Həmçinin onu da qeyd etmək lazımdır ki, birdəyişənli funksiyaların cəmi ilə yaxınlaşmada Diliberto-Straus alqoritminin yığılmasının klassik metodla isbatında $Q \subset \mathrm{R}^2$ kompakt çoxluğunun hər bir $(x_1,..., x_n)$ ildırımı koordinatları, uyğun olaraq, x_1 nöqtəsinin birinci koordinatına və x_n nöqtəsinin ikinci koordinatına bərabər $y \in Q$ nöqtəsinin əlavə olunması ilə qapanır (yəni qapalı ildırım əmələ gətirilir). Aydındır ki, Q çoxluğu iki parçanın dekart hasili olmadığı halda bu nöqtə Q çoxluğunda yerləşməyə bilər. Məhz buna görə də Diliberto və Strausun klassik nəticəsində və onun bəzi ümumiləşmələrində müəyyən çoxluqların dekart hasilinə rast gəlinir. Bizim isbatımızın başlıca ideyası bir nöqtə əlavə etməklə qapana bilməyən ildırımlardan və bu ildırınların yaratdığı funksionallar ardıcıllığının $*$-zəif limit nöqtələrindən istifadəyə əsaslanır. Teorem 7 və Nəticə 1-dən alınır ki, Diliberto və Strausun klassik nəticəsi yalnız tərəfləri koordinat oxlarına paralel olan

düzbucaqlıda deyil, R^2 fəzasının bir sıra kompakt qabarıq çoxluqları üçün də doğrudur. Daha dəqiq növbəti nəticə doğrudur.

Nəticə 2. *Tutaq ki,* $Q \subset \mathsf{R}^2$ *kompakt qabarıq çoxluq,* $A_1 = \{f(x)\}$ *və* $A_2 = \{g(y)\}$ Q*-nün uyğun olaraq* x *və* y *koordinat oxlarına proyeksiyalarında kəsilməz birdəyişənli funksiyalar cəbridir. Fərz edək ki, ixtiyari ildırımı bu çoxluğun qeyd olunmuş sayda nöqtələrini əlavə etməklə qapamaq olar. Onda* $h \in C(Q)$ *funksiyası üçün* $\|h_1\| = \|h\|, \|h_{2n}\| = \|h_{2n-1} - Fh_{2n-1}\|, \|h_{2n+1}\| = \|h_{2n} - Gh_{2n}\|,$ $n = 1,2,...,$ *ardıcıllığı* $A_1 + A_2$ *- dən olan yaxınlaşma xətasına yığılır.*

2.5-ci paraqrafda hər hansı kompakt metrik fəzada təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın iki qapalı cəbr cəminin elementləri ilə approksimasiya məsələsində ən yaxşı yaxınlaşmanın xarakterizasiyası üçün Çebışev tipli teorem isbat edilir. Bu məsələnin dəqiq qoyuluşuna keçək. Tutaq ki, X kompakt metrik fəza, $C(X)$ X -də həqiqi kəsilməz funksiyalar fəzası və $A_1 \subset C(X)$, $A_2 \subset C(X)$ sabit funksiyaları saxlayan qapalı cəbrlərdir. Həmçinin fərz edilir ki, A_1 və A_2 cəbrləri C-xassəyə malikdirlər. $h \in C(X)$ funksiyasının $A_1 + A_2$ cəminin elementləri ilə (və ya sadəcə $A_1 + A_2$ cəmi ilə) approksimasiyasına baxaq. Əgər aşağıdakı bərabərliyi ödəyən $w_0 \in A_1 + A_2$ elementi mövcuddursa,

$$\inf_{w \in A_1 + A_2} \|h - w\| = \|h - w_0\|,$$

onda bu element h üçün ən yaxşı yaxınlaşma (və ya ekstremal element) adlanır. Ən yaxşı yaxınlaşmanı necə xarakterizə etmək olar? Başqa sözlə, $w_0 \in A_1 + A_2$ üzərinə qoyulmuş hansı şərtlər bu funksiyanın verilmiş h funksiyası üçün ən yaxşı yaxınlaşma olması üçün zəruri və kafi şərtdir? Bu məsələnin həlli üçün əvvəlcə bir tərif daxil edilir.

Tərif 4. *Əgər* $f(x_i) = (-1)^i \|f\|$, $i = 1,2,...$ *və ya* $f(x_i) = (-1)^{i+1} \|f\|$, $i = 1,2,...$ *olarsa, sonlu və ya sonsuz* $(x_1, x_2, ...)$ *ildırımı* $f \in C(X)$ *funksiyası üçün* (A_1, A_2) *cəbrlərinə nəzərən*

ekstremal adlanır.

Ridge funksiyalar və xətti superpozisiyalar üçün bu anlayışa İsmayılovun işlərində baxılmışdır.

Paraqraf 2.5-in əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir:

Teorem 8. *Tutaq ki,* X *kompakt metrik fəza və* $u \in C(X)$. $w_0 \in A_1 + A_2$ *funksiyasının* u *üçün ən yaxşı yaxınlaşma olması üçün zəruri və kafi şərt* $u - w_0$ *funksiyası üçün* (A_1, A_2) *nəzərən qapalı və ya sonsuz ekstremal ildırımın olmasıdır.*

Üçüncü fəsildə tətbiqi nöqteyi nəzərdən vacib olan funksiyalar cəbrinə, ridge funksiyalar cəbrinə baxılır. Ridge funksiyalar müxtəlif oblastlarda çoxsaylı tətbiqlərə malikdirlər. Əvvəlki fəsillərdə alınmış ümumi nəticələr ridge funksiyalar cəbrlər cəmi üçün də doğrudur. Bu fəsil 3 paraqrafdan ibarətdir. Paraqraf 3.1-də əvvəlki fəsillərdəki teoremlərdən alınan bəzi nəticələr ridge cəbrlər cəmi halı üçün formulə edilir. Paraqraf 3.2-də iki ridge cəbrləri cəmi ilə yaxınlaşma xətasının hesablanması haqqında yeni teorem isbat edilir.

Tutaq ki, Q R^d-də kompakt çoxluq $d \geq 2$ və f Q-də hər hansı kəsilməz funksiyadır. f funksiyasının iki ridge cəbrləri cəmi ilə yaxınlaşmasına baxaq.

$$\mathsf{A}_1 = \{g_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) : g_1 \in C(\mathsf{R})\} \text{ və } \mathsf{A}_2 = \{g_2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) : g_2 \in C(\mathsf{R})\},$$

burada $\mathbf{a}$ və $\mathbf{b}$ $\mathsf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$-də qeyd olunmuş istiqamətlər və $\mathbf{x} \in Q$. $\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2$ cəmini R vasitəsilə işarə edək.

$\mathbf{a}$ və $\mathbf{b}$ istiqamətlərinə nəzərən ildırım R^d-də $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m)$, $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_{i+1}$ nizamlı nöqtələr çoxluğu kimi təyin olunur və $\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ parçaları növbə ilə $\mathbf{a}$ və $\mathbf{b}$ istiqamətlərinə perpendikulyardır. Əgər $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1)$ çoxluğu verilmiş nizamla ildırım əmələ gətirirsə və m cüt ədəddirsə, onda $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m)$ ildırımı qapalı adlanır. Əgər $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in Q$ nöqtələri varsa ki, $(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{z})$ də həmçinin ildırım təşkil etsin, onda $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m) \subset Q$ gətirilə bilən ildırım adlanır.

Hər bir qapalı $p = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_{2n})$ ildırımı ilə aşağıdakı

funksionalı əlaqələndirək:

$$G_p(f) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} f(\mathbf{p}_k).$$

Bu funksional aşağıdakı xassələrə malikdir:

(a) Əgər $g \in \mathrm{R}$, onda $G_p(g) = 0$.

(b) $\|G_p\| \le 1$. Əgər $p_i \ne p_j$ bütün $i \ne j,\ 1 \le i, j \le 2n$ üçün, onda $\|G_p\| = 1$.

Bu paraqrafın əsas nəticəsini aşağıdakı teorem təşkil edir.

Teorem 9. *Tutaq ki,* $Q \subset \mathrm{R}^d$ *kompakt qabarıq çoxluq,* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ *və* $f \in C(Q)$. *Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:*

1) $g_0 \in \mathrm{R}$ f *funksiyası üçün ən yaxşı yaxınlaşmadır;*

2) $\mathbf{a}$ *və* $\mathbf{b}$ istiqamətlərinə nəzərən ixtiyari $q = (\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n) \subset Q$ gətirilə bilən ildırımı üçün $\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+2}, ..., \mathbf{q}_{n+s} \in Q$ *nöqtələri var ki,* $(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n, \mathbf{q}_{n+1}, ..., \mathbf{q}_{n+s})$ *qapalı ildırımdır və* s *ədədi* q *ildırımından asılı olmayan, hər hansı* n_0 *natural ədədindən böyük deyil.*

Onda f *funksiyasının* R*-dən olan cəmlərlə yaxınlaşma xətası üçün aşağıdakı düstur doğrudur*

$$E(f) = \sup_{p \subset Q} |G_p(f)|,$$

burada, sup $\mathbf{a}$ və $\mathbf{b}$ istiqamətlərinə nəzərən bütün qapalı ildırımlar üzrə götürülür.

Qeyd etmək lazımdır ki, R fəzası $C(Q)$-də proksiminaldırsa, (yəni, Q-dən olan ixtiyari kəsilməz funksiya üçün R-dən olan ən yaxşı yaxınlaşma mövcuddursa) onda teorem 9-un ikinci şərti avtomatik olaraq ödənilir. Başqa sözlə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 10. *Tutaq ki,* $Q \subset \mathrm{R}^d$ *kompakt qabarıq çoxluq,* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $f \in C(Q)$ *və* R *altfəzası* $C(Q)$*-də proksiminaldır. Onda* f *funksiyasının* R*-dən olan cəmlərlə yaxınlaşma xətası üçün aşağıdakı düstur doğrudur*

$$E(f,\mathsf{R}) = \sup_{p\subset Q}\left|G_p(f)\right|,$$

burada, sup **a** və **b** istiqamətlərinə nəzərən bütün qapalı ildırımlar üzrə götürülür.

Paraqraf 3.3-də iki radial-bazis funksiyalar cəbrləri cəmi ilə yaxınlaşma üçün teorem 9-a analoji nəticə gətirilir. Radial-bazis funksiya –

$$F(\mathbf{x}) = r(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|),$$

şəkilli funksiyadır, burada $r:\mathsf{R}\to\mathsf{R}$ birdəyişənli funksiya, $\mathbf{x} = (x_1,...,x_d)$ dəyişən, $\mathbf{c}\in\mathsf{R}^d$ hər hansı qeyd olunmuş nöqtə və $\|\cdot\|$ R^d-də Evklid məsafəsidir. **c** nöqtəsi F funksiyasının mərkəzi adlanır. Başqa sözlə, radial-bazis funksiya–elə funksiyadır ki, həmişə $\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| = \alpha, \alpha\in\mathsf{R}$ sferası üzərində sabitdir. Bu funksiyalar və onların xətti kombinasiyaları mürəkkəb funksiyaların approksimasiyası üçün geniş istifadə olunur. Bu onların tətbiqi əhəmiyyətli approksimativ xassələri ilə bağlıdır. Radial-bazis funksiyalar RBF (radial bazis funksiya) neyron şəbəkələr nəzəriyyəsində böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Radial-bazis funksiyalar cəmləri sinfinə baxaq.

$$\mathsf{D} = \{r_1(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1\| + r_2(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2\| : \mathbf{x}\in Q, r_i\in C(\mathsf{R}), i = 1,2\},$$

burada, $Q\subset\mathsf{R}^d$ hər hansı kompakt çoxluq, $\mathbf{c}_1$ və $\mathbf{c}_2$ qeyd olunmuş nöqtələrdir. Burada r_i funksiyaları dəyişirlər. D sinfi aşağıdakı cəbrlərin cəmidir:

$$A_1 = \{r_1(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_1\| : \mathbf{x}\in Q, r_1\in C(\mathsf{R})\}$$

və

$$A_2 = \{r_2(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}_2\| : \mathbf{x}\in Q, r_2\in C(\mathsf{R})\}.$$

$f\in C(Q)$ funksiyasının D-dən olan cəmlərlə yaxınlaşmasına baxaq.

Bu paraqrafda bəzi məhdudiyyətlər daxilində (teorem 9-un şərtlərinə uyğun) yaxınlaşma xətası üçün aşağıdakı düstur alınır:

$$E(f,\mathsf{D}) \overset{def}{=} \inf_{r\in\mathsf{D}} \|f-r\| = \sup_{p\subset Q} |G_p(f)|,$$

burada, sup Q çoxluğunun $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ mərkəzlərinə nəzərən bütün qapalı ildırımları üzrə götürülür. Xatırladaq ki, $\mathbf{c}_1$ və $\mathbf{c}_2$ mərkəzlərinə nəzərən $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ...) \subset Q$ ildırımı $p_i \neq p_{i+1}$ şərtini və aşağıdakı bərabərliklər zəncirini ödəyən

$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_1\|, \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{c}_2\|, \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_4 - \mathbf{c}_1\|, ...$ və ya

$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_2\|, \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{c}_1\|, \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{c}_2\| = \|\mathbf{p}_4 - \mathbf{c}_2\|, ...$ nizamlı nöqtələr çoxluğu kimi təyin olunur. Əgər $(\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_{2n}, \mathbf{p}_1)$ çoxluğu verilən nizamla $\mathbf{c}_1$ və $\mathbf{c}_2$ mərkəzlərinə nəzərən ildırım təşkil edirsə, $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_{2n})$ çoxluğu $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ mərkəzlərinə nəzərən qapalı ildırım adlanır.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

1. Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasının bu fəzanın altcəbrləri cəmi şəklində göstərilişi üçün zəruri şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər belə göstərilişin mümkünlüyü üçün Sproston və Strausun kafi şərtlərini tamamlayır.
2. İsbat edilmişdir ki, iki cəbr halı üçün yuxarıda göstərilən zəruri şərt həmçinin kafidir. Alınmış nəticə klassik Stoun-Veyerştrass teoremini bir cəbr halından cəbrlər cəmi halına ümumiləşdirir.
3. Cəbrlər cəminin kəsilməz funksiyalar fəzasında sıxlığı üçün (xüsusi halda həm də kafi olan) zəruri şərt alınmışdır.
4. Kompakt Hausdorf fəzasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyanın cəbrlər cəmi ilə approksimasiya məsələsində Diliberto-Straus alqoritminin yaxınlaşma xətasına yığılması isbat edilmişdir.
5. Cəbrlər cəminin elementinin verilmiş kəsilməz funksiya

üçün ən yaxşı yaxınlaşma (ekstremal element) olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır. Alınmış nəticə ən yaxşı yaxınlaşma verən polinomun xarakterizasiyası üçün Çebışevin teoreminin analoqudur.

6. Alınmış ümumi nəticələr ridge funksiyalar cəbrləri cəminin approksimə edici xassələrinin öyrənilməsinə tətbiq olunmuşdur. Çoxdəyişənli funksiyanın iki ridge cəbrləri cəminin elementləri ilə yaxınlaşma xətasının hesablanması üçün düstur alınmışdır.

Dissertasiyanın nəticələri aşağıdakı işlərdə nəşr olunmuşdur:

1. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. A remark on the levelling algorithm for the approximation by sums of two compositions // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, - 2016. 4 (1), - p. 30-37.
2. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. Diliberto-Straus algorithm for the uniform approximation by a sum of two algebras // - India: Proceedings - Mathematical Sciences, Indian Academy of Sciences, - 2017. 127 (2), - p. 361-374.
3. Asgarova, A. Kh., Babayev, A. M-B., Maharov, I.K. On the error of approximation by ridge functions with two fixed directions // - Tbilisi: Tbilisi Mathematical Journal, - 2017. 10 (2), - p. 111-120.
4. Asgarova, A. Kh. and Ismailov, V. E. On the representation by sums of algebras of continuous functions // - France: Comptes Rendus Mathematique, - 2017. 355 (9), -p. 949-955.
5. Asgarova, A. Kh. On the density of a sum of algebras in the space of continuous functions // “Actual problems of mathematics and mechanics” dedicated to the 94th birthday of the national leader of Azerbaijan Heydar Aliyev, - Baku: - 17 May - 18 May, - 2017, - p. 11-13.

6. Asgarova, A. Kh., Ismailov,V.E. On the uniform approximation by a sum of two algebras // “Modern problems of mathematics and mechanics” Proceedings of the Inter.conf.devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, - Baku: - 6 Dekabr - 8 Dekabr, - 2017, - p. 46-47.

7. Asgarova, A. Kh. On a generalization of the Stone Weierstrass theorem // - Switzerland: Annales mathamatiques du Quebec, - 2018. 42 (1), - p. 1-6.

8. Asgarova, A. Kh., Babayev, A. M-B., Maharov, I.K. On the error of approximation by radial basis functions with fixed centers // - Baku: Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan National Academy of Science, - 2018. 38 (1), - p. 22-29.

9. Asgarova, A.Kh., Ismailov, V.E. A central best approximation operator of the algebra of continuous functions // “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, Материалы международной научной конференции, Стерлитамак, Уфа: - 25 июнья - 29 июнья, - 2018, - p. 279-281.

10. Asgarova, A. Kh. Generalization of the Stone–Weierstrass theorem to sums of algebras // International Conference on “Modern Problems of Innovative Technologies and Applied Mathematics in Oil and Gas Production” devoted to the 90th anniversary of Azad Mirzajanzade, - Baku: - 13 December – 14 December, - 2018, – p. 139-142.

11. Asgarova, A. Kh. Levelling algorithm for the approximation by sums of two compositions // “Complex Analysis and Approximation Theory”, - Ufa: - 29 May - 31 May, - 2019, - p.9-10.

12. Asgarova, A. Kh., Babayev, A.M-B., Maharov, I.K. On sums of ridge functions with two fixed directions // “Complex Analysis and Approximation Theory”, - Ufa: - 29 May - 31 May, - 2019, - p. 10.

13. Asgarova, Aida Kh., Babayev, Arzu M-B., Maharov, Ibrahim K. // On the approximation by radial functions with fixed centers, International Conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics” devoted to the 60th anniversary of the Institute of

Mathematics and Mechanics, - Baku: - 23 October - 25 October, - 2019, - p. 127-130.

14. Asgarova, A. Kh. On the density of a sum of algebras in the space of continuous functions // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, - 2020. 10 (1), - p. 102-109.

15. Askarova, A. Kh., Ismailov, V. E. A Chebyshev-Type Theorem Characterizing Best Approximation of a Continuous Function by Elements of the Sum of Two Algebras // - Russia: Математические Заметки, - 2021. 109 (1), - p. 19–26; Mathematical Notes, - 2021. 109 (1), - p. 15–20.

Dissertasiyanın müdafiəsi 29 iyun 2021-ci il tarixində saat 14^{00} –da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ1141, Bakı ş., B.Vahabzadə küç., 9

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli ElmlərAkademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 26 may 2021-ci il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 25.05.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 50