AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ŞTURM-LİUVİLL TİPLİ OPERATORLARIN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPTOTİKASI VƏ İZLƏRİNİN TƏDQİQİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Azad Məmməd oğlu Bayramov**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi

almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2021

Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

Elmi məsləhətçi: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru, dosent
Nigar Məhər qızı Aslanova
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nihan Əlipənah oğlu Əliyev
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Tahir Sədi oğlu Hacıyev
riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Mahir Mirzəxan oğlu Səbzəliyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA–nın müxbir üzvü, f–r.e.d., professor
Misir Cumail oğlu Mərdanov

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f.–r.e.n.
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi seminarın sədri: AMEA–nın həqiqi üzvü, f.–r.e.d., professor
Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Dissertasiya işi gecikən və gecikməyən arqumentli bəzi diferensial operatorların spektri, məxsusi funksiyalarının asimptotikası və requlyarizə edilmiş izlərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Burada öyrənilmiş məsələlərə həm adi (lokal və qeyri-lokal) sərhəd şərtləri, həm də sərhəd şərtlərində spektral parametr olan hallara baxılmışdır.

Spektrin asimptotikasının öyrənilməsinə çoxsaylı araşdırmalar həsr edilmişdir. Bu mövzuda bir çox məsələlərin xülasəsi A.Q.Kostyuçenko və İ.S.Sarqsyanın "Məxsusi ədədlərin paylanması" Moskva 1979 kitabında, M.Ş.Birman və M.Z.Solomyakın 1977-ci ilə qədər yerinə yetirilmiş demək olar ki, bütün işləri əhatə edən "Diferensial tənliklərin spektrinin asimptotikası" VİNİTİ elm texn. nəticələri Riyazi analiz 1977, 14, s.5-58 xülasə məqaləsində işıqlandırılmışdır.

Qeyd edək ki, qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial tənliyin məxsusi ədədlərinin asimptotikasına dair ilk iş A.Q.Kostyuçenko və B.M.levitanın 1969-cu ildə "Funksional analiz və onun tətbiqləri" jurnalında çap olunmuş işidir. Bu işdən sonra çoxsaylı araşdırmalar aparılmışdır. Onlardan M.Bayramoğlu, E.Abdukadırov, H.İ.Aslanov, B.M.Levitan, Q.A.Suvorçenkova, M.Otelbayev, K.X.Boymatov, B.Ə.Əliyev, M.M.Qextman, V.P.Maslov, A.N.Koçubey, Q.Tamura və bir çox başqa müəlliflərin işlərini göstərə bilərik.

İlk dəfə Şturm-Liuvill tənliyi üçün requlyarizə edilmiş iz İ.M.Gelfand və B.M.Levitanın 1953-cü ildə DAN SSSR jurnalında çap olunmuş işində hesablanmışdır. Bu təməl işdən sonra müxtəlif müəlliflərin requlyarizə edilmiş izlərə aid tədqiqatları ortaya çıxmışdır. Onlardan L.A.Dikiy, L.D.Faddeyev və V.S.Buslayev, M.G.Qasımov, V.A.Sadovniçiy, V.A.Sadovniçiy və V.B.Lidskiy, M.S.Makin, V.V.Raspopov və V.V.Dubrovskiy və başqa müəlliflərin işlərini göstərə bilərik. Sonralar operator əmsallı diferensial operatorların requlyarizə edilmiş izlərinin tədqiqinə başlanılmışdır.

Qedy edək ki, burada öncəlik Azərbaycan riyaziyyatçılarına məxsusdur. Tam olaraq P.Z.Xəlilova tərəfindən məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill tənliyinin requlyarizə edilmiş izi tapılmışdır. F.Q.Maqsudov, M.Bayramoğlu və Ə.Ə.Adıgözəlov tərəfindən ilk dəfə qeyri-məhdud operator əmsallı Şturm-Liuvill diferensial tənliyinin requlyarizə edilmiş izi anlayışı verilmiş və requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır. Bu iş 1984-cü ildə DAN SSSR jurnalında çap olunmuşdur.

Bu işlərdən sonra bu mövzuda çox saylı tədqiqat işləri aparılmışdır. Bu mövzuya dair işlərin geniş icmalı N.M.Aslanovanın doktorluq dissertasiyasında (Bakı, 2013) verilmişdir.

Qeyd edək ki, requlyarizə edilmiş izin köməyi ilə baxılan operatorun ilk məxsusi ədədlərini təqribi olaraq tapmaq mümkündür. Bu da fizika və mexanikada mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bundan başqa requlyarizə edilmiş izlərin nəticələri spektral analizin tərs məsələlərinin həllində istifadə olunur. Fizikanın bir çox məsələlərində sərhəd şərtlərində spektral parametr olan sərhəd məsələləri ortaya çıxır. Misal üçün ilk dəfə S.Puasson müxtəlif şəkilli yüklərin vibrasiya məsələsinə baxmış, onu sərhəd şərtində məxsusi ədəd olan Şturm-Liuvill tipli məsələyə gətirmişdir. Sonralar belə sərhəd məsələləri müxtəlif qoyuluşlarda A.N.Krılov, E.M.Russakovski, A.A.Şkalikov, N.Y.Kapustin, E.İ.Moiseyev, Ç.Fulton, J.Volter, M.A.Rıbak, R.A.Bindinq, R.J.Braun, B.A.Vatson, İ.Albayrak, M.Bayramoğlu, Ə.Ə.Adıgözəlov, B.Ə.Əliyev, N.B.Kərimov, Z.S.Əliyev, V.M.Qurbanov, N.Quliyev, O.Ş.Muxtarov, X.Olqar, K.Aydemir, A.E.Etkin, Q.P.Etkina və bir çox başqa riyaziyyatçıların işlərində öyrənilmişdir.

Funksional –diferensial tənlikləri (FDT) ənənəvi olaraq gecikən, neytral və qabaqlayan tip tənliklərə ayırırlar. FDT-nin tətbiqlərinin çoxu gecikən və neytral tip tənliklərlə əlaqəlidir, ona görə bu iki tip tənliklər tədqiqatçıların daha çox diqqətini cəlb etmişdir.

Oxşar evolyutun tapılması haqqında Eyler həndəsi məsələsi ilə əlaqədar olaraq ilk dəfə gecikən arqumentli diferensial tənliyə 1771-ci ildə Kondorse baxmışdır.

Sonralar gecikən arqumentli diferensial tənliklərlə A.D.Mışkis, S.B.Norkin, L.E.Elsqolts, Q.A.Kamenskiy, R.Bellman, K.L.Kuk, J.Xeyla, L.Zilbertşteyn, Q.V.Demidenko, V.A.Lixoşvay, S.İ.Mitroxin, M.Pikula, N.Mixaleviç, F.A.Çetinkaya, X.R.Məmmədov, S.Araçı, M.Açıkgöz, A.M.Bayramov, E.Şen məşğul olmuşlar.

S.B.Norkinin monoqrafiyasında hamar potensial halında gecikən arqumentli iki tərtibli diferensial operator və ümumi şəkildə ayrılmış sərhəd şərtləri üçün Şturm-Liuvill tipli sərhəd məsələsinin həlli və məxsusi ədədlərinin asimptotikası hesablanmışdır. M.Pikulanın işində Şturm-Liuvill tipli sərhəd məsələsinin həllinin və məxsusi ədədlərinin daha dəqiq asimptotikaları hesablanmış və həmçinin requlyarizə edilmiş izləri tapılmışdır. S.İ.Mitroxinin işində cəmlənən əmsallı gecikən arqumentli altı tərtibli diferensial operatorun məxsusi ədədlərinin asimptotikası hesablanmışdır. S.İ.Mitroxinin başqa işində kəsilən əmsallı funksional diferensial tənlikli sərhəd məsələsinin spektri öyrənilir və iz düsturları hesablanmışdır.

Qeyd edək ki, gecikən arqumentli diferensial tənliklər Volter tipli inteqral tənliklərlə sıx əlaqəlidir.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti operator əmsallı diferensial tənliklərin və gecikən arqumentli diferensial tənliklərin spektral analizidir. Tədqiqatın predmeti operator əmsallı diferensial tənliklərin requlyarizə edilmiş iz düsturların alınması və gecikən arqumentli diferensial tənliklərin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturların alınmasıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

- Antiperiodik sərhəd şərtli diferensial operatorun ilk iki requlyarizə edilmiş izinin, operator əmsallı iki tərtibli diferensial tənliyin birinci requlyarizə edilmiş izinin alınması, operator əmsallı dörd tərtibli diferensial tənliyin ikinci requlyarizə edilmiş izinin hesablaması;

- Sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan sərhəd məsələsinin və gecikən arqumentli kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalarının asimptotikasını araşdırmaq.
- Gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli məsələnin requlyarizə edilmiş izinin tədqiq etmək.

Tədqiqatın metodu. Dissertasiya işində kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər və öz-özünə qoşma operatorların spektral nəzəriyyəsi metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

1. Antiperiodik sərhəd şərtli diferensial operatorun ilk iki requlyarizə edilmiş izininhesablanması üçün metod işləmək;
2. Operator əmsallı iki tərtibli diferensial tənliyin spektrini tədqiq etmək və birinci requlyarizə edilmiş izini hesablamaq;
3. Operator əmsallı dörd tərtibli diferensial tənliyin ikinci requlyarizə edilmiş izini hesablamaq;
4. Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan sərhəd məsələsinin və gecikən arqumentli kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalarının asimptotikasını tədqiq etmək;
5. Gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli məsələnin requlyarizə edilmiş izinin tədqiqi;
6. Operator əmsallı diferensial operatorların spektrinin və requlyarizə edilmiş izlərinin hesablanması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas eılmi yeniliklər alınımşdır:

1. Antiperiodik sərhəd şərtli diferensial operatorun birinci və ikinci requlyarizə edilmiş izi üçün düsturlar tapılmışdır;
2. Operator əmsallı iki tərtibli diferensial tənliyin spektri öyrənilmiş və birinci requlyarizə edilmiş izini hesablanmışdır;
3. Operator əmsallı dörd tərtibli diferensial tənliyin ikinci requlyarizə edilmiş izi üçün düstur alınmışdır;
4. Sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan kəsilən sərhəd məsələsinin spektri tədqiq olunmuş və məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düstur tapılmışdır;

5. Gecikən arqumentli kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır;
6. Gecikən arqumentli və qoşma şərtlərində spektral parametr daxil olan kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır;
7. Sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan yarımoxda gecikən arqumentli iki tərtibli diferensial tənlik üçün məxsusi ədədlərin aşağı sərhəddi haqqında teoremlər isbat edilmişdir;
8. Gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli məsələnin requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır;
9. Məhdud və qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial operatorun spektri tədqiq olunmuş və requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi nəzəri xarakter daşıyır. Onlardan diferensial operatorun ilk məxsusi ədədlərin təqribi tapılmasında, həm də spektral analizin tərs məsələlərinin tədqiqində istifadə oluna bilər.

Aprobasiya və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Diferensial tənliklər” şöbəsinin seminarında (prof. Ə.B.Əliyev), “Funksional analiz” şöbəsinin seminarında (prof. H.İ.Aslanov), “Riyazi fizika tənlikləri” şöbəsinin seminarında (AMEA-nın müxbir üzvü. prof. R.V.Hüseynov), “Qeyri-harmonik analiz” şöbəsinin seminarında (AMEA-nın müxbir üzvü. prof. Bilal Bilalov), Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasının seminarında (prof. B.Ə.Əliyev) məruzə edilmiş və aşağıdakı konfranslarda müzakirə olunmuşdur:«14-th International conference on differential equation and applications» (Stanbul, Türkiyə, 2008), «5-th International conference of Applied Mathematics and Computing» (Plovdiv, Bolqariya, 2008), «International conference on Resent Advances in Pure and Applied Mathematics» (Bodrum, Türkiyə 2016), «Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri» beynəlxalq elmi konfransda (Sumqayıt, 2017).

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqatın məqsədini göstərməkdən və istiqamətinin seçilməsindən ibarətdir. Bundan əlavə, alınan bütün nəticələr və tədqiqat üsulları şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiya üzrə müəllifin 30 elmi işi, Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 25 məqalə, 5 konfrans materialı nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işi girişdən 60000 işarə sayı (titul səhifə- 620 işarə sayı, mündəricat -3234 işarə sayı) dörd fəsildən (I fəsil– 74000, II fəsil– 74000, III fəsil– 110000, IV fəsil – 66000), nəticə və 132 adda istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi - 387854 işarə sayıdır.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, dörd fəsildən, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə tədqiqat mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış, işlənmə dərəcəsi göstərilmiş, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri qeyd olunmuş, elmi yeniliyi verilmiş, tədqiqatın nəzəri-praktiki əhəmiyyəti göstərilmiş və həmçinin işin aprobasiyası haqqında məlumat verilmişdir.

Birinci fəsildə $H_1 = L_2([0,\pi], H)$ Hilbert fəzasında

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)y(x)$$

diferensial ifadə və

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi)$$

antiperiodik sərhəd şərtləri ilə doyrulmuş öz-özünə qoşma olan L operatoruna baxılır. $Q(x)$ operator funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(1) Hər $x \in [0,\pi]$ üçün $Q(x): H \to H$ öz-özünə qoşma nüvə operatorudur. $Q(x)$-in $\sigma_1(H)$ fəzasında normaya görə $[0,\pi]$ parçasında ikinci tərtib kəsilməz törəməsi var, $Q^{(i)}(x): H \to H$ $(i = 1,2)$ öz-özünə qoşma operatordur.

(2) $\|Q\|_{H_1} < 4$

(3) H fəzasında elə $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazis var ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty .$$

(4) $Q'(0) = Q'(\pi)$.

Əvvəlcə L operatorunun spektri öyrənilir, sonra birinci və ikinci izi hesablanır.

1.1. –də aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 1. $Q(x)$ operator-funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyirsə, onda L operatorunun spektri cüt-cüt kəsişməyən

$$\Omega_m = \left[(2m-1)^2 - \|Q\|_{H_1}, (2m-1)^2 + \|Q\|_{H_1}\right], \; m = 1,2,\ldots$$

parçalarının birləşməsinin alt çoxluğudur və

a) L operatorunun $(2m-1)^2$-dan fərqli Ω_m parçasına daxil olan hər bir spektr nöqtəsi sonlu təkrarlığı olan izolə edilmiş məxsusi ədəddir;

b) $(2m-1)^2$ nöqtəsi L operatorunun sonlu və ya sonsuz təkrarlı məxsusi ədədi ola bilər;

c)

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{mn} = (2m-1)^2,$$

olur, burada $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ L operatorunun Ω_m-ə daxil olan məxsusi ədədləridir.

1.2-də ikinci iz haqqında aşağıdakı teporem isbat edilir.

Teorem 2. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(4) şərtlərini ödəyirsə onda aşağıdakı düstur doğrudur

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}^{2}-(2m-1)^{4}\right)-\frac{4(2m-1)^{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}trQ^{2}(x)dx-\frac{1}{\pi^{2}}tr\left(\int_{0}^{\pi}Q(x)dx\right)^{2}\right]=0.$$

1.3-də L operatorunun birinci izi haqqında aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 3. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyirsə onda aşağıdakı düstur doğrudur

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-(2m-1)^{2}\right)-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx\right]=0.$$

İkinci fəsildə iki və dörd tərtibli diferensial-operator ifadə ilə doğrulmuş operatorların spektri öyrənilir və uyğun olaraq birinci və ikinci requlyarizə edilmiş izləri üçün düsturlar alınır.

2.1-də $H_1 = L_2([0,1], H)$ Hilbert fəzasında

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)y(x)$$

diferensial ifadə və

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + ay(1) = 0, \quad a > 0 \tag{1}$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş öz-özünə qoşma L_1 operatoruna baxılır. $Q(x)$ operator-funksiya aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. Hər $x \in [0,1]$ üçün $Q(x): H \to H$ öz-özünə qoşma nüvə operator, $[0,1]$ parçasında ikinci tərtib zəif törəməsi var və $Q^{(l)}(x)(l = 0,1,2)$ hər $x \in [0,1]$ nöqtəsində H -da öz-özünə qoşma nüvə operatordur.

2. $\|Q\|_{H_1} < \frac{1}{2}\min_{m}(\mu_{m+1} - \mu_m), \ \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$

$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + a\sin\sqrt{\lambda} = 0.$$

3. H fəzasında elə $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazis, var ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_n\|_{H_1}<\infty .$$

Tutaq ki, L_0

$$l_0(y)=-y''(x)$$

diferensial ifadə və (1) sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş operatordur. L_0 operatorunun spektri $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$, çoxluğudur, burada $0<\mu_1<\mu_2<\cdots\mu_m<\cdots$ $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}+a\sin\sqrt{\lambda}=0$ tənliyinin kökləridir.

2.1-də L_1 operatorunun spektri öyrənilir. Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 4. $Q(x)$ operator-funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyirsə onda L_1 operatorunun spektri cüt-cüt kəsişməyən

$$\Omega_m=\left[\mu_m-\|Q\|_{H_1},\mu_m+\|Q\|_{H_1}\right],\qquad m=1,2,\ldots$$

parçalarının birləşməsinin alt çoxluğudur və

a) L_1 operatorunun μ_m-dən fərqli Ω_m parçasına daxil olan hər bir spektr nöqtəsi sonlu təkrarlığı olan izolə edilmiş məxsusi ədəddir;

b) μ_m nöqtəsi L_1 operatorunun sonlu və ya sonsuz təkrarlı məxsusi ədədi ola bilər;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_{mn}=\mu_m$, doğrudur, burada $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ L_1 operatorunun Ω_m-ə daxil olan məxsusi ədədləridir.

2.2.-də birinci iz haqqında aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 5. Əgər $Q(x)$ operator-funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyərsə onda aşağıdakı düstur doğrudur

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\int_0^1 trQ(x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(1)-trQ(0)\right].$$

2.3-də

$$l(y)=-y''(x)+Q(x)y(x)$$

diferensial ifadə və

$$y(0)=0, \qquad y'(\pi)=0.$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş L_2 operatorunun spektri öyrənilir və onun requlyarizə edilmiş iz düsturu isbatlanır; $Q(x)$ operator funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(1) Hər $x\in[0,\pi]$ üçün $Q(x):H\to H$ öz-özünə qoşma nüvə operator, $[0,\pi]$ parçasında ikinci tərtib zəif törəməsi var və $Q^{(i)}(x)(i=1,2)$ hər $x\in[0,\pi]$ nöqtəsində H-da öz-özünə qoşma nüvə operatorudur.

(2) $\|Q\|_{H_1}<1$.

(3) H fəzasında elə $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormaı bazis var ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_n\|_{H_1}<\infty .$$

2.4-də aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 6. Əgər $Q(x)$ operator-funksiya (1)-(3) şərtlərini ödəyirsə onda aşağıdakı düstur doğrudur

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-(m-1/2)^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}trQ(x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(\pi)-trQ(0)\right].$$

2.5-də

$$l(y)=y^{(4)}(x)+Q(x)y(x)$$

dörd tərtibli diferensial ifadə və

$$y(0)=0, \qquad y'(\pi)=0$$
$$y''(0)=0, \qquad y'''(\pi)=0.$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş L_3 operatorunun spektri öyrənilir və ikinci requlyarizə edilmiş izi tapılır.

$Q(x)$ operator-funksiya aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(1) hər $x\in[0,\pi]$ üçün $Q(x):H\to H$ öz-özünə qoşma nüvə operatorudur. $Q(x)$-in $\sigma_1(H)$ fəzasında normaya görə $[0,\pi]$

parçasında dördüncü tərtib kəsilməz törəməsi var $Q^{(i)}(x): H \to H(i=1,2,3,4)$ öz-özünə qoşma operatordur.

(2) $\|Q\|_{H_1} < 1$

(3) H fəzasında elə $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bazis var ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty .$$

(4) $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)} (i=0,1,2,3,4)$ funksiyaları $[0,\pi]$ parçasında məhduddur.

Aşağıdakı əsas teorem isbat edilmişdir.

Teorem 7. Əgər $Q(x)$ operator-funksiyası (1)-(4) şərtlərini ödəyirsə onda ikinci requlyarizə edilmiş iz üçün aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}^2-(m-1/2)^8\right)-\frac{2}{\pi}(m-1/2)^4\int_0^{\pi} trQ(x)dx-\frac{1}{2\pi}(m-1/2)^2\times\right.$$

$$\times\left(trQ'(\pi)+trQ'(0)\right)+\frac{1}{8\pi}\left(trQ'''(\pi)+trQ'''(0)\right)-$$

$$\left.-\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi} trQ^2(x)dx-\frac{1}{4\pi^2}tr\left(\int_0^{\pi}Q(x)dx\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{32}\left[trQ^{(4)}(\pi)-8trQ^2(\pi)-trQ^{(4)}(0)+8trQ^2(0)\right]$$

Üçüncü fəsildə Şturm-Liuvill tipli məsələlərin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalarının asimptotikası öyrənilir.

3.1-də

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u, \text{ для } x \in [-1,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,1] \qquad (2)$$

Şturm-Liuvill tənliyi

$$L_1(u) := \alpha_1 u(-1) + \alpha_2 u'(-1) = 0, \qquad (3)$$

$$L_2(u) := (\beta_1'\lambda+\beta_1)u(1) - (\beta_2'\lambda+\beta_2)u'(1) = 0 \qquad (4)$$

sərhəd şərtləri həmçinin

$$L_3(u) := u(h_1 - 0) - \delta u(h_1 + 0) = 0, \tag{5}$$

$$L_4(u) := u'(h_1 - 0) - \delta u'(h_1 + 0) = 0, \tag{6}$$

$$L_5(u) := u(h_2 - 0) - \gamma u(h_2 + 0) = 0, \tag{7}$$

$$L_6(u) := u'(h_2 - 0) - \gamma u'(h_2 + 0) = 0, \tag{8}$$

qoşma şərtlərlə öyrənilir, burada $-1 < h_1 < h_2 < 1$, $q(x)$ $[-1, h_1), (h_1, h_2)$ $(h_2, 1]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır.

$q(h_i \pm 0) := \lim_{x \to h_i \pm 0} q(x) (i = 1,2)$ sonlu limitləri var, $\delta, \gamma, \alpha_i, \beta_i, \beta_i'$ $(i = 1,2)$ həqiqi sabitlərdir, $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $\delta \neq 0, \gamma \neq 0$, $\rho := \beta_1' \beta_2 - \beta_2' \beta_1 > 0$.

$H = L_2(-1,1) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert fəzasında skalyar hasil

$$\langle F, G \rangle := \int_{-1}^{h_1} f(x) \overline{g(x)} dx + \delta^2 \int_{h_1}^{h_2} f(x) \overline{g(x)} dx +$$

$$+ \delta^2 \gamma^2 \int_{h_2}^{1} f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{\delta^2 \gamma^2}{\rho} f_1 \overline{g_1}$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $F := \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}$, $G := \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \end{pmatrix} \in H$.

$R_1(u) := \beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1)$, $R_1'(u) := \beta_1' u(1) - \beta_2' u'(1)$ işarələməsindən istifadə olunur.

$[-1, h_1), (h_1, h_2)$ və $(h_2, 1]$-də təyin olunan $f(x)$ funksiyasının $f(h_i \pm 0) := \lim_{x \to h_i \pm 0} f(x)$ $(i = 1,2)$, sonlu limitləri var.

$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, ilə $\Omega_1 := [-1, h_1]$, $\Omega_2 := [h_1, h_2]$ və $\Omega_3 := [h_2, 1]$ parçalarında uyğun olaraq təyin olunan

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-1, h_1) \\ \lim\limits_{x \to h_1 - 0} f(x) & x = h_1 \end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to h_1+0} f(x) & x=h_1\\ f(x), x\in(h_1,h_2) & \\ \lim\limits_{x\to h_2-0} f(x) & x=h_2\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to h_2+0} f(x) & x=h_2\\ f(x) & x\in(h_2,1]\end{cases}$$

funksiyaları işarə edək.

(2)-(8) sərhəd məsələsi operator şəkildə aşağıdakı kimi yazılır:

$$AF:=\begin{pmatrix}\tau f\\ -R_1(f)\end{pmatrix}$$

$D(A):=\{F\in H\,|\, f_i(x), f_i'(x)$ $\Omega_i(i=1,2,3)$-də mütləq kəsilməzdir $\tau f\in L_2(-1,1)$,

$$L_1 f=L_3 f=L_4 f=L_5 f=L_6 f=0 \text{ və } f_1=R_1^1(f)\}$$

Beləliklə, (2)-(8) məsələsinə A operatorunun məxsusi ədəd məsələsi kimi baxa bilərik.

Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 8. A simmetrik operatordur.

3.3-də aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 9. (2)-(8) məsələsinin $\lambda_n=s_n^2,\quad n=0,1,2,\ldots$ məxsusi ədədləri üçün aşağıdakı asimptotik bərabərlik doğrudur:

1 Hal**.** $\beta_2'\neq 0,\ \alpha_2\neq 0,$ isə

$$s_n=\frac{(n-1)\pi}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right).$$

2 Hal**.** $\beta_2'\neq 0,\ \alpha_2=0,$ isə

$$s_n=\frac{(n-1/2)\pi}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right).$$

3 Hal $\beta_2'=0,\ \alpha_2\neq 0,$ isə

$$s_n = \frac{(n-1/2)\pi}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

4 Hal. $\beta_2' = 0,\ \alpha_2 = 0,$ isə

$$s_n = \frac{\pi n}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

sonra (2)-(8) məsələsinin məxsusi ədədləri üçün daha dəqiq asimptotik düsturlar isbat edilir.

1 Hal. $\beta_2' \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,$ isə

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{1}{(n-1)\pi}\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1'}{\beta_2'} + \frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1} q(y)dy\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2 Hal. $\beta_2' \neq 0,\ \alpha_2 = 0,$ isə

$$s_n = \frac{(n-1/2)\pi}{2} + \frac{1}{(n-1/2)\pi}\left[\frac{\beta_1'}{\beta_2'} + \frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1} q(y)dy\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3 Hal. $\beta_2' = 0,\ \alpha_2 \neq 0,$ isə

$$s_n = \frac{(n-1/2)\pi}{2} + \frac{1}{(n-1/2)\pi}\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1'}{\beta_2'} + \frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1} q(y)dy\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4 Hal. $\beta_2' = 0,\ \alpha_2 = 0,$ isə

$$s_n = \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\beta_1'}{\beta_2'} + \frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1} q(y)dy\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Aşağıdakı teoremin doğruluğu göstərilir.

Teorem 10. (2)-(8) məsələsinin

$$\varphi(x,\lambda_n) = \begin{cases} \varphi_1(x,\lambda_n) x \in [-1, h_1) \\ \varphi_2(x,\lambda_n) x \in (h_1, h_2) \\ \varphi_3(x,\lambda_n) x \in (h_2, 1] \end{cases}$$

məxsusi funksiyaları üçün aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:

1 Hal. $\beta_2' \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,$ isə

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}\alpha_2\cos\dfrac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta}\cos\dfrac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta\gamma}\cos\dfrac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1].\end{cases}$$

2 Hal. $\beta_2'\neq 0,\ \alpha_2=0,$ isə

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}-\dfrac{2\alpha_1}{\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\gamma\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1].\end{cases}$$

3 Hal. $\beta_2'=0,\ \alpha_2\neq 0,$ isə

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}\alpha_2\cos\dfrac{\pi(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta}\cos\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta\gamma}\cos\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1].\end{cases}$$

4 Hal. $\beta_2'=0,\ \alpha_2=0,$ isə

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}-\dfrac{2\alpha_1}{\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\gamma\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1].\end{cases}$$

Bütün göstərilmiş asimptotik ifadələr kəsilən əmsallı və sərhəd şərtində spektral parametr olan halda x -ə nəzərən müntəzəm ödənir.

3.4-də $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralığında

$$u''(x)+q(x)u(x-\Delta(x))+\lambda u(x)=0 \tag{9}$$

tənliyə

$$u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, \tag{10}$$

$$u(\pi)\cos\beta+u'(\pi)\sin\beta=0, \tag{11}$$

sərhəd şərtləri

$$u\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta u\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0, \tag{12}$$

$$u'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta u'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0, \tag{13}$$

qoşma şərtləri ilə baxılır, burada $q(x)$ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır $q\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} q(x)$ sonlu limiti var, $\Delta(x)\geq 0-$ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\Delta(x)$ sonlu limiti var $x-\Delta(x)\geq 0$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ isə $x-\Delta(x)\geq\frac{\pi}{2}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ isə λ həqiqi spektral parametr və $\alpha,\beta,\delta\neq 0$ həqiqi sabitlərdir.

3.5-də aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 11. (9)–(13) sərhəd məsələsinin yalnız sadə məxsusi ədədləri ola bilər.

3.6-da aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 12. (9)–(13) sərhəd məsələsinin sonsuz sayda müsbət məxsusi ədədləri vardır.

Məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalar üçün uyğun olaraq

$$s_n = n + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n(x) = \begin{cases} \sin\alpha \ \cos nx + 0\left(\frac{1}{n}\right), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sin\alpha}{\delta}\cos nx + 0\left(\frac{1}{n}\right) & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

asimptotik düsturlar alınır.

Əlavə şərtlər daxilində daha dəqiq asimptotik düsturlar alınır. Bu halda alınan düsturlar gecikmədən asılı olur.

Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

(a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$-də $q'(x)$ və $\Delta''(x)$ məhdud törəmələri var və $q'\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} q'(x)$ və $\Delta''\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta''(x)$ sonlu limitləri vardır.

(b) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$-də $\Delta'(x) \le 1, \Delta(0) = 0$ və $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \Delta(x) = 0.$

$$\left.\begin{aligned} A(x, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s\Delta(\tau)d\tau, \\ B(x, s, \Delta(\tau)) &= \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s\Delta(\tau)d\tau. \end{aligned}\right\}$$

olsun.

Aşağıdakı teoremlər isbat edilmişdir.

Teorem 13. Tutaq ki, (a) və (b) şərti ödənir, onda (9)–(13) sərhəd məsələsinin $\lambda_n = s_n^2$ müsbət məxsusi ədədləri üçün $n \to \infty$ olduqda

$$s_n = n + \frac{1}{n\pi}\left(ctg\beta - ctg\alpha - B(\pi, n, \Delta(\tau))\right) + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik ifadəsi doğrudur

Teorem 14. Tutaq ki, (a) və (b) şərti ödənir, onda (9)–(13) sərhəd məsələsinin $u_n(x)$ məxsusi funksiyalar üçün $n \to \infty$ olduqda

$$u_n(x) = \begin{cases} u_{1n}(x). & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ u_{2n}(x). & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

asimptotik düsturu doğrudur, burada $u_{1n}(x)$ və $u_{2n}(x)$ uyğun olaraq

$$u_{1n}(x) = \sin\alpha\left\{\cos nx\left[1 + \frac{1}{n}A(x, n, \Delta(\tau))\right] - \frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(ctg\beta - ctg\alpha - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - B(\pi, n, \Delta(\tau))\right)x + \left(ctg\alpha + B(x, n, \Delta(\tau))\right)\pi\right]\right\} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{2n}(x) = \frac{\sin\alpha}{\delta}\left\{\cos nx\left[1 + \frac{1}{n}A(x, n, \Delta(\tau))\right] - \frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(ctg\beta - ctg\alpha - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - B(\pi, n, \Delta(\tau))\right)x + \left(ctg\alpha + B(x, n, \Delta(\tau))\right)\pi\right]\right\} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

düsturları ilə təyin edilir.

3.7-də $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralığında

$$y''(x) + q(x)y(x - \Delta(x)) + \lambda y(x) = 0 \tag{14}$$

tənliyinə

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{15}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{16}$$

sərhəd şərtləri və

$$y(h_1 - 0) - \sqrt[3]{\lambda}\delta y(h_1 + 0) = 0, \tag{17}$$

$$y'(h_1 - 0) - \sqrt[3]{\lambda}\delta y'(h_1 + 0) = 0, \tag{18}$$

$$y(h_2 - 0) - \gamma y(h_2 + 0) = 0, \tag{19}$$

$$y'(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{20}$$

qoşma şərtləri ilə baxılır, burada $q(x)$ $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır, $q(h_i\pm 0)=\lim\limits_{x\to h_i\pm 0} q(x)$, $i=1,2$; sonlu limiti var; $\Delta(x)\geq 0$ $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli kəsilməz funksiyadır, $\Delta(h_i\pm 0)=\lim\limits_{x\to h_i\pm 0}\Delta(x)$, $i=1,2$; sonlu limiti var; $x-\Delta(x)\geq 0$ $x\in[0,h_1)$ isə $x-\Delta(x)\geq h_1$; $x\in(h_1,h_2)$ isə $x-\Delta(x)\geq h_2$; $x\in(h_2,\pi]$ isə, λ həqiqi spektral parametr, δ,γ həqiqi sabitlər və $\sin\alpha\cos\alpha\neq 0$.

Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir

(a) $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ -də $q'(x)$ və $\Delta''(x)$ məhdud törəməsi vardır və

$q'(h_i\pm 0)=\lim\limits_{x\to h_i\pm 0} q'(x)$ və $\Delta''(h_i\pm 0)=\lim\limits_{x\to h_i\pm 0}\Delta''(x)$, $i=1,2$ sonlu limitləri vardır.

(b) $\Delta'(x)\leq 1$ $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ $\Delta(0)=0$ və $\lim\limits_{x\to h_i+0}\Delta(x)=0$, $i=1,2$.

$$A(x,\lambda,\Delta(\tau))=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda\Delta(\tau)d\tau,$$

$$B(x,\lambda,\Delta(\tau))=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos\lambda\Delta(\tau)d\tau.$$

işarə edək.

Aşağıdakı teoremlər doğrudur:

Teorem 15. Tutaq ki, (a) və (b) şərti ödənir. Onda (14)–(20) sərhəd məsələsinin $\lambda_n=s_n^2$ müsbət məxsusi ədədləri üçün $n\to\infty$ olduqda aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$s_n=n-\frac{1}{\pi n}\left[ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau))\right]+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Teorem 16. Tutaq ki, (a) və (b) şərti ödənir. Onda (14)–(20) sərhəd məsələsinin $u_n(x)$ məxsusi funksiyaları üçün $n\to\infty$ olduqda

$$u_n(x)=\begin{cases} u_{1n}(x), & x\in[0,h_1), \\ u_{2n}(x), & x\in(h_1,h_2), \\ u_{3n}(x), & x\in(h_2,\pi], \end{cases}$$

asimptotik düsturu doğrudur, burada $u_{1n}(x), u_{2n}(x)$ və $u_{3n}(x)$ uyğun olaraq

$$u_{1n}(x)=\sin\alpha\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$u_{2n}(x)=\frac{\sin\alpha}{\delta n^{\frac{2}{3}}}\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{3n}(x)=\frac{\sin\alpha}{\delta n^{\frac{2}{3}}}\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

düsturları ilə təyin edilir.

3.8-də $[0,\infty)$ yarımoxunda

$$y''(x)+q(x)y(x-\Delta(x))+\lambda y(x)=0 \tag{21}$$

tənliyi və

$$\left.\begin{array}{l} y(0)+\sqrt[3]{\lambda}\,y'(0)=0, \\ y(x-\Delta(x))\equiv y(0)\varphi(x-\Delta(x)),\ \textit{если}\ x-\Delta(x)<0 \\ \sup\limits_{[0,\infty)}|y(x)|<\infty. \end{array}\right\} \tag{22}$$

sərhəd şərtləri ilə verilən sərhəd məsələsi öyrənilir. Burada $q(x)$ və $\Delta(x)\geq 0$ $[0,\infty)$ yarımoxunda təyin olunmuş və kəsilməz

funksiyadır, $\lambda -$ həqiqi parametrdir $(-\infty < \lambda < +\infty), \varphi(x) -$ E_0 başlanğıc çoxluğunda kəsilməz başlanğıc funksiyadır, belə ki, $\varphi(0) = 1$.

Aşağıdakı teoremlər isbat edilmişdir.

Teorem 17. (21), (22) sərhəd məsələsinin yalnız sadə məxsusi ədədləri ola bilər.

Teorem 18. Tutaq ki,

$$\sup_{x \in E_0} |\varphi(x)| = \varphi_0 < \infty$$

və (21) tənliyində

$$\int_0^\infty |q(\tau)| d\tau = q_\infty < \infty.$$

Onda λ parametrinin bütün müsbət qiymətləri (21), (22) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri olur.

Teorem 19. Tutaq ki, $0 \le q(x) \le q_0 < \infty$ $(0 \le x < \infty)$,

$$\int_0^\infty (q_0 - q(\tau)) d\tau < \infty.$$

və $x - \Delta(x) \ge 0$ $(x \ge 0)$. Tutaq ki, $\mu > 0, \varepsilon > 0$ və $K > 0$ elə ədədlərdir ki,

$$0 \le \Delta(x) \le K e^{-(\mu+\varepsilon)x} \quad (0 \le x < \infty).$$

ödənir. Onda λ-nın

$$\mu\sqrt{\lambda} > q_0,$$

bərabərliyini ödəyən bütün qiymətləri (21), (22) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri olur.

Teorem 20. Tutaq ki, (21) və (22)-də.

$$\varphi(x) \ge 0 \quad (x \in E_0)$$

$[0, \infty)$-da $q(x) \le 0$. Onda (21), (22) sərhəd məsələsinin mənfi məxsusi ədədi yoxdur.

3.10-da $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ aralığında

$$y''(x) + q(x) y(x - \Delta(x)) + \lambda^2 y(x) = 0 \qquad (23)$$

tənliyi

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{24}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{25}$$

sərhəd şərtləri və

$$y(h_1 - 0) - \delta y(h_1 + 0) = 0, \tag{26}$$

$$y'(h_1 - 0) - \delta y'(h_1 + 0) = 0, \tag{27}$$

$$y(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{28}$$

$$y'(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{29}$$

qoşma şərtləri ilə verilən sərhəd məsələsinin requlyarizə edilmiş izi hesablanır, burada $q(x)$ $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır, $q(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x\to h_i \pm 0} q(x), i = 1,2;$ sonlu limiti var; $\Delta(x) \geq 0$ $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ aralıqlarının hər birində həqiqi qiymətli və kəsilməz funksiyadır, $\Delta(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x\to h_i \pm 0} \Delta(x), i = 1,2;$ sonlu limiti var; $x - \Delta(x) \geq 0$ $x \in [0,h_1)$ isə $x - \Delta(x) \geq h_1$, $x \in (h_1,h_2)$ isə $x - \Delta(x) \geq h_2$, $x \in (h_2,\pi]$ isə $\lambda -$ həqiqi spektral parametr, $h_1, h_2 \delta, \gamma$ həqiqi sabitlərdir, beləki $0 < h_1 < h_2 < \pi, \sin\alpha\cos\alpha \neq 0$.

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\cos\lambda\Delta(\tau)d\tau,$$

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\sin\lambda\Delta(\tau)d\tau,$$

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$B_2(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\sin\lambda\big(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$C_1(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(\Delta(\tau) + \Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$C_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)}q(t_1)\sin\lambda\big(\Delta(\tau)+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$D_1(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(\tau)\cos\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)d\tau,$$

$$D_2(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(\tau)\sin\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)d\tau,$$

$$E_1(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)}q(t_1)\cos\lambda\big(\Delta(\tau)+2t_1-\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$E_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)}q(t_1)\sin\lambda\big(\Delta(\tau)+2t_1-\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$H_1(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)}q(t_1)\cos\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)-2t_1+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$H_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)}q(t_1)\sin\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)-2t_1+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau.$$

işarə edək.

Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 21. (23)–(29) sərhəd məsələsinin məxsusi funksiyaları üçün $n\to\infty$ aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur.

$$\lambda_n=n+\frac{ctg\beta-ctg\alpha-A_1(n)-D_1(n)}{n\pi}+$$

$$+\frac{2D_2(n)ctg\alpha-ctg\beta+\big(A_1(n)+D_1(n)\big)\big(A_2(n)+D_2(n)\big)-C_2(n)}{n^2\pi}+$$

$$+\frac{B_2(n)-E_2(n)+H_2(n)}{n^2\pi}-\frac{\big(ctg\alpha-ctg\beta+A_1(n)+D_1(n)\big)^2}{n^3}+0\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Requlyarizə edilmiş iz haqqında aşağıdakı əsas teorem isbat eidlir.

Teorem 22. (23)–(29) sərhəd məsələsinin requlayrizə edilmiş izi üçün aşağıdakı düstur doğrudur

$$\lambda_{-0}^2+\lambda_0^2+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_n^2-n^2-\frac{2}{\pi}\left[ctg\beta-ctg\alpha-A_1(n)-D_1(n)\right]+\right.$$
$$+\left[-2D_2(n)ctg\alpha-\left(A_1(n)+D_1(n)\right)\left(A_2(n)+D_2(n)\right)+C_2(n)-B_2(n)+\right.$$
$$\left.\left.+E_2(n)-H_2(n)\right]\frac{1}{n\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(ctg\beta-ctg\alpha-A_1(0)-D_1(0)\right)-ctg^2\alpha$$
$$-ctg^2\beta-2\left(ctg\alpha-ctg\beta\right)\left(A_1(0)+D_1(0)\right)-\left(A_1(0)+D_1(0)\right)^2+$$
$$\left(A_2(0)+D_2(0)\right)^2-2\left[ctg\alpha ctg\beta+\left(ctg\beta-ctg\alpha\right)A_1(0)+\right.$$
$$\left.+\left(ctg\alpha+ctg\beta\right)D_1(0)-C_1(0)+B_1(0)-E_1(0)+H_1(0)+T,\right. \qquad (30)$$

burada

$$T=\operatorname{Re}s_{\lambda=0}\left\{2\left[2D_2(\lambda)ctg\alpha+\left(A_1(\lambda)+D_1(\lambda)\right)\left(A_2(\lambda)+D_2(\lambda)\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-C_2(\lambda)+B_2(\lambda)-E_2(\lambda)+H_2(\lambda)\right]\frac{ctg\lambda\pi}{\pi}\right\}.$$

(30) bərabərliyinin sol tərəfindəki sıraya (23)–(29) sərhəd məsələsinin requlyarizə edilmiş izi deyilir.

Dördüncü fəsildə operator əmsallı diferensial tənliklərin izləri öyrənilir.

4.1-də $H_1=L_2\left([0,\pi],H\right)$ Hilbert fəzasında

$$l(y)=-y''(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

və

$$y(0)=0,\quad y'(\pi)+by(\pi)=0,\quad b>0 \qquad (31)$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş öz-özünə qoşma L_4 operatoruna baxılır, burada $A:D(A)\to H$ operatoru aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$A=A^*>I,\qquad A^{-1}\in\sigma_\infty(H).$$

Tutaq ki, $Q(x)$ operator funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(1) $Q(x)$-in $[0,\pi]$, parçasında ikinci zəif törəməsi var $\left(Q''(x)f,g\right)$ hər $f,g\in H$ üçün kəsilməzdir və $Q^{(i)}(x):D(A)\to H(i=0,1,2)$ hər $x\in[0,\pi]$ üçün H fəzasında öz-özünə qoşma nüvə operatorudur.

(2) $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}(i=0,1,2)$ funksiyaları $[0,\pi]$ parçasında məhdud və ölçüləndir.

(3) Hər $f \in H$ üçün $\int_0^{\pi} \left(Q(x) f, f\right)_H dx = 0.$

A operatorunun məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalarını uyğun olaraq $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ və $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ilə işarə edək.

Tutaq ki, L_0 operatoru

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x)$$

diferensial ifadəsi və (31) sərhəd şərtləri ilə doğrulmuşdur.

L_0 operatoru diskret spektrə malikdir. Tutaq ki, $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \mu_n \le \cdots$ bu operatorun məxsusi ədədləridir.

$Q(x)$ operator funksiyası H_1 fəzasında məhdud olduğundan L_4 operatoru da diskret spektrə malik olacaq. Tutaq ki, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$ L_4 operatorun məxsusi ədədləridir.

4.2-də aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 23. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1), (2) şərtlərini ödəyir və $j \to \infty$, $\gamma_j \sim aj^{\alpha} \left(0 < a, \alpha < \infty\right)$ isə, onda $n \to \infty$,

$$\lambda_n, \mu_n \sim dn^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

burada

$$d = \left(\frac{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}{2b}\right)^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \qquad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t\right)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^2 dt.$$

4.3-də aşağıdakı əsas teorem isbat edilmişdir.

Teorem 24. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyir və $j \to \infty$, $\gamma_j \sim aj^{\alpha} \left(a > 0, \alpha > \frac{2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right)$ isə, onda

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left(\lambda_q - \mu_q\right) = \frac{1}{4}\left[trQ(\pi) - trQ(0)\right].$$

doğrudur.

Bu bərabərliyin sol tərəfindəki sıraya L_4 operatorunun requlyarizə edilmiş izi deyilir.

4.4-də $H_1 = L_2([0,\pi], H)$ Hilbert fəzasında uyğun olaraq

$$l_0(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x),$$

$$l(y) = (-1)^m y^{(2m)}(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferensial ifadələri və eyni

$$y^{(2i-2)}(0) = y^{(2i-1)}(\pi) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m), \tag{32}$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulmuş L_0 və L_5 öz-özünə qoşma operatorlarına baxılır, burada $A: D(A) \to H$ operatoru aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$A = A^* \geq I, \quad A^{-1} \in \sigma_\infty(H).$$

Tutaq ki, $Q(x)$ operator-funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

(1) $Q(x)$ -in $[0,\pi]$ parçasında ikinci tərtib zəif törəməsi var və hər $f, g \in H$ üçün $(Q'(x) f, g)$ kəsilməzdir.

(2) $Q^{(i)}(x): D(A) \to H$ $(i = 0,1,2)$ hər $x \in [0,\pi]$ üçün H fəzasında öz-özünə qoşma nüvə operatorudur.

(3) $\left\| Q^{(i)}(x) \right\|_{\sigma_1(H)}$ $(i = 0,1,2)$ funksiyası $[0,\pi]$ parçasında məhduddur.

A operatorun məxsusi ədəd və məxsusi funksiyalarını uyğun olaraq $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ və $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ilə işarə edək.

L_0 operatoru diskret spektrə malikdir. Tutaq ki, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \mu_n \leq \cdots$ bu operatorun məxsusi ədədləridir.

$Q(x)$ operator funksiyası H_1 fəzasında məhdud olduğundan L_5, operatoru da diskret spektrə malik olacaq. Tutaq ki, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_n \leq \cdots$ L_5 operatorunun məxsusi ədədləridir.

Aşağıdakı lemma isbat edilir.

Lemma 1. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyir və $j \to \infty$, $\gamma_j \sim aj^{\alpha}\left(0 < a, \alpha < \infty\right)$ isə, onda $n \to \infty$, $\lambda_n, \mu_n \sim dn^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$

burada $d = \left(\dfrac{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}{2b}\right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$, $b = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{1+\frac{2}{m}} dt.$

4.6-da aşağıdakı düstur alınmışdır

$$\sum_{q=1}^{n_p} \left(\lambda_q - \mu_q\right) = \sum_{j=1}^{N} U_p^j + U_{pN},$$

burada

$$U_p^j = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int\limits_{|\lambda|=b_p} tr\left[\left(QR_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

və

$$U_{pN} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=b_p} \lambda tr\left[R_\lambda \left(QR_\lambda^0\right)^{N+1}\right] d\lambda$$

Aşağıdakı teorem isbat edilir.

Teorem 25. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyir və $j \to \infty$,

$\gamma_j \sim aj^{\alpha}\left(a > 0, \alpha > \dfrac{2m\left(1+\sqrt{2m}\right)}{2\sqrt{2m} - \sqrt{2} - 1}\right)$ isə, onda

$$\lim_{p \to \infty} U_p^j = 0, \quad j \geq 2.$$

doğrudur.

Aşağıdakı əsas teorem isbat edilir.

Teorem 26. Əgər $Q(x)$ operator funksiyası (1)-(3) şərtlərini ödəyir və $j \to \infty$,

$\gamma_j \sim aj^{\alpha}\left(a>0, \alpha>\dfrac{2m\left(1+\sqrt{2m}\right)}{2\sqrt{2m}-\sqrt{2}-1}\right)$ isə, onda

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left[\lambda_q-\mu_q-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(Q(x)\varphi_{j_q},\varphi_{j_q}\right)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(\pi)-trQ(0)\right].$$

doğrudur .

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi operator əmsallı diferensial operator tənliyin spektrinin və requlyarizə edilmiş izinin öyrənilməsinə, kəsilmə nöqtəsində qoşma şərtlər, sərhəd şərtləri ilə verilən gecikən arqumentli ikitərtibli diferensial tənliyin məxsusi ədəd, məxsusi funksiyalarının asimptotikalarının və requlyarizə edilmiş izlərinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:

- Anti periodik sərhəd şərtli diferensial operatorun birinci və ikinci requlyarizə edilmiş iz düsturları tapılmışdır.
- Operator əmsallı iki tərtibli diferensial tənliyin spektri öyrənilmiş və birinci requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır.
- Operator əmsallı dörd tərtibli diferensial tənliyin ikinci requlyarizə edilmiş izi üçün düstur alınmışdır.
- Sərhəd şərtində spektral parametr olan kəsilən sərhəd məsələsinin spektri öyrənilmiş və məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır.
- Gecikən arqumentli kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır.
- Gecikən arqumentli və qoşma şərtində spektral parametr olan kəsilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədəd və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar tapılmışdır.
- Yarımoxda verilmiş sərhəd şərtində spektral parametr olan gecikən arqumentli iki tərtibli diferensial tənliyin məxsusi ədədlərinin aşağı sərhəddi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

- Gecikən arqumentli Şturm-Liuvill tipli məsələnin requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır.
- Məhdud və qeyri-məhdud operator əmsallı diferensial operatorun spektri öyrənilmiş və requlyarizə edilmiş izi hesablanmışdır.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Bayramov, A.M. On asymptotic of the eigenvalues and the eigenfunctions for the problem of Sturm-Liouville with the lag argument and the spectral parameter in the boundary condition.//-Baku: Transactions of AS of Azerbaijan, -1998, vol.XVIII № 3-4, -p.6-11.
2. Adıgüzelov, E.E., Bayramov, A.M., Baykal, O. On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with the spectral parameter in the boundary condition and with the operator coefficients.// İnternational Journal Differential Equations and Applications, -2001, vol.2, №3, -p.317-333.
3. Adigüzelov, E.E., Bakşi, Ö., Bayramov, A.M. The asymptotic behavior of the negative part of the spectrum of Sturm-Liouville operator coefficients which has singularity.// İnternational Journal Differential Equations and Applications, -2002, vol.6, №3, -p.315-329.
4. Bayramov, A.M., Baykal, O., Köklü, K. Investigation of eigenvalues of a differential equation with lag argument and boundary condition containing an eigenvalue.// Mathematics of the International Ecoenergy Academy, -2005, №3, -p.7-14.
5. Bayramov, A.M., Uslu, S., Çalışkan, S. On the trace formula of second order differential equation given with non separable boundary conditions.// -Istanbul: Sigma journal of engineering and natural sciences-2005, №4, -p.57-64.
6. Bayramov, A.M. On the regularized trace of a fourth regular differential equation./A.M.Bayramov, Z.Oer, S.Uslu, S.Çalışkan.//

International Journal of Contemporary Mathematical Science. -2006, vol.1, №6, -p.245-254.
7. Bayramov, A.M., Uslu, S., Çalışkan, S. Computation of eigenvalues and eigen functions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument.// Applied Mathematics Computation, -2007, vol.191, issue2, -p.592-600.
8. Çalışkan, S., Bayramov, A.M. On asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with lag argument and the eigen parameter in the boundary conditions.//II Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, -Sakarya, Türkiye:- 4-7 Temmuz -2007,- p.15-16.
9. Çalışkan, S., Bayramov, A.M., Özçubukcu, Z., Uslu, S. On spectral property of adiscontinuous two point boundary value problems with spectral parameter in the boundary conditions.// 5th International Conference of Applied Mathematics and Computing. -Plovdiv, Bulgaria: - August 12-18, -2008, vol.1, -p.64.
10. Baykal, O., Köklü, K., Bayramov, A.M. A trace formula for an abstract Sturm-Liouville operator.// 14th International Conference on differential equation and applications. –İstanbul, 21-25 July -2008.
11. Bayramov, A.M., Oer, Z., Baykal, O. On identity for eigenvalues of second order differential operator equation.// Mathematical Computer Modelling, -2009, vol.49, issue3-4, -p.403-412.
12. Albayrak İ., Köklü, K., Bayramov, A.M. A regularized trace formula for differential equations trace class operator coefficients.// Rocky Mountain Journal of Math. -2010, vol.40, №4, -p.1095-1110.
13. Köklü, K., Albayrak, İ., Bayramov, A.M. A regularized trace formula for second order differential operator equation.// Mathematica Scandinavica. -2010, vol.107, issue1, -p.123-138.
14. Şen, E., Bayramov, A.M. On a discontinuous Sturm-Liouville type problem with retarded argument.//-USA: American Institute of Physics Conference Proceedings. -2011, vol.1389, -p.1172-1175.
15. Şen, E., Bayramov, A.M. Calculation of eigen values and eigen functions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the

boundary condition.// Mathematical Computer Modelling. -2011, vol.54, issue11-12, -p.3090-3097.
16. Şen, E., Bayramov, A.M. On calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville type problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition.// Journal of Inequalities and Applications. -2011, 2011:113.
17. Bayramov, A.M., İsmaylov, S.M. On boundary value problems with retarded argument and discontinuous weight.//-Baku: Azerbaijan Technical University, Scientific works, Science-technical journal, - 2011, vol.10, №3, -p.107-114.
18. Bayramov, A.M., Çalışkan, S. Akgün, F. The second regularized trace of differential operator equation with the semi-periodic boundary conditions.// Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2012, vol.35, issue18, -p.2185-2197.
19. Bayramov, A.M., Şen, E. On Sturm-Liouville type problem with retarded argument.// Mathematical Methods in the Applied Sciences, -2013, vol.36, issue 1, -p.39-48.
20. Akgün, F., Bayramov, A.M.,Bayramoğlu, M. Discontinuous boundary value problems with retarded argument and eigen parameter-dependent boundary conditions.// Mediterranean Journal of Mathematics, -2013, vol.10, issue 1, -p.277-288.
21. Aracı, S. On spectral properties of a Sturm-Liouville problem with transmission conditions and eigenparameter dependent boundary conditions with retarded argument.// S.Aracı, M.Acıkgoz, A.M.Bayramov, E. Şen. arxiv:1307.0365., 2013.
22. Şen, E., Bayramov, A.M. Asymptotic formula of the eigenvalues and eigen functions for boundary value problem.// Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2013, vol.36, issue12, -p.1512-1519.
23. Şen E., Bayramov A.M., Aracı S., Acıkgoz M. On spectral properties a regular Sturm-Liouville problem. Konuralp Journal of Mathematics.2014,vol.2, №1,p.63-74.
24. Şen, E., Bayramov, A.M., Oruçoğlu, K. The regularized trace formula for a differential operator with unbounded operator

coefficient. //Advanced Studies in Contemporary Mathematics. -2015, vol.25, №4, -p.583-590.
25. Şen, E., Bayramov, A.M., Oruçoğlu, K. Regularized trace formula for higher order differential operators with unbounded coefficients.//Electronic Journal of Differential Equations. -2016, vol.2016, №31, -p.1-12.
26. Bayramov, A.M., Bayramoglu, M. The spectrum and trace of a discontinuous problem with retarded argument.// International Conference on Resent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM), -Bodrum, Turkey, -19-23 may, -2016
27. Bayramov, A.M. Alməmmədov, M.S. Dördüncü tərtib bir diferensial operatorun izi haqqında.// «Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri» beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Sumqayıt: -25-26 may -2017.
28. Bayramoglu, M., Bayramov, A.M., Şen, E. A regularized trace formula for adiscontinuous Sturm-Liouville operator with delayed argument.// Electronic Journal of Differential Equations, -2017, vol.2017, №104, -p.1-12.
29. Şen, E., Bayramov, A.M. Spectral analysis of boundary value problems with retarded argument.//-Ankara: Communications Faculty of Sciences University of Ankara series, A1, -2017, v.66, №2, -p.175-194.
30. Şen, E., Bayramov, A.M. Spectral analysis of boundary value problems with retarded argument.//-Lviv:Visnyk of Lviv Univ. series mech. math.-2017, issue83, -p.179-188.

Dissertasiyanın müdafiəsi **24 sentyabr 2021-ci il tarixində saat 14^{00}** –da Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **07 iyul 2021-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 29.06.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 80000
Tiraj: 30