АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СЛЕДОВ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Специальность: 1211.01- Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Азад Мамед оглы Байрамов**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2021

Диссертационная работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАНА.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Вали Магеррам оглы Курбанов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Нихан Алипанах оглы Алиев

доктор математических наук, профессор
Нигяр Махар кызы Асланова

доктор физико-математических наук, профессор
Таир Сади оглы Гаджиев

доктор математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
____________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
____________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.–м.н., профессор
____________________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Диссертация посвящена изучению спектра, асимптотики собственных функций и регуляризованных следов некоторых дифференциальных операторов с запаздывающим и без запаздывающего аргумента. Здесь изученные задачи рассмотрены как с обычными (локальными и нелокальными) граничными условиями, также с граничными условиями, содержащими спектральный параметр.

Изучению асимптотики спектра посвящены многочисленные исследования. Обзор некоторых задач этой темы освящены в книге А.Г.Костюченко и И.С.Саргсяна, "Распределение собственных значений", М.1979, в обзорной статье М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка "Асимптотика спектра дифференциальных уравнений". Итоги науки техн. ВИНИТИ. Мат. анализ. 1977. 14, с.5-58., охватывающие почти все работы, выполненные до 1977 года. Заметим, что первой работой по асимптотике собственных значений дифференциальных уравнений с неограниченным операторным коэффициентом является работа А.Г.Костюченко и Б.М.Левитана, напечатанная в журнале "Функциональный анализ и его приложения" в 1967 году. После этой работы появились многочисленные исследования, из которых мы укажем работы М.Байрамоглы, Э.Абдукадырова, Г.И.Асланова, Б.М.Левитана, Г.А.Суворченковой, М.Отелбаева, К.Х.Бойматова, Б.А.Алиева, М.М.Гехтмана, В.П.Маслова, А.Н.Кочубея, Г.Тамуры и многих других авторов.

Регуляризованный след впервые для уравнения Штурма-Лиувилля вычислен в известной работе И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана, напечатанной в журнале ДАН СССР в 1953 году. После этой основополагающей работы появились многочисленные исследования регуляризованных следов различными авторами. Из них мы укажем работы Л.А. Дикого, Л.Д.Фаддеева, Л.Д.Фаддеева и В.С.Буслаева, М.Г.Гасымова, В.А.Садовничего, В.А.Садовничего и В.Б.Лидского, А.С.Макина, В.В.Распопова и В.В.Дубровского и других авторов. В дальнейшем начались исследования регуляризованных следов дифференциальных операторов с операторными коэффициентами. Заметим что, здесь приоритет принадлежит Азербайджанским математикам. Именно, регуляризованный след для уравнения Штурма-Лиувилля с ограниченным операторным коэффициентом был найден Р.З.Халиловой. В это же время Ф.Г.Максудовым, М.Байрамоглы и А.А.Адыгезаловым впервые дано понятие регуляризованного следа дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля с неограниченным операторным коэффициентом и вычислен сам регуляризованный след. Эта работа была напечатана в журнале ДАН СССР в 1984 году. После этих работ появились многочисленные исследования по этой теме, подробный обзор которых дан в докторской диссертации Н.М. Аслановой (Баку, 2013).

Заметим, что с помощью регуляризованного следа можно приближенно найти первые собственные значения рассматриваемого оператора, которые в физике и технике имеют огромное значение. Кроме того, результаты регуляризованных следов применяются и при решении обратных задач спектрального анализа.

Граничные задачи со спектральным параметром в граничных условиях возникают во многих задачах физики. Например, впервые С.Пуассон рассмотрел задачу вибрации с различными видами нагрузок, которой привел к задаче типа Штурма-Лиувилля с собственным значением в граничном условии. Дальнейшие такие граничные задачи в различных постановках изучались в работах А.Н.Крылова, Е.М.Руссаковского, А.А.Шкаликова, Н.Ю.Капустина, Е.И.Моисеева, Ч.Фултона, Ж.Вальтера, М.А.Рыбака, Р.А.Биндинга, Р.Ж.Брауна, Б.А.Ватсона, И.Албайрак, М.Байрамоглы, А.А.Адыгезалова, Б.А.Алиева, Н.Б.Керимова, З.С.Алиева, В.М.Курбанова, Н.Гулиева, О.Ш.Мухтарова, Х.Олгара, К.Айдемира, А.Е.Эткина, Г.П. Эткиной и многих других математиков.

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) традиционно разбиваются на уравнения запаздывающего, нейтрального и опережающего типа. При этом большинство приложений ФДУ связаны с уравнениями запаздывающего и нейтрального типа, поэтому уравнения этих двух типов привлекают наибольшие внимания исследователей.

Впервые дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом было рассмотрено Кондорсе в 1771 году в связи с геометрической задачей Эйлера о нахождении подобной эволюты.

В дальнейшем дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами занимались А.Д.Мышкис, С.Б.Норкин, Л.Э.Эльсгольц, Г.А.Каменский, Р.Беллман, К.Л.Кук, Дж.Хейла, Л.Зильбертштейна, Г.В.Демиденко, В.А.Лихошвай, С.И.Митрохина, М.Пикула, Н.Михалевич, Ф.А.Четинкая, Х.Р.Мамедов, С.Арачы, М.Ачыкгез, А.М.Байрамов, Е.Шен.

В монографии С.Б.Норкина вычислены асимптотики решений и собственных значений краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с запаздывающим аргументом и с разделенными граничными условиями общего вида в случае гладкого потенциала. В работе М.Пикула были вычислены более точные асимптотики решений и собственных значений краевой задачи типа Штурма-Лиувилля, также были вычислены регуляризованные следы. В работе С.И.Митрохина вычислена асимптотика собственных значений дифференциального оператора шестого порядка с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом. В другой работе С.И.Митрохина изучаются спектр и вычисляются формулы следов краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом.

Отметим также что, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом тесным образом связаны с интегральными уравнениями типа Вольтерра.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы является спектральный анализ дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Предмет исследования есть получение формул для регуляризованных следов дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами и асимптотических формул для собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является получения первых двух регуляризованных следов дифференциальных операторов с анти периодичными граничными условиями, первого регуляризованного следа дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом, вычисление второго регуляризованного следа дифференциального уравнения четвертого порядка с операторным коэффициентом. Исследование спектра и асимптотики собственных значений и собственных функций граничной задачи со спектральным параметром в граничных условиях и разрывной граничной задачи с запаздывающим аргументом. Исследовать регуляризованного следа задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений и методы спектральной теории самосопряженных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Разработать метод для вычисления первых двух регуляризованных следов дифференциальных операторов с анти периодичными граничными условиями.

2. Исследовать спектр и вычислить первый регуляризованный след дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом.

3. Вычислить второй регуляризованный след дифференциального уравнения четвертого порядка с операторным коэффициентом.

4. Исследовать спектр и асимптотики собственных значений и собственных функций граничной задачи со спектральным параметром в граничных условиях и разрывной граничной задачи с запаздывающим аргументом.

5. Исследование регуляризованного следа задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом.

6. Исследование спектра и регуляризованных следов дифференциальных операторов с операторными коэффициентами.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены формулы для первого и второго регуляризованного следа дифференциального оператора с антипериодичными граничными условиями;

2. Изучен спектр и вычислен первый регуляризованный след дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом;

3. Получена формула для второго регуляризованного следа дифференциального уравнения четвертого порядка с операторным коэффициентом;

4. Исследован спектр и найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи со спектральным параметром в граничном условии;

5. Найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи с запаздывающим аргументом;

6. Найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи с

запаздывающим аргументом и спектральным параметром с условием сопряжения;
7. Доказаны теоремы о нижней грани собственных значений для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом на полуоси со спектральным параметром в граничном условии;
8. Вычислен регуляризонный след задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом;
9. Изучен спектр и вычислен регуляризованный след дифференциального оператора с ограниченными и неограниченными операторными коэффициентами.

Общая методика исследования. В роботе применяются методы теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений и методы спектральной теории самосопряженных операторов.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в приближенным нахождении первых собственных значений дифференциальных операторов, а также при исследовании обратных задач спектрального анализа.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации обсуждались на семинаре отдела «Дифференциальные уравнения» ИММ НАН Азербайджана (рук. проф. А.Б.Алиев), на семинаре отдела «Функциональный анализ» (рук. проф. Г.И.Асланов), на семинаре отдела «Уравнение математической физики» ИММ НАН Азербайджана (рук. член.-корр. НАНА, проф. Р.В.Гусейнов), на семинаре отдела «Негармонический анализ» ИММ НАН Азербайджана (рук. член.-корр. НАНА, проф. Б.Т.Билалов), на семинаре кафедры «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета (рук. д.ф.-м.н., проф. Б.А.Алиев), а также на следующих конференциях: «14-th International Conference on differential equation and applications» (Стамбул, Турция, 2008 г.), «5-th International Conference of Applied Mathematics and Computing» (Пловдив, Болгария, 2008 г.), «International Conference on Resent Advances in Pure and Applied Mathematics» (Бодрум, Турция, 2016 г.), международная научная конференция «Теоретические и прикладные проблемы математики» (Сумгаит, 2017 г.).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели и выборе направления исследования. Кроме того, все выводы и полученные результаты, а также методы исследования принадлежат лично автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики – 25, материалы конференций – 5.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Диссертационная работа состоит из введения – 60000 знаков (титульная страница – 620 знаков, оглавление – 3234 знаков), первая глава – 74000 знаков, вторая глава – 74000 знаков, третья глава – 110000 знаков, четвертая глава – 66000 знаков. Список используемой литературы состоит из 132 наименований. Общий объем диссертационной работы –387854 знаков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и показана степень ее разработанности, сформулированы цель и задачи исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, представлена информация об апробации работы, а также приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе в гильбертовом пространстве $H_1 = L_2([0,\pi],H)$ рассматривается самосопряженный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)y(x)$$

и антипериодическими граничными условиями

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi).$$

На оператор-функцию $Q(x)$ налагаются следующие условия:

(1) При каждом $x \in [0,\pi], Q(x): H \to H$ самосопряженный ядерный оператор. $Q(x)$ имеет вторую непрерывную производную на отрезке $[0,\pi]$ по норме пространства $\sigma_1(H)$, $Q^{(i)}(x): H \to H(i = 1,2)$ самосопряженный оператор.

(2) $\|Q\|_{H_1} < 4$

(3) В пространстве H существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty.$$

(4) $Q'(0) = Q'(\pi)$.

Сначала исследуется спектр, затем вычисляются первый и второй след оператора L.

В 1.1. доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(3), то спектр оператора L есть подмножество объединения отрезков

$$\Omega_m = \left[(2m-1)^2 - \|Q\|_{H_1}, (2m-1)^2 + \|Q\|_{H_1}\right], \; m = 1,2,\ldots,$$

которые попарно не пересекаются и

a) каждая отличная от $(2m-1)^2$ точка спектра оператора L из отрезка Ω_m есть изолированное собственное значение конечной кратности;

b) точка $(2m-1)^2$ может являться собственным значением оператора L конечной или бесконечной кратности;

c) имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{mn} = (2m-1)^2,$$

где $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ собственные значения оператора L из Ω_m.

В 1.2. доказывается следующая теорема о втором следе.

Теорема 2. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(4), то имеет место следующая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}^2-(2m-1)^4\right)-\frac{4(2m-1)^2}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} trQ^2(x)dx-\frac{1}{\pi^2}tr\left(\int_0^{\pi} Q(x)dx\right)^2\right]=0.$$

В 1.3 доказывается следующая теорема о первом следе оператора L.

Теорема 3. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)- (3), то справедлива следующая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-(2m-1)^2\right)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx\right]=0.$$

В главе 2 исследуется спектр и доказываются формулы для первой и второй регуляризованных следов операторов, порожденных дифференциально-операторными выражениями второго и четвертого порядка, соответственно.

В 2.1. в гильбертовом пространстве $H_1 = L_2([0,1],H)$ рассматривается самосопряженный оператор L_1, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y''(x) + Q(x)y(x)$$

и граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(1) + ay(1) = 0, \quad a > 0. \tag{1}$$

На оператор-функцию $Q(x)$ налагаются следующие условия:

1.При каждом $x \in [0,1]$ $Q(x): H \to H$ является ядерным самосопряженным оператором, имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,1]$ и $Q^{(l)}(x)(l = 0,1,2)$ при каждом $x \in [0,1]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H .

2. $\|Q\|_{H_1} < \dfrac{1}{2}\min\limits_m (\mu_{m+1} - \mu_m)$, где $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$

положительные корни уравнения $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + a\sin\sqrt{\lambda} = 0.$

3. В пространстве H существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Q(x)\varphi_n\|_{H_1} < \infty .$$

Пусть L_0 –оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l_0(y) = -y''(x)$$

и граничными условиями (1). Спектр оператора L_0 есть множество $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots \mu_m < \cdots$ являются корнями уравнения $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + a\sin\sqrt{\lambda} = 0.$

В 2.1.исследуется спектр оператора L_1. Доказывается следующая теорема.

Теорема 4. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1.-3., то спектр оператора L_1 есть подмножество объединениям отрезков

$$\Omega_m = \left[\mu_m - \|Q\|_{H_1}, \mu_m + \|Q\|_{H_1}\right], \qquad m = 1,2,\ldots$$

которые попарно не пересекаются и

a) каждая отличная от μ_m точка спектра оператора L_1 из отрезка Ω_m есть изолированное собственное значение конечной кратности;

b) точка μ_m может являться собственным значением оператора L_1, конечной или бесконечной кратности;

c) имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{mn} = \mu_m$, где $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ собственные значения оператора L_1, из Ω_m.

В 2.2 доказывается следующая теорема о первом следе.

Теорема 5. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1.-3, то справедлива следующая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\int_0^1 trQ(x)dx\right]=\frac{1}{4}[trQ(1)-trQ(0)].$$

В 2.3. исследуется спектр и доказывается формула для регуляризованного следа оператора L_2, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''(x)+Q(x)y(x)$$

и граничными условиями

$$y(0)=0, \qquad y'(\pi)=0.$$

На оператор-функцию $Q(x)$ налагаются следующие условия:

(1) При каждом $x\in[0,\pi]$ $Q(x):H\to H$ является ядерным самосопряженным оператором, имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,\pi]$ и $Q^{(i)}(x)(i=1,2)$ при каждом $x\in[0,\pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H.

(2) $\|Q\|_{H_1}<1$.

(3) В пространстве H существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1} < \infty .$$

В 2.4. доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)- (3), то справедлива следующая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}-(m-1/2)^2\right)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx\right]=\frac{1}{4}\left[trQ(\pi)-trQ(0)\right].$$

В 2.5. исследуется спектр и доказывается формула для второго регуляризованного следа оператора L_3, порожденного дифференциальным выражением четвертого порядка

$$l(y)=y^{(4)}(x)+Q(x)y(x)$$

и граничными условиями

$$y(0)=0, \qquad y'(\pi)=0$$

$$y''(0)=0, \qquad y'''(\pi)=0.$$

На оператор-функцию $Q(x)$ налагаются следующие условия:

(1) при каждом $x\in[0,\pi]Q(x):H\to H$ самосопряженный ядерный оператор. $Q(x)$ имеет четвертую непрерывную производную на отрезке $[0,\pi]$ по норме пространстве $\sigma_1(H)$, $Q^{(i)}(x):H\to H(i=1,2,3,4)$ самосопряженный оператор.

(2) $\|Q\|_{H_1}<1$

(3) В пространстве H существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|Q(x)\varphi_n\right\|_{H_1} < \infty .$$

(4) Функции $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}(i=0,1,2,3,4)$ ограничены отрезке $[0,\pi]$.

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 7. Если оператор-функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(4), то имеет место формула для второго регуляризованного следа

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_{mn}^{2}-(m-1/2)^{8}\right)-\frac{2}{\pi}(m-1/2)^{4}\int_{0}^{\pi}trQ(x)dx-\frac{1}{2\pi}(m-1/2)^{2}\times\right.$$

$$\times\left(trQ'(\pi)+trQ'(0)\right)+\frac{1}{8\pi}\left(trQ'''(\pi)+trQ'''(0)\right)-$$

$$\left.-\frac{3}{4\pi}\int_{0}^{\pi}trQ^{2}(x)dx-\frac{1}{4\pi^{2}}tr\left(\int_{0}^{\pi}Q(x)dx\right)^{2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{32}\left[trQ^{(4)}(\pi)-8trQ^{2}(\pi)-trQ^{(4)}(0)+8trQ^{2}(0)\right]$$

В главе 3 изучаются асимптотики собственных значений и собственных функций задачи типа Штурма-Лиувилля.

В 3.1. исследуется уравнение Штурма-Лиувилля

$$\tau u:=-u''+q(x)u=\lambda u,\ \text{для}\ x\in[-1,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,1] \qquad (2)$$

с краевыми условиями

$$L_1(u):=\alpha_1 u(-1)+\alpha_2 u'(-1)=0, \qquad (3)$$

$$L_2(u):=(\beta_1'\lambda+\beta_1)u(1)-(\beta_2'\lambda+\beta_2)u'(1)=0 \qquad (4)$$

а также условиями сопряжения

$$L_3(u):=u(h_1-0)-\delta u(h_1+0)=0, \qquad (5)$$

$$L_4(u):=u'(h_1-0)-\delta u'(h_1+0)=0, \qquad (6)$$

$$L_5(u):=u(h_2-0)-\gamma u(h_2+0)=0, \qquad (7)$$

$$L_6(u):=u'(h_2-0)-\gamma u'(h_2+0)=0, \qquad (8)$$

где $-1<h_1<h_2<1,\ q(x)-$вещественно-значная и непрерывная на каждом из промежутков $[-1,h_1),(h_1,h_2)$ и $(h_2,1]$ функция, имеющая конечные пределы $q(h_i\pm 0):=\lim_{x\to h_i\pm 0}q(x)(i=1,2)$. Мы предполагаем что, $\delta,\gamma,\alpha_i,\beta_i,\beta_i'(i=1,2)$ действительные постоянные, $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0,\ \delta\neq 0,\gamma\neq 0,\ \rho:=\beta_1'\beta_2-\beta_2'\beta_1>0.$

В гильбертовом пространстве $H = L_2(-1,1) \oplus \mathbb{C}$ определяется скалярное произведение по формуле

$$\langle F,G\rangle := \int_{-1}^{h_1} f(x)\overline{g(x)}dx + \delta^2 \int_{h_1}^{h_2} f(x)\overline{g(x)}dx +$$
$$+\delta^2\gamma^2 \int_{h_2}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx + \frac{\delta^2\gamma^2}{\rho} f_1\overline{g_1}$$

для $F := \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}$, $G := \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \end{pmatrix} \in H$. Используются обозначения

$$R_1(u) := \beta_1 u(1) - \beta_2 u'(1), \quad R_1'(u) := \beta_1' u(1) - \beta_2' u'(1).$$

Для функции $f(x)$ которая определена на $[-1,h_1),(h_1,h_2)$ и $(h_2,1]$ и имеет конечные пределы $f(h_i \pm 0) := \lim_{x\to h_i \pm 0} f(x)$ $(i=1,2)$, обозначим через $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, функции

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [-1,h_1) \\ \lim\limits_{x\to h_1 - 0} f(x) & x = h_1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to h_1 + 0} f(x) & x = h_1 \\ f(x), x \in (h_1,h_2) & \\ \lim\limits_{x\to h_2 - 0} f(x) & x = h_2 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to h_2 + 0} f(x) & x = h_2 \\ f(x) & x \in (h_2,1] \end{cases}$$

которые определены на $\Omega_1 := [-1,h_1]$, $\Omega_2 := [h_1,h_2]$ и $\Omega_3 := [h_2,1]$, соответственно.

Теоретико-операторная формулировка краевой задачи сопряжения (2)-(8) принимает форму

$$AF := \begin{pmatrix} \tau f \\ -R_1(f) \end{pmatrix}$$

с областью определения $D(A) := \{F \in H \mid f_i(x), f_i'(x)$ абсолютно непрерывны на $\Omega_i (i = 1,2,3)$ $\tau f \in L_2(-1,1)$,

$$L_1 f = L_3 f = L_4 f = L_5 f = L_6 f = 0 \text{ и } f_1 = R_1^1(f)\}$$

Итак, задачу (2)-(8) можно рассмотреть как проблему о собственном значении оператора A.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 8. Оператор A симметричен.

В 3.3 доказывается следующая теорема.

Теорема 9. Для собственных значений $\lambda_n = s_n^2$, $n = 0,1,2,\ldots$ задачи (2)-(8) справедливы следующие асимптотические равенства:

Случай 1**.** Если $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$ то

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Случай 2**.**Если $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$ то

$$s_n = \frac{(n-1/2)\pi}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Случай 3**.** Если $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0,$ то

$$s_n = \frac{(n-1/2)\pi}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Случай 4**.** Если $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0,$ то

$$s_n = \frac{\pi n}{2} + 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее доказываются более точные асимптотические формулы для собственных значений задачи (2)-(8).

Случай 1. Если $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$ то

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{1}{(n-1)\pi}\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\beta_1'}{\beta_2'} + \frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1} q(y)dy\right] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Случай 2**.**Если $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0,$ то

$$s_n=\frac{(n-1/2)\pi}{2}+\frac{1}{(n-1/2)\pi}\left[\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1}q(y)dy\right]+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Случай 3.Если $\beta_2'=0,\ \alpha_2\neq 0,$ то

$$s_n=\frac{(n-1/2)\pi}{2}+\frac{1}{(n-1/2)\pi}\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1}q(y)dy\right]+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Случай 4. Если $\beta_2'=0,\ \alpha_2=0,$ то

$$s_n=\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{\pi n}\left[\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{2\delta\gamma}\int_{-1}^{1}q(y)dy\right]+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 10. Для собственных функций

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}\varphi_1(x,\lambda_n) & x\in[-1,h_1)\\ \varphi_2(x,\lambda_n) & x\in(h_1,h_2)\\ \varphi_3(x,\lambda_n) & x\in(h_2,1]\end{cases}$$

задачи (2)-(8) справедливы следующие асимптотические формулы:

Случай 1. Если $\beta_2'\neq 0,\ \alpha_2\neq 0,$ то

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases}\alpha_2\cos\frac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ \frac{\alpha_2}{\delta}\cos\frac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ \frac{\alpha_2}{\delta\gamma}\cos\frac{(n-1)\pi(x+1)}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1].\end{cases}$$

Случай 2.Если $\beta_2'\neq 0,\ \alpha_2=0,$ то

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases} -\dfrac{2\alpha_1}{\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\gamma\pi(n-1/2)}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1]. \end{cases}$$

Случай 3.Если $\beta_2'=0,\ \alpha_2\neq 0,$ то

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases} \alpha_2\cos\dfrac{\pi(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta}\cos\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ \dfrac{\alpha_2}{\delta\gamma}\cos\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1]. \end{cases}$$

Случай 4. Если $\beta_2'=0,\ \alpha_2=0,$ то

$$\varphi(x,\lambda_n)=\begin{cases} -\dfrac{2\alpha_1}{\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in[-1,h_1),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_1,h_2),\\ -\dfrac{2\alpha_1}{\delta\gamma\pi n}\sin\dfrac{(n-1/2)\pi(x+1)}{2}+0\left(\dfrac{1}{n}\right), & x\in(h_2,1]. \end{cases}$$

Все указанные асимптотические формулы выполнены равномерно по x с разрывными коэффициентам и с краевыми условиями зависящими от спектрального параметра.

В 3.4. рассматривается уравнение

$$u''(x)+q(x)u(x-\Delta(x))+\lambda u(x)=0 \qquad (9)$$

на промежутке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ с граничными условиями

$$u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, \qquad (10)$$

$$u(\pi)\cos\beta + u'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{11}$$

и условиями сопряжениями

$$u\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \delta u\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 0, \tag{12}$$

$$u'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \delta u'\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = 0, \tag{13}$$

где $q(x)$ – вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ функция, имеющая конечный предел $q\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} q(x)$, $\Delta(x)\geq 0$ – вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ функция, имеющая конечный предел $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \Delta(x)$, $x-\Delta(x)\geq 0$ если $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $x-\Delta(x)\geq\frac{\pi}{2}$, если $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, λ – вещественный спектральный параметр и $\alpha,\beta,\delta\neq 0$ вещественные постоянные.

В 3.5 доказывается следующая теорема.

Теорема 11. Граничная задача (9)–(13) может иметь только простые собственные значения.

В 3.6 доказывается следующая теорема.

Теорема 12. Граничная задача (9)–(13) имеет бесконечное множество положительных собственных значений. Доказывается асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций

$$s_n = n + 0\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$u_n(x)=\begin{cases}\sin\alpha\cos nx+0\left(\dfrac{1}{n}\right),\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \dfrac{\sin\alpha}{\delta}\cos nx+0\left(\dfrac{1}{n}\right),\ x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

соответственно.

При дополнительных условиях получены более точные асимптотические формулы, которые оказываются уже зависящими от запаздывания.

Пусть выполняются следующие условии:

(a) Существуют ограниченные производные $q'(x)$ и $\Delta''(x)$, на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ и имеют конечные пределы

$$q'\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}q'(x)\ \text{ и }\ \Delta''\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\Delta''(x).$$

(b) $\Delta'(x)\le 1$ на $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $\Delta(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\Delta(x)=0.$

Пусть

$$\left.\begin{aligned}A(x,s,\Delta(\tau))&=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin s\Delta(\tau)d\tau,\\ B(x,s,\Delta(\tau))&=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos s\Delta(\tau)d\tau.\end{aligned}\right\}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 13. Пусть выполняются условия (a) и (b). Тогда для положительных собственных значений $\lambda_n=s_n^2$ граничной задачи (9)–(13) при $n\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$s_n=n+\frac{1}{n\pi}\left(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau))\right)+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 14. Пусть выполняются условия (a) и (b). Тогда для собственных функций $u_n(x)$ граничной задачи (9)–(13) при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:

$$u_n(x) = \begin{cases} u_{1n}(x). & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ u_{2n}(x). & x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

где $u_{1n}(x)$ и $u_{2n}(x)$ определяются формулами

$$u_{1n}(x) = \sin\alpha \left\{ \cos nx \left[1 + \frac{1}{n} A(x, n, \Delta(\tau)) \right] - \frac{\sin nx}{n\pi} \left[(ctg\beta - ctg\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B(\pi, n, \Delta(\tau)))x + (ctg\alpha + B(x, n, \Delta(\tau)))\pi \right] \right\} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{2n}(x) = \frac{\sin\alpha}{\delta} \left\{ \cos nx \left[1 + \frac{1}{n} A(x, n, \Delta(\tau)) \right] - \frac{\sin nx}{n\pi} \left[(ctg\beta - ctg\alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B(\pi, n, \Delta(\tau)))x + (ctg\alpha + B(x, n, \Delta(\tau)))\pi \right] \right\} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

соответственно.

В 3.7. рассматривается уравнение

$$y''(x) + q(x)y(x - \Delta(x)) + \lambda y(x) = 0 \tag{14}$$

на промежутке $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ с граничными условиями

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{15}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{16}$$

и условиями сопряжениями

$$y(h_1 - 0) - \sqrt[3]{\lambda}\delta y(h_1 + 0) = 0, \tag{17}$$

$$y'(h_1 - 0) - \sqrt[3]{\lambda}\delta y'(h_1 + 0) = 0, \tag{18}$$

$$y(h_2 - 0) - \gamma y(h_2 + 0) = 0, \tag{19}$$

$$y'(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{20}$$

где $q(x)$ – вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ функция, имеющая конечный предел $q(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} q(x)$, $i = 1,2; \Delta(x) \geq 0$ – вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ функция, имеющая конечный предел $\Delta(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} \Delta(x)$, $i = 1,2$; $x - \Delta(x) \geq 0$ если $x \in [0, h_1)$, $x - \Delta(x) \geq h_1$ если $x \in (h_1, h_2)$, $x - \Delta(x) \geq h_2$ если $x \in (h_2, \pi]$, λ – вещественный спектральный параметр, δ, γ вещественные постоянные и $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$.

Предполагается выполнение следующих условий

(a) Существуют ограниченные производные $q'(x)$ и $\Delta''(x)$ на $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ и имеют конечные пределы $q'(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} q'(x)$ и $\Delta''(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} \Delta''(x)$, $i = 1,2$

(b) $\Delta'(x) \leq 1$ на $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ $\Delta(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to h_i + 0} \Delta(x) = 0$, $i = 1,2$.

Обозначим

$$A(x, \lambda, \Delta(\tau)) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) \sin \lambda \Delta(\tau) d\tau,$$

$$B(x, \lambda, \Delta(\tau)) = \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) \cos \lambda \Delta(\tau) d\tau.$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 15. Пусть выполняются условия (a) и (b). Тогда для положительных собственных значений $\lambda_n = s_n^2$ граничной задачи (14)–(20) при $n \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$s_n = n - \frac{1}{\pi n} [ctg\beta - ctg\alpha - B(\pi, n, \Delta(\tau))] + 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема 16. Пусть выполняются условия (a) и (b). Тогда для собственных функций $u_n(x)$ граничной задачи (14)–(20) при $n \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$u_n(x)=\begin{cases} u_{1n}(x), & x\in[0,h_1), \\ u_{2n}(x), & x\in(h_1,h_2), \\ u_{3n}(x), & x\in(h_2,\pi], \end{cases}$$

где $u_{1n}(x), u_{2n}(x)$ и $u_{3n}(x)$ определяются формулами

$$u_{1n}(x)=\sin\alpha\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$u_{2n}(x)=\frac{\sin\alpha}{\delta n^{\frac{2}{3}}}\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{3n}(x)=\frac{\sin\alpha}{\delta n^{\frac{2}{3}}}\left\{\cos nx\left[1+\frac{A(x,n,\Delta(\tau))}{n}\right]-\frac{\sin nx}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(ctg\beta-ctg\alpha-B(\pi,n,\Delta(\tau)))x+(ctg\alpha+B(\pi,n,\Delta(\tau)))\pi\right]\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

соответственно.

В 3.8. изучается краевая задача для уравнения

$$y''(x)+q(x)y(x-\Delta(x))+\lambda y(x)=0 \tag{21}$$

на полуоси $[0,\infty)$ с граничными условиями

$$\left.\begin{array}{l} y(0)+\sqrt[3]{\lambda}\,y'(0)=0, \\ y(x-\Delta(x))\equiv y(0)\varphi(x-\Delta(x)),\ \text{если}\ x-\Delta(x)<0 \\ \sup\limits_{[0,\infty)}|y(x)|<\infty. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Здесь $q(x)$ и $\Delta(x)\geq 0$ определены и непрерывны на полуоси $[0,\infty)$, $\lambda-$действительный параметр $(-\infty<\lambda<+\infty), \varphi(x)-$непрерывная на начальном множестве E_0 начальная функция такая, что $\varphi(0)=1$.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 17. Граничная задача (21), (22) может иметь только простые собственные значения.

Теорема 18. Пусть

$$\sup_{x\in E_0}|\varphi(x)|=\varphi_0<\infty$$

и в уравнении (21)

$$\int_0^\infty |q(\tau)|d\tau = q_\infty < \infty.$$

Тогда все положительные значения параметра λ являются собственными значениями граничной задачи (21), (22).

Теорема 19. Пусть $0\le q(x)\le q_0<\infty \quad (0\le x<\infty)$,

$$\int_0^\infty (q_0-q(\tau))d\tau<\infty.$$

и $x-\Delta(x)\ge 0 \ (x\ge 0)$. Пусть, далее $\mu>0,\varepsilon>0$ и $K>0$ таковы, что

$$0\le\Delta(x)\le Ke^{-(\mu+\varepsilon)x} \quad (0\le x<\infty).$$

Тогда все значения λ, удовлетворяющие неравенству

$$\mu\sqrt{\lambda}>q_0,$$

являются собственными значениями граничной задачи (21), (22).

Теорема 20. Пусть в (21) и (22).

$$\varphi(x)\ge 0 \quad (x\in E_0)$$

$q(x)\le 0$ на $[0,\infty)$. Тогда граничная задача (21), (22) не имеет отрицательных собственных значений.

В 3.10. вычисляется регуляризованный след краевой задачи для уравнения

$$y''(x)+q(x)y(x-\Delta(x))+\lambda^2 y(x)=0 \tag{23}$$

на промежутке $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ с граничными условиями

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{24}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{25}$$

и условиями сопряжения

$$y(h_1 - 0) - \delta y(h_1 + 0) = 0, \tag{26}$$

$$y'(h_1 - 0) - \delta y'(h_1 + 0) = 0, \tag{27}$$

$$y(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{28}$$

$$y'(h_2 - 0) - \gamma y'(h_2 + 0) = 0, \tag{29}$$

где $q(x)$ – вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ функция, имеющая конечный предел $q(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} q(x), i = 1,2;$ $\Delta(x) \geq 0$ вещественнозначная и непрерывная на каждом из промежутков $[0, h_1) \cup (h_1, h_2) \cup (h_2, \pi]$ функция, имеющая конечный предел $\Delta(h_i \pm 0) = \lim\limits_{x \to h_i \pm 0} \Delta(x), i = 1,2;$ $x - \Delta(x) \geq 0$ если

$x \in [0, h_1), x - \Delta(x) \geq h_1$ если

$x \in (h_1, h_2), x - \Delta(x) \geq h_2$ если $x \in (h_2, \pi]$, $\lambda -$вещественный спектральный параметр, $h_1, h_2 \delta, \gamma$ вещественные постоянные такие, что $0 < h_1 < h_2 < \pi, \sin\alpha\cos\alpha \neq 0$.

Обозначим

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos\lambda\Delta(\tau)d\tau,$$

$$A_2(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin\lambda\Delta(\tau)d\tau,$$

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^\pi q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$B_2(\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^\pi q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\sin\lambda\big(2\tau - \Delta(\tau) - \Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$C_1(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(\Delta(\tau)+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$C_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\sin\lambda\big(\Delta(\tau)+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$D_1(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\cos\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)d\tau,$$

$$D_2(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)\sin\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)\big)d\tau,$$

$$E_1(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(\Delta(\tau)+2t_1-\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$E_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\sin\lambda\big(\Delta(\tau)+2t_1-\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$H_1(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\cos\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)-2t_1+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau,$$

$$H_2(\lambda)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi} q(\tau)\left[\int_0^{\tau-\Delta(\tau)} q(t_1)\sin\lambda\big(2\tau-\Delta(\tau)-2t_1+\Delta(t_1)\big)dt_1\right]d\tau.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 21. Для собственных значений граничной задачи (23)–(29) при $n\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n=n+\frac{ctg\beta-ctg\alpha-A_1(n)-D_1(n)}{n\pi}+$$

$$+\frac{2D_2(n)ctg\alpha-ctg\beta+\big(A_1(n)+D_1(n)\big)\big(A_2(n)+D_2(n)\big)-C_2(n)}{n^2\pi}+$$

$$+\frac{B_2(n)-E_2(n)+H_2(n)}{n^2\pi}-\frac{\big(ctg\alpha-ctg\beta+A_1(n)+D_1(n)\big)^2}{n^3}+0\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Доказывается следующая основная теорема о регуляризованным следе.

Теорема 22. Для регуляризованного следа граничной задачи (23)–(29) справедлива формула

$$\lambda_{-0}^2+\lambda_0^2+\sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty}\left\{\lambda_n^2-n^2-\frac{2}{\pi}\left[ctg\beta-ctg\alpha-A_1(n)-D_1(n)\right]+\right.$$

$$+\left[-2D_2(n)ctg\alpha-\left(A_1(n)+D_1(n)\right)\left(A_2(n)+D_2(n)\right)+C_2(n)-B_2(n)+\right.$$

$$\left.\left.+E_2(n)-H_2(n)\right]\frac{1}{n\pi}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(ctg\beta-ctg\alpha-A_1(0)-D_1(0)\right)-ctg^2\alpha$$

$$-ctg^2\beta-2\left(ctg\alpha-ctg\beta\right)\left(A_1(0)+D_1(0)\right)-\left(A_1(0)+D_1(0)\right)^2+$$

$$\left(A_2(0)+D_2(0)\right)^2-2\left[ctg\alpha ctg\beta+\left(ctg\beta-ctg\alpha\right)A_1(0)+\right.$$

$$\left.+\left(ctg\alpha+ctg\beta\right)D_1(0)-C_1(0)+B_1(0)-E_1(0)+H_1(0)+T,\right. \qquad (30)$$

где

$$T=\operatorname{Re}s_{\lambda=0}\left\{2\left[2D_2(\lambda)ctg\alpha+\left(A_1(\lambda)+D_1(\lambda)\right)\left(A_2(\lambda)+D_2(\lambda)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-C_2(\lambda)+B_2(\lambda)-E_2(\lambda)+H_2(\lambda)\right]\frac{ctg\lambda\pi}{\pi}\right\}.$$

Ряд в левом части равенства (30) называется регуляризованным следом граничной задачи (23)–(29).

В главе 4 изучаются следы дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами.

В 4.1. в гильбертовом пространстве $H_1=L_2([0,\pi],H)$ рассматривается самосопряженный оператор L_4, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

и граничными условиями

$$y(0)=0,\quad y'(\pi)+by(\pi)=0,\quad b>0, \qquad (31)$$

где оператор $A:D(A)\to H$ удовлетворяет следующим условиям:

$$A=A^*>I,\qquad A^{-1}\in\sigma_\infty(H).$$

Предполагается, что оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $Q(x)$ имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,\pi]$, $(Q''(x)f,g)$ непрерывно при каждом $f,g\in H$ и $Q^{(i)}(x):D(A)\to H(i=0,1,2)$ при каждом $x\in[0,\pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H.

(2) Функции $\left\|Q^{(i)}(x)\right\|_{\sigma_1(H)}(i=0,1,2)$ ограничены и измеримы отрезке $[0,\pi]$.

(3) $\int\limits_0^\pi (Q(x)f,f)_H\,dx=0$ для любого $f\in H$.

Обозначим собственные значение и собственные функции оператора A через $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ и $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ соответственно.

Пусть L_0, оператор порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)=-y''(x)+Ay(x)$$

и граничными условиями (31).

Оператор L_0 имеет дискретный спектр. Пусть $\mu_1\le\mu_2\le\cdots\mu_n\le\cdots$ собственные значения этого оператора.

Поскольку оператор функция $Q(x)$ ограничен в пространстве H_1, то оператор L_4 также будет иметь дискретный спектр. Пусть $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots$ собственные значения оператора L_4.

В 4.2 доказывается следующая теорема.

Теорема 23. Если оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1), (2) и при $j\to\infty,\ \gamma_j\sim aj^\alpha\,(0<a,\alpha<\infty)$ то при $n\to\infty$,

$$\lambda_n,\mu_n\sim dn^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$$

где

$$d=\left(\frac{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}{2b}\right)^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \qquad b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1}(\cos t)^2\,dt.$$

В 4.3 доказывается следующая основная теорема.

Теорема 24. Если оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(3) и при $j\to\infty,\ \gamma_j\sim aj^{\alpha}\left(a>0,\alpha>\frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$, то имеет место

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{q=1}^{n_p}\left(\lambda_q-\mu_q\right)=\frac{1}{4}\left[trQ(\pi)-trQ(0)\right].$$

Ряд в левой части этого равенства называется регуляризованным следом оператора L_4.

В 4.4. в гильбертовом пространстве $H_1=L_2([0,\pi],H)$ рассматриваются самосопряженные операторы L_0 и L_5, порожденные соответственно дифференциальными выражениями

$$l_0(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+Ay(x),$$

$$l(y)=(-1)^m y^{(2m)}(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

и одними и теми граничными условиями

$$y^{(2i-2)}(0)=y^{(2i-1)}(\pi)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

где оператор $A:D(A)\to H$ удовлетворяет следующим условиям:

$$A=A^*\geq I, \qquad A^{-1}\in\sigma_\infty(H).$$

Предположим, что оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $Q(x)$ имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,\pi]$ и $(Q'(x)f,g)$ непрерывно при каждом $f,g\in H$.

(2) $Q^{(i)}(x): D(A) \to H$ $(i=0,1,2)$ при каждом $x \in [0,\pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H.

(3) Функции $\left\| Q^{(i)}(x) \right\|_{\sigma_1(H)}$ $(i=0,1,2)$ ограничены на отрезке $[0,\pi]$.

Обозначим собственные значение и собственные функции оператора A через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ соответственно.

Оператор L_0 имеет дискретный спектр. Пусть $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \mu_n \le \cdots$ собственные значения этого оператора.

Поскольку оператор функция $Q(x)$ ограничен в пространстве H_1, то оператор L_5, также будет иметь дискретный спектр. Пусть $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \lambda_n \le \cdots$ собственные значения оператора L_5.

Доказывается следующая лемма.

Лемма 1. Если оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(3) и при $j \to \infty,\ \gamma_j \sim a j^{\alpha} \left(0 < a, \alpha < \infty\right)$ то при $n \to \infty,\ \lambda_n, \mu_n \sim d n^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}$

$$\text{где}\quad d = \left(\frac{\alpha a^{\frac{1}{\alpha}}}{2b} \right)^{\frac{2m\alpha}{2m+\alpha}}, \qquad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{2}{\alpha}-1} (\cos t)^{1+\frac{2}{m}} dt.$$

В 4.6. получена следующая формула

$$\sum_{q=1}^{n_p} \left(\lambda_q - \mu_q\right) = \sum_{j=1}^{N} U_p^j + U_{pN},$$

где

$$U_p^j = \frac{(-1)^j}{2\pi i j} \int_{|\lambda| = b_p} tr\left[\left(Q R_\lambda^0\right)^j\right] d\lambda \ \ (j = 1,2,\ldots)$$

и

$$U_{pN} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=b_p} \lambda tr\left[R_\lambda \left(Q R_\lambda^0 \right)^{N+1} \right] d\lambda.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 25. Если оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(3) и при $j \to \infty$,

$$\gamma_j \sim a j^\alpha \left(a > 0, \alpha > \frac{2m\left(1+\sqrt{2m}\right)}{2\sqrt{2m}-\sqrt{2}-1} \right),$$ то имеет место

$$\lim_{p\to\infty} U_p^j = 0, \quad j \geq 2.$$

Доказывается следующая основная теорема.

Теорема 26. Если оператор функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1)-(3) и при $j \to \infty$,

$$\gamma_j \sim a j^\alpha \left(a > 0, \alpha > \frac{2m\left(1+\sqrt{2m}\right)}{2\sqrt{2m}-\sqrt{2}-1} \right),$$ то имеет место

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{n_p} \left[\lambda_q - \mu_q - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q} \right) dx \right] = \frac{1}{4} \left[trQ(\pi) - trQ(0) \right].$$

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию спектра и регуляризованного следа дифференциально-операторного уравнения с операторными коэффициентами, изучению асимптотики собственных значений, собственных функций и регуляризованных следов дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, с граничными условиями и условием сопряжения в точке разрыва. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Найдены формулы для первого и второго регуляризованного следа дифференциального оператора с антипериодичными граничными условиями.

2. Изучен спектр и вичислен первый регуляризованный след дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом.
3. Получена формула для второго регуляризованного следа дифференциального уравнения четвертого порядка с операторным коэффициентом.
4. Исследован спектр и найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи со спектральным параметром в граничном условии.
5. Найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи с запаздывающим аргументом.
6. Найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций разрывной граничной задачи с запаздывающим аргументом и со спектральным параметром с условием сопряжения.
7. Доказаны теоремы о нижней грани собственных значений для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом на полуоси со спектральным параметром в граничном условии.
8. Вичислен регуляризованный след задачи типа Штурма-Лиувилля с запаздывающим аргументом.
9. Изучен спектр и вычислен регуляризованный след дифференциального оператора с ограниченными и неограниченными операторными коэффициентами.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Bayramov, A.M. On asymptotic of the eigenvalues and the eigenfunctions for the problem of Sturm-Liouville with the lag argument and the spectral parameter in the boundary condition.//-

Baku: Transactions of AS of Azerbaijan, -1998, vol.XVIII № 3-4, -p.6-11.
2. Adıgüzelov, E.E., Bayramov, A.M., Baykal, O. On the spectrum and regularized trace of the Sturm-Liouville problem with the spectral parameter in the boundary condition and with the operator coefficients.// İnternational Journal Differential Equations and Applications, -2001, vol.2, №3, -p.317-333.
3. Adigüzelov, E.E., Bakşi, Ö., Bayramov, A.M. The asymptotic behavior of the negative part of the spectrum of Sturm-Liouville operator coefficients which has singularity.// İnternational Journal Differential Equations and Applications, -2002, vol.6, №3, -p.315-329.
4. Bayramov, A.M., Baykal, O., Köklü, K. Investigation of eigenvalues of a differential equation with lag argument and boundary condition containing an eigenvalue.// Mathematics of the International Ecoenergy Academy, -2005, №3, -p.7-14.
5. Bayramov, A.M., Uslu, S., Çalışkan, S. On the trace formula of second order differential equation given with non separable boundary conditions.// -Istanbul: Sigma journal of engineering and natural sciences-2005, №4, -p.57-64.
6. Bayramov, A.M. On the regularized trace of a fourth regular differential equation./A.M.Bayramov, Z.Oer, S.Uslu, S.Çalışkan.// International Journal of Contemporary Mathematical Science. -2006, vol.1, №6, -p.245-254.
7. Bayramov, A.M., Uslu, S., Çalışkan, S. Computation of eigenvalues and eigen functions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument.// Applied Mathematics Computation, -2007, vol.191, issue2, -p.592-600.
8. Çalışkan, S., Bayramov, A.M. On asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with lag argument and the eigen parameter in the boundary conditions.//II Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, -Sakarya, Türkiye:- 4-7 Temmuz -2007,- p.15-16.
9. Çalışkan, S., Bayramov, A.M., Özçubukcu, Z., Uslu, S. On spectral property of adiscontinuous two point boundary value

problems with spectral parameter in the boundary conditions.// 5th International Conference of Applied Mathematics and Computing. -Plovdiv, Bulgaria: - August 12-18, -2008, vol.1, -p.64.
10. Baykal, O., Köklü, K., Bayramov, A.M. A trace formula for an abstract Sturm-Liouville operator.// 14th International Conference on differential equation and applications. –İstanbul, 21-25 July -2008.
11. Bayramov, A.M., Oer, Z., Baykal, O. On identity for eigenvalues of second order differential operator equation.// Mathematical Computer Modelling, -2009, vol.49, issue3-4, -p.403-412.
12. Albayrak İ., Köklü, K., Bayramov, A.M. A regularized trace formula for differential equations trace class operator coefficients.// Rocky Mountain Journal of Math. -2010, vol.40, №4, -p.1095-1110.
13. Köklü, K., Albayrak, İ., Bayramov, A.M. A regularized trace formula for second order differential operator equation.// Mathematica Scandinavica. -2010, vol.107, issue1, -p.123-138.
14. Şen, E., Bayramov, A.M. On a discontinuous Sturm-Liouville type problem with retarded argument.//-USA: American Institute of Physics Conference Proceedings. -2011, vol.1389, -p.1172-1175.
15. Şen, E., Bayramov, A.M. Calculation of eigen values and eigen functions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition.// Mathematical Computer Modelling. -2011, vol.54, issue11-12, -p.3090-3097.
16. Şen, E., Bayramov, A.M. On calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville type problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition.// Journal of Inequalities and Applications. -2011, 2011:113.
17. Bayramov, A.M., İsmaylov, S.M. On boundary value problems with retarded argument and discontinuous weight.//-Baku: Azerbaijan Technical University, Scientific works, Science-technical journal, - 2011, vol.10, №3, -p.107-114.
18. Bayramov, A.M., Çalışkan, S. Akgün, F. The second regularized trace of differential operator equation with the semi-

periodic boundary conditions.// Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2012, vol.35, issue18, -p.2185-2197.
19. Bayramov, A.M., Şen, E. On Sturm-Liouville type problem with retarded argument.// Mathematical Methods in the Applied Sciences, -2013, vol.36, issue 1, -p.39-48.
20. Akgün, F., Bayramov, A.M.,Bayramoğlu, M. Discontinuous boundary value problems with retarded argument and eigen parameter-dependent boundary conditions.// Mediterranean Journal of Mathematics, -2013, vol.10, issue 1, -p.277-288.
21. Aracı, S. On spectral properties of a Sturm-Liouville problem with transmission conditions and eigenparameter dependent boundary conditions with retarded argument.// S.Aracı, M.Acıkgoz, A.M.Bayramov, E. Şen. arxiv:1307.0365., 2013.
22. Şen, E., Bayramov, A.M. Asymptotic formula of the eigenvalues and eigen functions for boundary value problem.// Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2013, vol.36, issue12, -p.1512-1519.
23. Şen E., Bayramov A.M., Aracı S., Acıkgoz M. On spectral properties a regular Sturm-Liouville problem. Konuralp Journal of Mathematics.2014,vol.2, №1,p.63-74.
24. Şen, E., Bayramov, A.M., Oruçoğlu, K. The regularized trace formula for a differential operator with unbounded operator coefficient. //Advanced Studies in Contemporary Mathematics. -2015, vol.25, №4, -p.583-590.
25. Şen, E., Bayramov, A.M., Oruçoğlu, K. Regularized trace formula for higher order differential operators with unbounded coefficients.//Electronic Journal of Differential Equations. -2016, vol.2016, №31, -p.1-12.
26. Bayramov, A.M., Bayramoglu, M. The spectrum and trace of a discontinuous problem with retarded argument.// International Conference on Resent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM), -Bodrum, Turkey, -19-23 may, -2016
27. Bayramov, A.M. Alməmmədov, M.S. Dördüncü tərtib bir diferensial operatorun izi haqqında.// «Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi

problemləri» beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Sumqayıt: -25-26 may -2017.
28. Bayramoglu, M., Bayramov, A.M., Şen, E. A regularized trace formula for adiscontinuous Sturm-Liouville operator with delayed argument.// Electronic Journal of Differential Equations, -2017, vol.2017, №104, -p.1-12.
29. Şen, E., Bayramov, A.M. Spectral analysis of boundary value problems with retarded argument.//-Ankara: Communications Faculty of Sciences University of Ankara series, A1, -2017, v.66, №2, -p.175-194.
30. Şen, E., Bayramov, A.M. Spectral analysis of boundary value problems with retarded argument.//-Lviv:Visnyk of Lviv Univ. series mech. math.-2017, issue83, -p.179-188.

Защита диссертации состоится **24 сентября 2021 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04, действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **07 июля 2021** года.

Подписано в печать: 29.06.2021
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 80000
Тираж: 70