AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

OX ÜZRƏ VƏ İZLƏMƏ QÜVVƏLƏRİNİN TƏSİRİ ALTINDA OLAN MİLİN ENİNƏ RƏQSLƏRİNƏ UYĞUN DİFERENSİAL TƏNLİYİN MƏXSUSİ FUNKSİYALARININ XASSƏLƏRİ

Ixtisas: 1211.01 - Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Sevinc Bakir qızı Quliyeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı –2021

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasında yerinə yetirilmşdir

Elmi rəhbərlər: r.e.d., professor
Ziyatxan Seyfəddin oğlu Əliyev
f.-r.e.d., professor
Orucəli Hüseynqulu oğlu Rzayev

Rəsmi oponentlər: f.-r.e.d., professor
Nazim Baxış oğlu Kərimov

f.-r.e.d., professor
Mahir Mirzəxan oğlu Səbzəliyev

f.-r.e.n., dosent
Şirmayıl Həsən oğlu Bağırov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın müxbir üzvü, f- r.e.d., professor

_______________ **Misir Cümayıl oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f-r.e.n.,

______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: akademik, f.-r.e.d., professor

_______________ **Yusif Əbülfət oğlu Mamedov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işi sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorların spektral xassələrinin tədqiqinə həsr edilmişdir.

Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın ən mühüm bölmələrindən biridir. Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan sərhəd məsələləri mexanikanın və fizikanın bir çox məsələlərinin tədqiqi zamanı meydana çıxdığından onların öyrənilməsi həm nəzəri, həm də tətbiqi əhəmiyyət kəsb edir. Hələ 1820-ci ildə M. Puasson uzanmayan ipin ucundan asılmış cismin hərəkətinə dair məsələni həll edərkən sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan 2-ci tərtib adi diferensial tənlik üçün sərhəd məsələsinə gəlir. Belə məsələ ilə bağlı A. N. Krılov və S.P. Timoşenko təbiət elmlərinin aktual məsələlərindən biri olan çubuqun uzununa rəqslərinə dair məsələyə baxırlar. V.V. Bolotin[1] bir ucu bərkidilmiş, digər ucunda isə inersial yük olan və ya izləyici qüvvə təsir edən və en kəsiklərində uzununa qüvvə təsir edən cubuğun əyilmə rəqslərini öyrənir. Qeyd edək ki, bu məsələ sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün məxsusi qiymət məsələsi ilə təsvir edilir.

Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvillin məsələsi əvvələr J. Uolterin, Ç.T. Fultonun, E.M. Russakovskinin və digərlərinin işlərində tədqiq edilmişdir. Bu məsələlər $L_2 \oplus C^N, N \geq 1,$ Hilbert fəzasında təsir edən öz-özünə qoşma operatorlar üçün spektral məsələlərə gətirilir. Onlar tərəfindən müəyyən edilmişdir ki, uyğun operatorların köklü vektorlar sistemi $L_2 \oplus C^N, N \geq 1,$ fəzasında Riss bazisi əmələ gətirir. Sonralar ilk dəfə Y.İ. Moiseyev və N.Y. Kapustin[2] tərəfindən göstərilmişdir ki, sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi funksiyaları sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistem $L_p, 1 < p < \infty,$

---

[1]Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 1. Колебания механических систем / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин [и др.] (под редакцией В.В. Болотина). – Москва: Машиностроение, – 1978, – 352 с.

[2]Капустин, Н.Ю., Моисеев, Е.И. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2000. т. 36, № 10, – с. 1357–1360.

fəzasında bazis əmələ gətirir. Daha sonralar N.B. Kərimov və R.Q. Poladov[3], Z. S. Əliyev və A.A. Dünyamalıyeva[4] tərəfindən sərhəd şərtlərinin hər ikisinə spektral parametr daxil olan Şturm-Liuvillin məsələsi tədqiq edilmiş və köklü funksiyalar sistemindən ikisi atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün kafi şərtlər müəyyən edilmişdir..

N.B. Kərimov və Z.S. Əliyev[5], Z.S. Əliyev[6,7] sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin (tamam requlyar Şturm sistemlərinin) spektral xassələrini öyrənmişlər. Onlar bu məsələlərin köklü funksiyalar sistemindən biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi üçün zəruri və kafi sərtlər tapmışlar.

Beləliklə, sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametr daxil olan requlyar Şturm sistemlərinin və sərhəd şərtlərinin ikisinə spektral parametr daxil olan tamam requlyar Şturm sistemlərin spektral xassələrinin araşdırılması aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Tədqiqatın obyekti sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operatorlar, predmeti isə məxsusi funksiyaların osilllyasiya xassələri, məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sisteminin bazislik xassələri.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifələri sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan requlyar və tamam requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədələrinin həqiqi oxda yerləşməsinin

---

[3]Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Доклады РАН, – 2012. т. 442, № 1, – с. 583–586.

[4]Алиев, З.С., Дуньямалиева, А.А. Дефектная базистность системы корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2015. т. 51, № 10, – с. 1259-1276.

[5] Керимов, Н.Б., Алиев, З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2007, т. 43, № 7, – с. 886–895.

[6]Алиев, З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2011. т. 46, № 6, – с.764-775.

[7]Aliyev, Z.S. Basis properties of a fourth order differential operator with a spectral parameter in the boundary condition // Cent. Euro. J. Math., – 2010, v. 8, no. 2, – p. 378–388.

ümüumi xarakterinin verilməsi, köklü alt fəzaların strukturunun və məxsusi funksiyaların osillyasiya xassələrinin öyrənilməsi, köklü funksiyaları sisteminin alt sitemlərinin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələrinin tədqiq edilməsindən ibarətdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Dissertasiyanın müdafiəsi üçün əsas olan müddəalar aşağıdakılardır:

– potensila malik dördüncü tərtib requlyar Şturm sistemlərinin köklü alt fəzalarının strukturunun və məxsusi funksiyalarının osillasiya xassələrinin öyrənilməsi;

– potensila malik və sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikasının verilməsi, məxsusi ədədlərinin təkrarlanma tərtiblərinin müəyyənləşdirilməsi, məxsusi funksiyalarının osillasiya xassələrinin öyrənilməsi, məxsusi funksiyalar sisteminin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələrinin tədqiq edilməsi;

– sərhəd şərtlərinin ikisinə spektral parametr daxil olan tamam requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda paylanma qaydasının öyrənilməsi, məxsusi funksiyalarının və onların törəmələrinin osillasiya xassələrinin tədqiq edilməsi, məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturların alınması, məxsusi funksiyaları sistemindən ikisi atıldıqdan sonra alınan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi kafi şərtlərin müəyyənləşdirilməsi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır: potensiala malik tam requlyar Şturm sistemləri üçün:

– köklü alt fəzalarının strukturu və bütün məxsusi funksiyaların osillasiya xassələri öyrənilmişdir;

sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametr daxil olan potensiala malik requlyar Şturm sistemi üçün:

– məxsusi ədədlərin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;

– məxsusi funksiyaların osillasiya xassələri tam öyrənilmişdir;

– məxsusi funksiyalar sistemindən ixtiyari biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirdiyi isbat edilmişdir;

sərhəd şərtlərinin ikisinə spektral parametr daxil olan tamam requlyar Şturm sistemləri üçün:

– məxsusi ədədlərin həqiqi oxda paylanma qaydası öyrənilmişdir;

– məxsusi funksiyaların və onların törəmələrinin osillasiya xassələri tam tədqiq edilmişdir;

– məxsusi funksiyalar və məxsusi ədədlər üçün asimptotik düsturlar alınmışdır;

– məxsusi funksiyalar sistemindən ikisi atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi şərtləri müəyyən edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınmış nəticələr əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Onlardan diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsinin müxtəlif məsələlərinin tədqiqi, fizikanın və mexanikanın müxtəlif proseslərinin öyrənilməsi zamanı istifadə etmək olar.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin nəticələri Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasının (rəhbər dos. A.M. Hüseynov), Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasının (rəhbər prof. S.S. Mirzəyev), Xəzər Universitetinin "Riyaziyyat" departamentinin (rəhbər prof. N.B. Kərimov), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Diferensial tənliklər" şöbəsinin (rəhbər prof. Ə.B. Əliyev) seminarlarında, AMEA RMİ-nun 55-ci illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda keçirilmiş Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2014), "Riyaziyyatın və İKT-nin tətbiqi sahələri. Təlimin yeni texnologiyaları" mövzusunda keçirilən Beynəlxalq konfransda (Gəncə, 2014), "Riyaziyyat elmlərinin inkişafı" mövzusunda keçirilən Beynəlxalq konfransda (AMS-2015), (Antaliya, Türkiyə, 2015), Gənc alimlərin birinci Beynəlxalq elmi konfransında (Gəncə, 2016) və Beynəlxalq Voronej Qış Riyaziyyat Məktəbinin "Funksiyalar nəzəriyyəsinin müasir metodları və qarışıq məsələlər" mövzusunda keçirilən konfransda (Russiya, Voronej, 2021) məruzə edilmişdir.

İddiaçının şəxsi töhfəsi tədqiqat məqsədinin formalaşdırılmasındadır. Dissertasiyada alınan bütün nəticələr iddiaçıya aiddir.

İddiaçının nəşrləri. Dissertasiya işinin əsas nəticələri Azərbaycan Respublikası Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının tövsiyə etdiyi jurnallarda 7 elmi məqalə (onlardan 2-i həmmüəllifsizdir, 2-i WOS, 2-i SCOPUS bazalarına daxil olan jurnallarda) və 5 beynəlxalq konfrans materiallarında (onlardan 2-i xaricdə) çap olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi anliz"kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrı-ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanınişarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi 205750 işarə (onlardan titul vərəqi 381, mündəricat -2254, giriş- 54000, iki I fəsil - 54000, II fəsil – 94000, nəticə - 1115 işarə). İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı 77 addan ibarətdir.

DİSSERTASİYA İŞİNİN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi girişdən, 11 yarımfəsildən ibarət 2 fəsildən, nəticədən və ədəbiyyat siyahısından təşkil olunmuşdur.

4 yarımfəsildən ibarət I fəsil sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi funksiyalarının bazislik və osillyasiya xassələrinin tədqiqinə həsr edilmişdir. Burada bu xassələrin tədqiqi üçün bəzi dördüncü tərtib requlyar Şturm sistemlərinin (sərhəd şərtlərinə spektr parametri daxil olmayan) osillyasiya xassələri öyrənilir. Bu requlyar Şturm sistemləri üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə həllinin varlığı isbat olunur.

1.1 yarımfəslində

$$\ell_r(y) \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y(x) = \lambda\tau(x)y, 0 < x < l, \quad (1)$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \quad (2a)$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \quad (2b)$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \quad (2c)$$

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \quad (2d)$$

requlyar Şturm sisteminin məxsusi funksiyalarının osillasiya xassələri öyrənilir, burada $\lambda \in C$ – spektral parametrdir, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, $p(x)$ funksiyası $[0, l]$-də müsbətdir və mütləq kəsilməz törəməyə malikdir, $q(x)$ funksiyası $[0, l]$ -də mənfi olmayan və mütləq kəsilməzdir, $r(x)$ funksiyası $[0, l]$-də kəsilməzdir, $\tau(x)$ funksiyası isə $[0, l]$-də müsbət və kəsilməzdir, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – həqiqi sabitdirlər, belə ki, $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$, $\delta \in [0, \pi)$.

(1), (2) məsələsi ox üzrə (və ya uzununa) qüvvərin təsiri altında olan bircins olmayan milin kişik eninə rəqslərinin təsvir edən dinamik sərhəd məsələsinə dəyişənlərə ayırma üsulunu tətbiq edərkən zamanı meydana çıxır.

Tamam requlyar Şturm sistemlərinin məxsusi ədədləri həqiqidirlər və qeyri-məhdud azalmayan ardicilliq əmələ gətirirlər, belə ki, $r \equiv 0$ halında onların hamısı müsbət və sadədirlər, uyğun məxsusi funksiyalar isə Şturmun osillyasiya xassələrinə malikdirlər. $r(x)$ funksiyası eynilik kimi sıfırdan fərqli olduğu halda isə bu məxsusi ədədlər ilk m saydası istisna olmaqla sadədirlər və onlara uyğun məxsusi funksiyalar isə Şturmun osillyasiya xassələrinə malikdirlər (burada m ikidən böyük hər hansı natural ədəddir).

Qeyd edək ki, (1), (2) məsələsi $\beta=\delta=\pi/2$ halı istisna olmaqla $\delta\in[0,\pi/2]$ olduqda tamam requlyar Şturm sistemi, $\delta\in[\pi/2,\pi)$ olduqda isə requlyar Şturm sistemidir. $r\equiv 0$ və $\delta\in[0,\pi/2]$ halında (1), (2) məsələsinin məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri Д.O. Banks и Q.C. Kurovski[8], $\delta\in[\pi/2,\pi)$ olduqda isə Z.S.Əliyev[9] tərəfindən tədqiq edilmişdir. Yalnız Z.S.Əliyev[10] tamam requlyar Şturm sistemlərinin ilk m sayda məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələrinin tam tədqiq etmişdir.

Tutaq ki, $\delta_0=\pi/2$ əgər $\beta\in[0,\pi/2)$, $\delta_0=arctg\,F_0(0)$ əgər $\beta=\pi/2$, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}$ əgər $\delta\in[0,\delta_0)$ və $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\setminus\{1\}$ əgər $\delta\in[\delta_0,\pi)$ olarsa, burada $F_0(\lambda)=T\vartheta(1,\lambda)/\vartheta(1,\lambda)$, $\vartheta(x,\lambda)$ isə $r\equiv 0$ olduqda(1), (2a)-(2c) məsələsinin həllidir.

Bu yarımfəsil $\delta\in[\pi/2,\pi)$ olduqda (1), (2) məsələsinin köklü alt fəzalarının strukturlarının və ilk m sayda məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələrinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir.

1.1yarımfəsilinin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 1. *Hər bir qeyd olunmuş α,β,γ üçün (1), (2) məsələsinin spektri sonsuz artan $\{\lambda_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı əmələ gətirən həqiqi və sadə məxsusi ədədlərdən ibarətdir. Bundan başqa, $n\in\mathrm{N}_0$ olduqda $\lambda_n(\delta)$ məxsusi ədədinə uyğun $y_{n,\delta}(x)$ məxsusi funksiyasının $(0,\,l)$ intervalında düz $n-1$ sayda sadə sıfırı var.*

---

[8] Banks, D.O., Kurowski G.J. A Prufer transformation for the equation of the vibrating beam // Transactions of the American Mathematical Society, – 1974. v.199, – p. 203–222.

[9] Aliyev, Z.S. Structure of root subspaces and oscillation properties of eigenfunctions of one fourth order boundary value problem // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2014. v. 4, no. 2, – p. 108-121.

[10] Алиев, З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // – Москва: Математический сборник, – 2016. т. 207, № 12, – с. 3–29.

1.2 yarımfəsilində (1), (2a)-(2c) məsələsinin həlinin varlığı, yeganəliyi və əsas xassələri öyrənilir.

Teorem 2. *Hər bir qeyd olunmuş $\lambda \in C$ üçün (1), (2a)-(2c) məsələsinin sabit vuruq dəqiqliyi ilə yeganə trivial olmayan $y(x,\lambda)$ həlli var.*

Hər bir qeyd olunmuş $x \in [0, l]$ üçün $y(x,\lambda)$ funksiyası λ parametrinin tam funksiyasıdır. Qeyd edək ki, (1), (2) məsələsinin $\lambda_n(0)$ и $\lambda_n(\pi/2),\, n \in \mathrm{N}$, məxsusi ədədləri uyğun olaraq $y(1,\lambda)$ və $Ty(1,\lambda)$ tam funksiyalarının sıfırlarıdır. Aydındır ki, $F_r(\lambda) = Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ funksiyası $B = (C \setminus R) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, çoxluğunda təyin olunmuş sonlu ölçülü meromorf funksiyadır, $\lambda_n(0)$ и $\lambda_n(\pi/2),\, n \in \mathrm{N}$, isə uyğun olaraq bu funksiyanın polyusları və sıfırlarıdır, burada $B_n = (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0)),\, n \in \mathrm{N},\ \lambda_0(0) = -\infty$.

Lemma 1. *Aşağıdakı bərabərlik doğrudur:*

$$\frac{dF_r(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{y^2(l,\lambda)} \int_0^l \tau\, y^2(x,\lambda)dx,\ \lambda \in B. \tag{4}$$

Aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$F_r(\lambda) = -\left(\sqrt{2}\right)^{1-2sgn\gamma} (p(1)\tau^3(1))^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{|\lambda|^3} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{|\lambda|}}\right)\right),\ \lambda \to -\infty. \tag{5}$$

(5)-dən aşağıdakı bərabərlik alınır:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F_r(\lambda) = -\infty. \tag{6}$$

İndi isə $y(x,\lambda)$ funksiyasının $(0,\, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayı məsələsinə baxaq.

Lemma 2. *$y(x,\lambda)$ funksiyasının hər bir $x(\lambda)$ sıfırı sadədir və $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ parametrinin kəsilməz diferensiallanan funksiyasıdır.*

Tutaq ki, μ ədədi (1) tənliyi və $\beta = 0$ olduqda $y(0) = y'(0) = = y''(0) = 0$, (2c) sərhəd şərtləri, $\beta \in (0, \pi/2]$ olduqda isə $y(0) = Ty(0) = 0$, (2a), (2c) sərhəd şərtləri ilə doğrulan məsələnin həqiqi məxsusi ədədidir. $y(x,\lambda)$ funksiyasının $\lambda \in (\mu - \varepsilon, \mu)$ və $\lambda \in (\mu, \mu + \varepsilon)$ olduqda $(0,\, l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayları fərqinə μ məxsusi ədədinin osillyasiya indeksi deyilir, burada $\varepsilon > 0 -$ kifayət qədər kişik ədəddir.

Lemma 3. *Elə $\xi < 0$ ədədi var ki, (1) tənliyi və $\beta = 0$ olduqda*

$y(0)=y'(0)==y''(0)=0,$ *(2c) sərhəd şərtləri,* $\beta\in(0,\pi/2]$ *olduqda isə* $y(0)=Ty(0)=0,$ *(2a), (2c) sərhəd şərtləri ilə doğrulan məsələnin* ξ_k, $k\in\mathrm{N}$, *həqiqi məxsusi ədədləri* $(-\infty,\xi)$ *intervalında yerləşirlər, sadədirlər, osillyasiya indeksləri 1-ə bərabərdir və sonsuz azalan ardıcıllıq əmələ gətirirlər.*

Tutaq ki, $\kappa(\lambda)$ ədədi $y(x,\lambda)$ funksiyasının $(0,\,l)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayıdır.

Lemma 4. *Əgər* $\lambda>\lambda_1(\delta_0)$ *və* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0)],\, n\in\mathrm{N},$ *olarsa, onda* $\kappa(\lambda)=n-1$, *əgər* $\lambda\le\lambda_1(\delta_0)$ *olarsa, onda* $\kappa(\lambda)=\sum\limits_{\xi_k\in(\lambda,\lambda_1(\delta_0))} i(\xi_k)$ *olar, burada* $i(\xi_k)$ ξ_k *məxsusi ədədinin osillyasiya indeksidir.*

1.3 yarımfəsilində (1) tənliyi və (2a)-(2.c),

$$(a\lambda+b)y(l)-(c\lambda+d)Ty(l)=0, \tag{7}$$

sərhəd şərtləri ilə doğrulan Şturm sisteminə baxılır, burada a, b, c, d həqiqi sabitlərdir, belə ki, $\sigma=bc-ad>0.$ Bu məsələnin köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri öyrənilir.

$c\neq 0$ olduqda $N_0\in\mathrm{N}$ ədədini $\lambda_{N_0-1}(0)<-d/c\le\lambda_{N_0}(0)$ bərabərsizliyindən təyin edirik.

Teorem 3. *(1), (2.a)-(2.c), (7) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidirlər, sabitdirlər və sonsuz artan* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığının əmələ gətirirlər. Bundan başqa,* λ_n, $n\in\mathrm{N}$, *məxsusi ədədinə uyğun* $y_n(x)$ *məxsusi funksiyası aşağıdakı osillyasiya xassələrinə malikdir: a) əgər* $c=0$ *olarsa, onda* $n\ge 2$ *olduqda* $y_n(x)$ *funksiyasının* $(0,l)$ *intervalında düz* $n-1$ *sayda sadə sıfırı var,* $y_1(x)$ *funksiyasının* $\lambda_1>\lambda_1(\delta_0)$ *olduqda* $(0,l)$ *intervalında sıfırı yoxdur,* $\lambda_1\le\lambda_1(\delta_0)$ *olduqda isə* $m(\lambda_1)$ *sayda sadə sıfırı var; b) əgər* $c\neq 0$ *olarsa, onda* $\lambda_n\ge\lambda_1(\delta_0)$ *halında* $y_n(x)$ *funksiyasının* $n\le N_0$ *olduqda* $(0,l)$ *intervalında düz* $n-1$ *sayda sadə sıfırı,* $n>N_0$ *olduqda isə düz* $n-2$ *sayda sadə sıfırı var;* $\lambda_n<\lambda_1(\delta_0)$ *halında* $n=1$ *və ya* $n=2$ *olduqda* $y_n(x)$ *funksiyasının* $(0,l)$ *intervalında* $m(\lambda_n)$ *sayda sadə sıfırı var.*

1.4-də (1), (2.a)-(2.c), (7) məsələsinin məxsusi funksiyalarının $L_2((0,l),\tau)$ fəzasında bazislik xassələri öyrənilir.

Tutaq ki, $H=L_2((0,l),\tau)\oplus C$ skalyar hasili

$$(\hat{y},\hat{\vartheta})=(\{y,k\},\{\vartheta,t\})=(y,u)_{L_{2,\tau}}+|\sigma|^{-1}k\bar{t}$$

olan Hilbert fəzasıdır, burada $(y,\vartheta)_{L_{2,\tau}}=\int_o^l \tau(x)y(x)\overline{\vartheta(x)}\,dx$. L operatorunu H -da hər yerdə sıx olan

$$D(L)=\{\hat{y}=\{y(x),k\}\in H\ :y(x)\in W_2^4(0,l),\ \ell_r(y)(x)\in L_2(0,l),\ y\in B.C.,$$
$$k=ay(l)-cTy(l)\},$$

oblastında aşağıdakı kimi təyin edək:

$$L\hat{y}=L\{y,k\}=\{\tau^{-1}(x)\ell_r(y)(x),dTy(l)-by(l)\},$$

burada $B.C.$ ilə (2a)-(2c) sərhəd şərtlərini ödəyən funksiyalar çoxluğu işarə edilmişdir. Aydındır ki, (1), (2.a)-(2.c), (7) məsələsi aşağıdakı məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir:

$$L\hat{y}=\lambda\hat{y},\ \hat{y}\in D(L). \tag{8}$$

Bu halda (1), (2.a)-(2.c), (7) məsələsinin $\lambda_n,\ n\in\mathrm{N}$, məxsusi ədədləri (8) məsələsinin məxsusi ədədləri ilə üst –üstə düşür, onların məxsusi elementləri arasında isə

$$y_n(x)\leftrightarrow\hat{y}_n=\{y_n(x),\ k_n\},\ k_n=ay_n(l)-cTy_n(l)$$

qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğu var.

Teorem 4. *L operatoru H -da öz-özünə qoşma, diskret və aşağıdan yarıməhdud operatordur. Bu operatorun $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{y}_n=\{y_n(x),\ k_n\}$, məxsusi vektorlar sistemi H -da ortoqonal bazis əmələ gətirir.*

$\delta_n=(\hat{y}_n,\hat{y}_n)=\|y_n\|_{L_{2,\tau}}^2+\ \sigma^{-1}k_n^2,\ n\in\mathrm{N}$, işarələməsi aparaq. $\sigma>0$ şərtinə əsasən aşağıdakı münasibətləri alarıq:

$$\delta_n>0\ \text{ və }\ k_n=ay_n(l)-cTy_n(l)\neq0,\ n\in\mathrm{N} \tag{9}$$

(9) münasibətlərinə və teorem 4-ə görə (8) məsələsinin $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n=\delta_n^{-1/2}\hat{y}_n$, məxsusi vektorlar sistemi H -da ortonormal bazis əmələ gətirir.

Teorem 5. *Tutaq ki, s ixtiyari qeyd olunmuş natural ədəddir. Onda $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$ sistemi $L_p((0,l),\tau),1<p<\infty$, fəzasında bazis, $L_2((0,l),\tau)$ fəzasında isə şərtsiz bazis əməmlə gətirir. Bu halda $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$ sisteminə qoşma olan $\{u_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$ sisteminin elementləri aşağıdakı kimi təyin edilir:*

$$u_n(x)=y_n(x)-(\delta_s k_n/\delta_n k_s)y_s(x).$$

II fəsildə bir ucu bərkidilmiş, digər ucunda (elastiki bərkidilmiş və ya sərbəst olan) inersial yük mərkəzləşmiş və izləyici qüvvə təsir edən, en kəsiklərində isə uzununa qüvvə təsir edən Eyler-Bernulli çubuğunun əyilmə (eninə) rəqslərini təsvir edən spektral məsələlərə baxılır. Bu məsələlərin spektral xassələri, o cümlədən məxsusi funksiyaları sisteminin alt sistemlərinin $L_p,\ 1<p<\infty,$ fəzasında bazislik xassələri tədqiq edilir.

2.1 yarımfəslində məsələnin qoyuluşu verilir. Ox boyu en kəsiyi burulmadan dəyişən və Oxz müstəvisində əyilmə rəqsləri edən L uzunluqlu bircins Eyler-Bernulli çubuğuna baxaq. En kəsiklərində uzununa $\overline{Q}(X)$ qüvvəsi təsir edən bu çubuğun sərbəst əyilmə rəqsləri

$$EJ\,\frac{\partial^4 W(X,t)}{\partial X^4}-\frac{\partial}{\partial X}\left(\overline{Q}(X)\,\frac{\partial W(X,t)}{\partial X}\right)+\rho F\,\frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial t^2}=0$$

tənliyi ilə təsvir edilir, burada J kəsiyin Oy oxuna nəzərən inersiya momenti, EJ çubuğun əyilmə sərtliyi, $W(X,t)$ çubuğun oxunun cari nöqtəsinin əyilməsi, ρ çubuğun sıxlığı, F isə çubuğun en kəsiyinin sahəsidir.

Əgər çubuğun sol ucu bərkidilibsə, sag ucunda isə inersiyası I kütləsi m olan yük yerləşdirilmişsə, onda sərhəd şərtləri aşağıdakı şəkildə olar:

$$W(0,t)=0,\quad \frac{\partial W(0,t)}{\partial x}=0,\quad EJ\,\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial X^2}=-I\,\frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial X\partial t^2},$$

$$EJ\,\frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial X^3}-\overline{Q}(L)\frac{\partial W(L,t)}{\partial X}=m\,\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial t^2}=0.$$

$x=X/L$ və $w=W/L$ işarələmələri apararaq sabit sətlikli bircins cubuğun sərbəst əyilmə rəqslərinin tənliyi və sərhəd şərtlərini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$EJ\,\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)+\frac{\rho FL^4}{EJ}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0,$$

$$w(0,t)=0,\quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=0,\quad EJ\,\frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2}=-\frac{IL}{EJ}\,\frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x^3}-Q(1)\frac{\partial w(1,t)}{\partial x}=\frac{mL^3}{EJ}\,\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial t^2}=0,$$

burada $Q(x)=(L^2/EJ)\,\overline{Q}(Lx).$

$\rho FL^4\omega^2/EJ$ ifadəsini λ ilə işarə edək. Onda cubuğun sərbəst əyilmə rəqsləri məsələsi $w(x,t)=y(x)\cos\omega t$ əvəzləməsi ilə

$$y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))'=\lambda y(x),\ 0<x<1, \tag{10}$$

$$y(0)=y'(0)=0, \tag{11}$$

$$y''(1) - a_1 \lambda y'(1) = 0, \tag{12}$$

$$Ty(1) - a_2 \lambda y(1) = 0, \tag{13}$$

spektral məsələyə gətirilir, burada $q(x) \equiv Q(x)$, $Ty \equiv y''' - qy'$, $a_1 = I/\rho FL^3$, $a_2 = -m/\rho FL$. Aydındır ki, $q(x) > 0,\ x \in [0, 1]$, $a_1 > 0,\ a_2 < 0$ şərtləri ödənilir Bundan başqa fərz edək ki, $q(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında mütləq kəsilməzdir.

2.2-də bəzi köməkçi faktlar və təkliflər şərh olunur.

Aşağıdakı sərhəd şərtini daxil edək:

$$y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0,\ \gamma \in [0, \pi/2]. \tag{14}$$

N.B. Kərimov və Z.S. Əliyev[5] tərəfindən isbat edilmişdir ki, (10), (11), (14), (13) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan $\{\lambda_n(\gamma)\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı əmələ gətirirlər, belə ki, $\lambda_n(\gamma) > 0,\ n \in \mathrm{N}$. Bundan başqa, $\lambda_n(\gamma),\ n \in \mathrm{N}$, məxsusi ədədinə uyğun $y_{n,\gamma}(x)$ məxsusi funksiyasının $(0, 1)$ intervalında düz $n-1$ sayda sadə sıfırı var.

2.3 yarımfəslində (10)-(12) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllinin varlığı, yeganəliyi isbat edilir və onun əsas xassələri öyrənilir.

Teorem 6. *Hər bir qeyd olunmuş $\lambda \in C$ üçün (10)-(12) məsələsinin yeganə trivial olmayan $y(x,\lambda)$ həlli var (sabit vuruq dəqiqliyi ilə.)*

Qeyd 1. Ümumiliyi pozmadan hesab edə bilərik ki, hər bir qeyd olunmuş $x \in [0, 1]$ üçün $y(x,\lambda)$ funksiyası λ-nın tam funksiyasıdır.

Onu da qeyd edək ki, (10)-(13) məsələsinin spektral xassələrinin öyrənilməsidə $y(x,\lambda)$ funksiyası fundamental rol oynayır.

Lemma 5. *$y(x,\lambda)$ və $y'(x,\lambda)$ funksiyalarının $(0, 1]$ aralığında yerləşən sıfırları sadədirlər və λ parametrinin kəsilməz diferensiallanan funksiyalarıdırlar.*

$H(x,\lambda) = y'(x,\lambda)/y''(x,\lambda)$ funksiyasını daxil edək. Teorem 6, Qeyd 1 və Lemma 5-ə əsasən $H(x,\lambda)$ funksiyası hər bir qeyd olunmuş $x \in [0, 1]$ üçün λ-nın sonlu tərtibli meromorf funksiyasıdır.

$K_n = (\lambda_{n-1}(0), \lambda_n(0)),\ n = 1, 2, \ldots$, işarə edək, burada $\lambda_0(0) = -\infty$.

Göründüyü kimi $G(\lambda) = 1/H(1,\lambda) = y''(1,\lambda)/y'(1,\lambda)$ funksiyası $K \equiv (C \setminus R) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right)$ çoxluğunda təyin olunub, belə ki, $\lambda_n(\pi/2)$ və $\lambda_n(0),\ n \in \mathrm{N}$, bu funksiyanın uyğun olaraq sıfırları və polyuslarıdır.

Lemma 6. *Aşağıdakı düstur doğrudur:*

$$\frac{dG}{d\lambda} = -\frac{1}{y'^2(1,\lambda)}\left\{\int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx - a_2 y^2(1,\lambda)\right\},\ \lambda \in K. \tag{15}$$

Lemma 7. *Aşağıdakı münasibət doğrudur:*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} G(\lambda) = +\infty\,. \tag{16}$$

Aşağıdakı müqayisə tipli teorem doğrudur**.**

Lemma 8. *Tutaq ki,* $0<\xi<\eta$. *Əgər* $y'(x,\xi)$ *funksiyasının* $(0,\,1)$ *intervalında* m *sayda sıfırı varsa, onda* $y'(x,\eta)$ *funksiyasının həmin intervalda yerləşən sıfırlarının sayı* m*-dən az deyil.*

$\tau(\lambda)$ və $s(\lambda)$ ilə uyğun olaraq $y(x,\lambda)$ və $y'(x,\lambda)$ funksiyalarının $(0,\,1)$ intervalında yerləşən sıfırlarının sayını işarə edək.

Teorem 7. $y(x,\lambda)$ *və* $y'(x,\lambda)$ *funksiyaları aşağıdakı osillyasiya xassələrinə malikdirlər: əgər* $\lambda\in(0,\lambda_1(0)]$ *olarsa, onda* $\tau(\lambda)=s(\lambda)=0$ *olar; əgər* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(\pi/2))$ *və* $n\ge 2$ *olarsa, onda ya* $\tau(\lambda)=n-2$*, ya da* $\tau(\lambda)=n-1$ *olar; əgər* $\lambda\in[\lambda_n(\pi/2),\lambda_n(0)]$ *və* $n\ge 2$ *olarsa, onda* $\tau(\lambda)=n-1$ *olar; əgər* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0)]$ *və* $n\ge 2$ *olarsa, onda* $s(\lambda)=n-1$ *olar.*

Qeyd 2. Əgər $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(\pi/2))$ və $\lambda_{n-1}(0)$ -a kifayət qədər yaxın olarsa, onda $\tau(\lambda)=n-2,$ əgər $\lambda_n(\pi/2)$ -yə kifayət qədər yaxın olarsa, onda $\tau(\lambda)=n-1$ olar.

2.4-də (10)-(13) məsələsinin köklü alt fəzalarının strukturu və məxsusi funksiyalarının osillyasiya xassələri öyrənilir.

Qeyd 3. Əgər λ ədədi (10)-(13) məsələsinin məxsusi ədədidirsə, onda $y'(1,\lambda)\ne 0$ olar.

Teorem 8. *(10)-(13) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidirlər, sadədirlər və sonsuz artan* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığı əmələ gətirirlər, belə ki,* $\lambda_n>0,\ n\in\mathrm{N}$. *Onlara uyğun məxsusi funksiyalar və onların törəmələri aşağıdakı osillyaisya xassələrinə malikdirlər: (i)* λ_n *məxsusi ədədinə uyğun* $y_n(x)$ *məxsusi funksiyasının* $n=1$ *olduqda* $(0,\,1)$ *intervalında sıfırı yoxdur,* $n\ge 2$ *olduqda isə ya* $n-2$ *ya da* $n-1$ *sayda sadə sıfırı var; (ii)* $y_n'(x),$ $n\in\mathrm{N},$ *funksiyasının* $(0,\,1)$ *intervalında düz* $n-1$ *sayda sadə sıfırı var.*

Teorem 9. *Aşağıdakı asimptotik düsturlar doğrudur:*

$$\sqrt{\lambda_n} = (n-3/2)\ \pi + O(1/n), \tag{17}$$

$$y_n(x) = \sin(n-3/2)\pi x - \cos\ (n-3/2)\pi x + e^{-(n-3/2)\pi\, x} + (-1)^n\, e^{-(n-3/2)\pi\,(1-x)} + O(1/n), \tag{18}$$

belə ki, (18) münasibəti $x \in [0,\ 1]$*-lərə görə müntəzəm ödənilir.*

2.5 yarımfəsilində (10)-(13) məsələsinin məxsusi funksiyaları sisteminin alt siatemlərinin $L_p(0, 1), 1 < p < \infty,$ fəzasında bazislik xassələri tədqiq edilir. Bu məsələ skalyar hasili

$$(\hat{y}, \hat{\vartheta}) = (\{\hat{y}, m, k\}, \{\vartheta, s,\ t\}) = (y, \vartheta)_{L_2} + |\, a_1\,|^{-1}\ m\bar{s} + |\, a_2\,|^{-1}\ k\,\bar{t}, \tag{19}$$

olan $H = L_2(0,1) \oplus C^2$ Hilbert fəzasında aşağıdakı kimi təyin edilən L operatoru üçün məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir:

$$L\hat{y} = L\{y, m, k\} = \{\ (Ty)'(x), y''(1), Ty\,(1)\}$$

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x), m, k\} \in H\ : y(x) \in W_2^4\,(0,\ 1), (Ty)'(x) \in L_2\,(0,\ 1),$$
$$y(0) = y'(0) = 0,\ m = a_1 y'(1), k = a_2\, y\,(1)\}$$

($D(L)$ H -da hər yerdə sıxdır). Qeyd edək ki, L operatoru H -da korrekt təyin olunub və (10)-(13) məsələsi aşağıdakı şəklə düşür:

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\ \ \hat{y} \in D(L).$$

Teorem 10. *L operatoru H -da öz-özünə qoşma, diskret, aşağıdan məhdud operatordur. Bu operatorun $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{y}_n = \{y_n(x), m_n, k_n\}$, $m_n = a_1 y_n'(1)$, $k_n = a_2 y_n(1)$, məxsusi vektorlar sistemi H -da ortoqonal bazis əmələ gətirir.*

Tutaq ki, $\delta_n = (\hat{y}_n, \hat{y}_n)$. (19) –a əsasən alarıq ki,

$$\delta_n = \|\ y_n\,\|_{L_2}^2 + a_1 y'^2(1) - a_2 y^2(1) > 0. \tag{20}$$

Odur ki, teorem 10-a görə L operatorunun $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n = \delta_n^{-1/2}\,\hat{y}_n$, məxsusi vektorlar sistemi H -da ortonormal bazis (Riss bazisi) əmələ gətirir.

Tutaq ki, $r,\ l\,(r \neq l)$ пixtiyari fiksə olunmuş natural ədədlərdir və

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} y_r'(1) & y_l'(1) \\ y_r(1) & y_l(1) \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Teorem 11. *Tutaq ki,* $\Delta_{r,l} \neq 0.$ *Onda (10)-(13) məsələsinin* $\{y_n(x)\}_{n=1, n\neq r,l}^{\infty}$ *məxsusi funksiyaları sistemi* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *fəzasında bazis əmələ gətirir, belə ki, bu bazis* $p = 2$ *olduqda şərtsiz yığılan bazis olur. İndi isə* *tutaq ki,* $\Delta_{r,l}=0.$ *Onda* $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq r,l}^{\infty}$ *sistemi* $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ *fəzasında nə tam, nə də minimal deyil.*

Qeyd 4. Teorem 8 və Qeyd 2-yə əsasən hər bir $n\in\mathrm{N}$ və ixtiyari kiçik $\delta>0$ ədədi üçün

$$\lambda\in(\lambda_n(0),\lambda_n(0)+\delta)\ \text{olduqda}\ \tau(\lambda)=n-1$$

$$\lambda\in(\lambda_{n+1}(\pi/2)-\delta,\lambda_{n+1}(0))\ \text{olduqda isə}\ \tau(\lambda)=n\ \text{olur.}$$

Qeyd edək ki, hər bir natural n ədədi üçün elə yeganə $\eta_n\in(\lambda_{n+1}(0),\ \lambda_{n+1}(\pi/2))$ var ki, $y(1,\eta_n)=0$ olur. Onda sonuncu iki münasibətə əsasən $\lambda\in(\lambda_n(0),\eta_n]$ olduqda $\tau(\lambda)=n-1,\ \lambda\in(\eta_n,\lambda_{n+1}(0))$ olduqda isə $\tau(\lambda)=n$ olduğunu alarıq. Bundan başqa həm də aşağıdakı asimptotik düstur doğrudur:

$$\sqrt[4]{\eta_n}=n\pi+O(1/n). \tag{22}$$

Qeyd 5. (17) və (22) asimptotik düsturlarına əsasən hər bir a_1 üçün elə natural $n^{(1)}=n_{a_1}\geq 2$ ədədi var ki, $n\geq n^{(1)}$ olduqda $\lambda_{n-1}(0)<\lambda_n<\eta_{n-1}<\lambda_n(\pi/2)$ olar. Onda $n\geq n^{(1)}$ olduqda $\tau(\lambda)=n-2$ olar. 6, 7 lemmalarına və (17) düsturuna görə a_1 artdıqda $n^{(1)}$ azalır. Odur ki, elə $a_1^{(1)}>0$ ədədi var ki, $a_1>a_1^{(1)}$ olduqda $n^{(1)}=2$ olar.

Qeyd 6. Tutaq ki, $r\geq 2$ və $a_{1,r}>0$ elə bir ədəddir ki, $a_{1,r}\eta_{r-1}=G(\eta_{r-1}).$ Onda $a_1=a_{1,r}$ olduqda $\lambda_r=\eta_{r-1}$ olar. Ona görə də, lemma 6-ya əsasən $a_1<a_{1,r}$ olduqda $\lambda_{r-1}(0)<\eta_{r-1}<\lambda_r<\lambda_r(\pi/2)$ olduğunu alarıq. Odur ki, $a_1\leq a_{1,r}$ olduqda $r<n^{(1)}$ olar.

Teorem 12. *Əgər* $r=1,\ l\geq n^{(1)}$ *ya da* $r\geq 2,\ a_1\leq a_{1,r},\ \ l\geq n^{(1)}$ *olarsa, onda* $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq r,l}^{\infty}$ *sistemi* $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ *fəzasında bazis əmələ gətirər, belə ki,* $p=2$ *olduqda bu bazis şərtsiz yığılan bazis olar.*

2.6 yarımfəslində

$$y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))'=\lambda y(x),\ 0<x<1,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)=0, \tag{23}$$
$$y''(1)-(a_1\lambda+b_1)y'(1)=0,\ Ty(1)-a_2\lambda y(1)=0,$$

spektral məsələsinin məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının xassələri öyrənilir, burada $b_1 \neq 0$. $b_1 < 0$ olduqda bu məsələ bir ucu bərkidilmiş, digər ucu elastiki bərkidilmiş və bu ucda inersial yük olan və izləyici qüvvə təsir edən, en kəsiklərində isə uzununa qüvvə təsir edən Eyler-Bernulli çubuğunun əyilmə (eninə) rəqslərini təsvir edir.

Lemma 9. *$\lambda \leq 0$ dəyişdikdə $y(x,\lambda)$ və $y'(x,\lambda)$ funksiyaları yalnız və yalnız o vaxt sıfır itirə və ya sıfır əldə edə bilərlər ki, əgər bu sıfır $(0,1)$ intervalının daxilinə $x=0$ nöqtəsindən girsin və ya bu intervaldan həmin nötədə çıxsın.*

İndi isə

$$\begin{gathered} \ell(y)(x) = \lambda y(x),\ 0 < x < 1, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = Ty(1) - a_2 \lambda y(1) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

spektral məsələsinə baxaq.

Lemma 10. *Elə $\zeta < 0$ ədədi var ki, (24) sərhəd məsələsinin $\mu_n,\ n = 1, 2, \ . \ . \ .$, həqiqi məxsusi ədədləri $(-\infty, \zeta)$ şüasında yerləşirlər, sonsuz azalan ardıcıllıq əmələ gətirirlər, osillyasiya indeksləri 1-ə bərabər olur və onlar üçün $\mu_n = -4\left(n\pi + \pi/2\right)^4 + o(n^4)$ asimptotik düsturu doğrudur.*

Tutaq ki, $\lambda < 0$ və $i(\mu_n)$ ədədi (24) məsələsinin $\mu_n,\ n \in \mathrm{N},$ məxsusi ədədinin osillyasiya indeksidir. Onda aıağıdakı düstur doğrudur:

$$s(\lambda) = \tau(\lambda) = \sum_{\mu_n \in (\lambda, 0)} i(\mu_n) \tag{25}$$

$N_1 \in \mathrm{N}$ ədədini

$$\lambda_{N_1 - 1}(\pi/2) < -b_1/a_1 \leq \lambda_{N_1}(\pi/2)$$

bərabərsizliyindən təyin edək.

Teorem 13. *(23) məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqi və sadədirlər və sonsuz artan $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığını əmələ gətirirlər, belə ki, $n \geq 2$ olduqda $\lambda_n > 0$ olur. Onlara uyğun $y_1(x), y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x),\ .\ .\ .$ məxsusi funksiyaları və onların törəmələri aşağıdakı osillyasiya xassələrinə malikdirlər: i) əgər $N_1 = 1$ olarsa, onda $y_1(x)$ və $y_1'(x)$ funksiyalarının $\lambda_1 \geq 0$ halında $(0,1)$ intervalında sıfırları yoxdur, $\lambda_1 < 0$ halında isə $\sum_{\mu_n \in (\lambda_1, 0)} i(\mu_n)$ sayda sadə sıfırları var, $n \geq 2$ olduqda $y_n(x)$ funksiyasının $(0,1)$ intervalında ya $n-2$ ya da $n-1$ sadə sıfır var, $y_n'(x)$ funksiyasının isə düz $n-1$ sayda sadə sıfırı var; ii) əgər $N_1 > 1$ olarsa, onda $y_n(x)$ funksiyasının $(0,1)$ intervalında*

$n < N_1$ *olduqda düz* $n-1$ *sayda sadə slıfırı,* $n \geq N_1$ *olduqda ya* $n-2$ *ya da* $n-1$ *sadə sıfırı var,* $y_n'(x)$ *funksiyasının isə düz* $n-1$ *sayda sadə sıfırı var.*

(23) məsələsi skalyar hasili (19) düsturu ilə verilən $H = L_2(0, 1) \oplus C^2$ fəzasında öz-özünə qoşma $\tilde{L}$ operatoru üçün məxsusi qiymət məsələsinə gətirilir, burada $\tilde{L}$ operatoru aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\hat{L}\hat{y} = L\{y, m, k\} = \{ (Ty)'(x), y''(1) - b_1 y'(1), Ty(1)\},$$

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x), m, k\} \in H \ : y(x) \in W_2^4(0, 1), (Ty)'(x) \in L_2(0, 1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \ m = a_1 y'(1), \ k = a_2 y(1)\}.$$

Qeyd 7. (17) asimptotik düsturuna əsasən elə $\tilde{n} \geq 2$ natural ədədi var ki, $n \geq \tilde{n}$ olduqda $y_n(x)$ funksiyasının $(0, 1)$ intervalında düz $n-2$ sayda sadə sıfırı var. Aydındır ki, $\tilde{n} > N_1$.

Teorem 14. *Tutaq ki,* r, l $(r \neq l)$ *ixtiyari fiksə olunmuş natural ədədlərdir. Əgər* $b_1 < 0$, $N_1 > 1$, $r < N_1$, $l \geq \tilde{n}$ *və ya* $b_1 > 0$, $r = 1$, $l \geq \hat{n}$ *olarsa, onda* $\{y_n(x)\}_{n=1, n\neq r, l}^{\infty}$ *sistemi* $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, *fəzasında bazis* $(p = 2$ *olduqda isə şərtsiz bazis) əmələ gətirir.*

2.7 -də (10)-(13) məsələsi $a_1 < 0$, $a_2 < 0$ olduqda tədqiq edilir. Bu halda L operatoru H-da qapalı, öz-özünə qoşma olmayan, kompakt rezolventalı operator olur.

$J : H \to H$ operatorunu aşağıdakı kimi daxil edək:

$$J\{y, m, k\} = \{y, -m, k\}.$$

Lemma 11. J *operatoru* H-da *unitar və simmetrik operatordur və onun spektri iki məxsusi ədəddən ibarətdir: təkrarlanma tərtibi* 1 *olan* -1 *və sonsuz təkraralanma tərtibinə malik* 1.

Lemma 11-ə əsasən J operatoru daxili hasili

$$[\hat{y}, \hat{\vartheta}] = (\hat{y}, \hat{\vartheta})_{\Pi_1} = (\{y, m, k\}, \{\vartheta, s, t\})_{\Pi_1} = (y, \vartheta)_{L_2^r} + a^{-1} m\bar{s} - a_2^{-1} k\bar{t} \quad (26)$$

olan $\Pi_1 = L_2(0, 1) \oplus C^2$ Pontryaqin fəzasını doğurur.

Teorem 15. L *operatoru* Π_1 *fəzasında* $J-$ *öz-özünə qoşma operatordur. Bu operatorun köklü funksiyalar sistemi (normallaşandan sonra)* H *-da Riss bazisi əmələ gətirir.*

Teorem 16. *Tutaq ki,* $a_1 < 0$ *və* $a_2 < 0$. *Onda (10)-(13) sərhəd məsələsinin bütün məxsusi ədədləri həqiqidirlər, sadədirlər və sonsuz artan* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ardıcıllığını əmələ gətirirlər, belə ki,* $\lambda_1 < 0$ *və* $\lambda_n > 0$, $n \geq 2$. *Onlara* *uyğun* $y_n(x), n \in \mathrm{N},$ *məxsusi funksiyalar və onların törəımələri aşağıdakı osillyasiya xassələrinə malikdirlər:* $y_n(x)$ *və* $y'_n(x)$ *funksiyalarının* $n \geq 3$ *olduqda* $(0, 1)$ *intervalında düz* $n-2$ *sayda sadə sıfirları var,* $n = 2$ *olduqda sıfirları yoxdur,* $n = 1$ *olduqda isə düz* $\sum_{\mu_n \in (\lambda_1, 0)} i(\mu_n)$ *sayda sadə sıfirları var.*

Lemma 12. *Tutaq ki,* $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n = \{\vartheta_n, s_n, t_n\}$, *sistemi* $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sisteminə qoşma sistemdir. Onda* $\hat{\vartheta}_n = \delta_n^{-1}\hat{y}_n$, $n \in \mathrm{N}$, *olar.*

Teorem 17. *Tutaq ki,* r, l $(r \neq l)$ *ixtiyari qeyd olunmuş natural ədədlərdir və* $a_1 < 0,\ a_2 < 0.$ *Əgər* $\Delta_{r,l} \neq 0$ *olarsa, onda (10)-(13) məsələsinin* $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *məxsusi funksiyaları sistemi* $L_p(0, 1),\ 1 < p < \infty,$ *fəzasında bazis əmələ gətirir, belə ki, bu bazis* $p = 2$ *olduqda şərtsiz bazis olur, əgər* $\Delta_{r,l} = 0$ *olarsa, onda bu sistem* $L_p(0, 1),\ 1 < p < \infty,$ *fəzasında nə tam, nə də minimal olmur.*

Nəticə

Dissertasiya işində sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxi olan requlyar və tamam requlyar Şturm sistemlərinə baxılır. Baxılan məsələlərə mexanikanın və fizikanın müxtəlif məsələlərinin tədqiqi zamanı rast gəlindiyindən tədqiqatın mövzusu aktualdır.

Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır: potensiala malik tam requlyar Şturm sistemləri üçün:

– köklü alt fəzalarının strukturu və bütün məxsusi funksiyaların osillasiya xassələri öyrənilmişdir;

sərhəd şərtlərinin birinə spektral parametr daxil olan potensiala malik requlyar Şturm sistemi üçün:

– məxsusi ədədlərin həqiqi oxda yerləşməsinin ümumi xarakteristikası verilmişdir;

– məxsusi funksiyaların osillasiya xassələri tam öyrənilmişdir;

– məxsusi funksiyalar sistemindən ixtiyari biri atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirdiyi isbat edilmişdir;

sərhəd şərtlərinin ikisinə spektral parametr daxil olan tamam requlyar Şturm sistemləri üçün:

– məxsusi ədədlərin həqiqi oxda paylanma qaydası öyrənilmişdir;

– məxsusi funksiyaların və onların törəmələrinin osillasiya xassələri tam tədqiq edilmişdir;

– məxsusi funksiyalar və məxsusi ədədlər üçün asimptotik düsturlar alınmışdır;

– məxsusi funksiyalar sistemindən ikisi atıldıqdan sonra yerdə qalan sistemin $L_p, 1 < p < \infty,$ fəzasında bazis əmələ gətirməsi şərtləri müəyyən edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Алиев, З.С., Гулиева, С.Б. Осцилляционные свойства собственных функций уравнения поперечных колебаний стержня, подвергаемого действию осевым силам // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» посвященной 55-летному юбилею Института Математики и Механики НАН Азербайджана, – Баку: – 2014, – с. 38-40.
2. Алиев, З.С., Гулиева, С.Б. Некоторые спектральные свойства одной вибрационной краевой задачи со спектральным параметром в граничном условии // Материалы Международной конференции «Сферы приложения математики и ИКТ. Новые технологии обучения», I часть, – Гянджа: – 2014, – с. 112-115.
3. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B. Oscillation properties of eigenfunctions of a vibrational boundary value problem // – Baku: Transactions NAS Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., mathematics, – 2014. v. 34, no. 4, – p. 29–36.
4. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B. Spectral properties for the equation of vibrating beam // – Baku: Proceedincs IMM NAS of Azerbaijan, – 2015, v. 41, no. 1, – p. 135–145.
5. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Some spectral properties of an eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // The Abstract of International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, – Antalya: – 05-07 November, – 2015, – p. 112.
6. Гулиева С.Б. Некоторые спектральные свойства одной краевой задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничных условиях // Материалы I Международной научной конференции молодых ученых, т. I, – Гянджа: – 2016, – с. 341.

7. Guliyeva, S.B. Basis properties of the system of eigenfunctions of a fourth order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // – Baku: Transactions NAS Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., iss. math., – 2017. v. 37, no. 4, – p. 42–48.
8. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load // Journal of Differential Equations, – 2017. v. 263, no. 9, – p. 5830–5845.
9. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Spectral properties of a fourth order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // Filomat, – 2018. v. 32, no. 7, – p. 2421-2431.
10. Рзаев, О.Г., Гулиева, С.Б. О краевой задаче описывающей изгибные колебания стержня, на одном конце которого действует следящая сила и сосредоточен инерционный груз \\ Баку: Известия Педагогического Университета, серия математических и естественных наук, – 2018. т. 66, № 2, – с. 95–102.
11. Guliyeva, S.B. The properties of the eigenvalues and eigenfunctions of a vibration boundary value problem // – Baku: Caspian Journal of Applied mathematics, Ecology, and Economics, – 2019. v. 7, no. 1, – p. 25-31.
12. Гулиева, С.Б. Спектральные свойства краевой задачи, описывающей изгибные колебания однородного стержня, на одном из концов которого сосредоточена инерционная нагрузка и действует следящая сила // Материалы Международной конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, – Воронеж: Россия, – 2021, – с. 97–98.

Müəllif məsələnin qoyuluşuna və daim diqqətə görə elmi rəhbərləri professorlar Ziyatxan Seyfəddin oğlu Əliyevə və Orucəli Hüseynqulu oğlu Rzayevə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın müdafiəsi **10 dekabr 2021-ci il tarixində saat $\underline{14^{00}}$ -da** Azərbaycan Milli Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı ş., B. Vahabzadə küç., 9

Dissertasiya ilə Azərbaycan Milli Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür..

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat ____ __________ 2021-ci il tarixində zəruri ünvanlara

göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb:

Kağızın formatı: 60x84 1/16

Həcm: 39082

Tiraj: 50