АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОТВЕТСТВУЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНЫМ КОЛЕБАНИЯМ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВЫХ И СЛЕДЯЩИХ СИЛ

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Гулиева Севиндж Бакир кызы**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2021

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Гянджинского Государственного Университета

Научные руководители: д.м.н., профессор
Зиятхан Сейфаддин оглы Алиев,
д.ф.-м.н., профессор
Оруджали Гусейнгулу оглы Рзаев

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Назим Бахыш оглы Керимов

доктор физико-математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

кандидат физико-математических наук, доцент
Ширмаил Гасан оглы Багиров

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_____ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.,
_____ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
академик, д.ф.–м.н., профессор
_____ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень обработки. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов четвертого порядка со спектральным параметром в граничных условиях.

Спектральная теория дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях является одним из важных разделов современной математики. Изучение граничных задач с параметром в граничных условиях имеет как теоретический, так же и прикладной интерес, так как задачи такого типа встречаются в механике и физике. Еще в 1820 г. М. Пуассон решает задачу о движении тела, подвешенного к концу нерастяжимой нити, А.Н. Крылов и С.П. Тимошенко рассматривают задачу о продольных колебаниях стержня, как одну из актуальных задач естествознания. В.В. Болотин[1] изучает изгибные колебания стержня, в сечениях которого действует продольная сила, левый конец которой заделан, а на правом конце сосредоточен инерционный груз и на этом конце действует следящая сила. Эта задача описывается краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка со спектральным параметром в граничных условиях.

Задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях ранее были изучены в работах Ж. Уолтера, Ч.Т. Фултона, Е.М. Руссаковского, где рассматриваемые задачи сведены к спектральным задачам для самосопряженных операторов действующих в гильбертовы пространствах $L_2 \oplus C^N, N \geq 1.$ Ими было установлено, что системы корневых векторов соответствующих операторов образуют базисы Рисса в $L_2 \oplus C^N$. В дальнейшем Е.И. Моисеевым и Н.Ю. Капустиным[2] впервые была установлена базисность в простран-

---

[1]Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 1. Колебания механических систем / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин [и др.] (под редакцией В.В. Болотина). – Москва: Машиностроение, – 1978, – 352 с.

[2]Капустин, Н.Ю., Моисеев, Е.И. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2000. т. 36, № 10, – с. 1357–1360.

стве $L_p, 1 < p < \infty$, систем корневых функций, с одной удаленной функцией, задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии. Н.Б Керимовым и Р.Г. Поладовым[3], З.С.Алиевым и А.А. Дуньямалиевой[4] исследована задача Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в обоих граничных условиях и установлены достаточные условия для базисности систем корневых функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty$, после удаления двух функции.

Н.Б. Керимовым и З.С. Алиевым[5], З.С. Алиевым[6,7] изучены спектральные свойства краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (вполне регулярных систем Штурма) со спектральным параметром в одном из граничных условий. Ими было найдено необходимые и достаточные условия, при которых система корневых функций этих задач образует базис в $L_p, 1 < p < \infty$, после удаления одной функций.

Таким образом, актуальным является исследование спектральных свойств регулярных систем Штурма со спектральным параметром в одном из граничных условий и вполне регулярных систем Штурма со спектральным параметром в двух из граничных условий.

---

[3]Керимов Н.Б., Поладов Р.Г. Базисные свойства системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Доклады РАН, – 2012. т. 442, № 1, – с. 583–586.

[4]Алиев, З.С., Дуньямалиева, А.А. Дефектная базистность системы корневых функций задачи Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2015. т. 51, № 10, – с. 1259-1276.

[5] Керимов, Н.Б., Алиев, З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2007, т. 43, № 7, – с. 886–895.

[6]Aliyev, Z.S. Basis properties of a fourth order differential operator with a spectral parameter in the boundary condition // Central European Journal Mathematics, – 2010, v. 8, no. 2, – p. 378–388.

[7]Алиев, З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 2011. т. 46, № 6, – с.764-775.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является обыкновенные дифференциальные операторы со спектральным параметром в граничных условиях, а предметом исследования являются осцилляционные свойства собственных функций и базисные свойства корневых функций.

Цель и задачи исследования. Основная цель и задача диссертационной работы – изучение расположения всех собственных значений на действительной оси, структуру корневых подпространств, осцилляционные свойств всех собственных функций, исследование базисных свойств в пространствах $L_p, 1 < p < \infty$, системы корневых функций регулярных и вполне регулярных систем Штурма граничные условия которых содержат спектральный параметр.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы математического анализа, дифференциальных уравнений, функционального анализа, комплексного анализа, теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, спектральной теорий линейных дифференциальных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

– изучить структуру корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций регулярной системы Штурма четвертого порядка при наличии потенциала;

– найти общую характеристику расположения собственных значений на вещественной оси, определить кратности собственных значений, полностью исследовать осцилляционные свойства собственных функций и изучить базисные свойства корневых функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty$, регулярной системы Штурма четвертого порядка при наличии потенциала и со спектральным параметром в одном из граничных условий;

– найти общую характеристику расположения собственных значений на вещественной оси, изучить структуру корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций и их производных, получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, установить достаточные условия для базисности систем корневых функций с двумя удаленными функциями в пространстве $L_p, 1 < p < \infty$, вполне

регулярной системы Штурма четвертого порядка со спектральным параметром, содержащимся в двух граничных условиях.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты: для вполне регулярных систем Штурма при наличии потенциала

– изучена структура корневых подпространств и осцилляционные свойства всех собственных функций;

для регулярных систем Штурма при наличии потенциала и со спектральным параметром в одном из граничных условий

– найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси;

– полностью изучены осцилляционные свойства собственных функций;

– доказано базисность системы собственных функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty,$ после удаления любой произвольной функции,

для вполне регулярных систем Штурма со спектральным параметром в двух из граничных условий

– найдено расположение собственных значений на вещественной оси;

– изучена структура корневых подпространств;

– полностью исследованы осцилляционные свойства собственных функций и их производных;

– получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций;

– установлены достаточные условия для базисности систем корневых функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty,$ после удаления двух функции.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Результаты, которые получены в диссертации, в основном носят теоретический характер. Их можно использовать при изучении различных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов, при исследовании различных процессов механики и физики.

Апробация и применение. Результаты полученные в диссертации автором докладывались на семинарах проведенных в Гянджинском Государственном Университете на кафедре Математического анализа (рук. доц. А.М. Гусейнов), в Бакинском Государственном Университете на кафедре Математического анализа

(рук. проф. С.С. Мирзоев), в Университете Хазар на департаменте Математики (рук. проф. Н.Б. Керимов), в ИММ НАН Азербайджана на отделе Дифференциальных уравнений (рук. проф. А.Б. Алиев), на Международной конференции, которая посвящена 55-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана "Актуальные проблемы математики и механики" (Баку, 2014), на Международной конференции "Сферы применения математики и ИКТ. Новые технологии обучения" (Гянджа, 2014), на Международной конференции по развитию математических наук (AMS 2015) (Анталия, Турция, 2015), на I Международной научной конференции молодых ученых (Гянджа, 2016), на международной Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, Россия, 2021).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели исследования. Кроме того, все полученные результаты исследования принадлежат автору.

Публикации автора. Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Призидента Азербайджанской Республики – 7 (из них 2 WOS, 2 SCOPUS) материалы конференций – 5 (все конференции международные, 2 из них проведены за рубежом).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в Гянджинском Государственном Университете на кафедре Математического анализа.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы – 205750 знаков (титульная страница – 381 знаков, оглавление – 2254 знаков, введение – 54000 знаков, первая глава – 54000 знаков, вторая глава – 94000 знаков, заключение 1115). Список используемой литературы состоит из 77 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, 2-х глав (с 11-ю параграфами), заключения и списка используемой литературы.

Первая глава состоящая из 4-х параграфов посвящена исследованию осцилляционных и базисных свойств системы

собственных функций регулярных систем Штурма для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Для исследования этих свойств изучается осцилляционные свойства некоторых регулярных систем Штурма (без вхождения спектрального параметра в граничные условия). Доказывается существование и единственность решения начально-краевой задачи для этих регулярных систем Штурма.

В 1. 1. изучается осцилляционные свойства регулярных систем Штурма

$$\ell_r(y) \equiv (p(x)y'')'' - (q(x)y')' + r(x)y(x) = \lambda\tau(x)y, 0 < x < l, \qquad (1)$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \qquad (2a)$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \qquad (2b)$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \qquad (2c)$$

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \qquad (2d)$$

где $\lambda \in C$ –спектральный параметр, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, функция $p(x)$ положительна и имеет абсолютно непрерывную производную на $[0, l]$, функция $q(x)$ неотрицательна и абсолютно непрерывна на $[0, l]$, функция $r(x)$ непрерывна на $[0, l]$, $\tau(x)$ положительна и непрерывна на $[0, l]$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta -$ действительные постоянные, причем $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$, $\delta \in [0, \pi)$.

Задача (1), (2) возникает при разделении переменных в динамической краевой задаче, описывающей малые поперечные колебания неоднородного стержня, подвергаемого действию осевой (или продольной) силы.

Собственные значения вполне регулярных систем Штурма вещественны и образуют неограниченно неубывающую последовательность, причем в случае $r \equiv 0$ все они являются положительными и простыми, а соответствующие им собственные функции обладают штурмовыми осцилляционными свойствами. В случае, когда $r(x)$ не обращается тождественно в 0, ни в каком промежутке, составляющем часть отрезка $[0, l]$, собственные значения являются простыми, за исключением, быть может, m первых, а соответствующие им собственные функции обладают штурмовыми осцилляционными свойствами (здесь m – некоторое натуральное число больше двух).

Отметим, что задача (1), (2) при $\delta \in [0, \pi/2]$, за исключением

случая $\beta=\delta=\pi/2,$ является вполне регулярной системой Штурма, а в случае $\delta\in[\pi/2,\pi)-$ регулярной системой Штурма. Осцилляционные свойства собственных функций и их производных задачи (1), (2) при $r\equiv 0$ и $\delta\in[0,\pi/2]$ детально исследовано Д.О. Банксом и Г.Дж. Куровским[8], а при $\delta\in[\pi/2,\pi)-$З.С. Алиевым[9]. Лишь З.С. Алиевым[10] полностью исследованы осцилляционные свойства собственных функций, соответствующих первым m собственным значениям вполне регулярных систем Штурма.

Пусть $\delta_0=\pi/2,$ если $\beta\in[0,\pi/2),$ $\delta_0=arctg\ F_0(0),$ если $\beta=\pi/2,$ $\mathrm{N}_0=\mathrm{N},$ если $\delta\in[0,\delta_0)$ и $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\setminus\{1\},$ если $\delta\in[\delta_0,\pi),$ где $F_0(\lambda)=$ $=T\vartheta(1,\lambda)/\vartheta(1,\lambda),$ а $\vartheta(x,\lambda)-$решение (1), (2a)-(2c) при $r\equiv 0.$

Данный параграф посвящен исследованию структуру корневых подпространств и осцилляционных свойств собственных функций, соответствующих первым m собственным значениям задачи (1)-(2) при $\delta\in[\pi/2,\pi).$

Основным результатом параграфа 1.1 является следующая

Теорема 1. *При фиксированных* α,β,γ *спектр задачи (1), (2) при* $\delta\in[0,\pi)$ *состоит из вещественных, простых собственных значений, которые образуют неограниченную возрастающую последовательность* $\{\lambda_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty}$. *Кроме того, собственная функция* $y_{n,\delta}(x),$ *соответствующая собственному значению* $\lambda_n(\delta),$ *при* $n\in\mathrm{N}_0$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в интервале* $(0,\ l).$

В 1.2 изучается существование, единственность и основные свойства решении задачи (1), (2a)-(2c).

Теорема 2. *При каждом фиксированном* $\lambda\in C$ *существует*

---

[8] Banks, D.O., Kurowski G.J. A Prufer transformation for the equation of the vibrating beam // Transactions of the American Mathematical Society, – 1974. v.199, – p. 203–222.

[9] Aliyev, Z.S. Structure of root subspaces and oscillation properties of eigenfunctions of one fourth order boundary value problem // – Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2014. v. 4, no. 2, – p. 108-121.

[10] Алиев, З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // – Москва: Математический сборник, – 2016. т. 207, № 12, – с. 3–29

единственное нетривиальное решение $y(x,\lambda)$ *задачи (1), (2a)-(2c) с точностью до постоянного множителя.*

Функция $y(x,\lambda)$ для каждого фиксированного $x\in[0,\,l]$ является целой функцией от λ. Заметим, что собственные значения $\lambda_n(0)$ и $\lambda_n(\pi/2),\ n\in\mathrm{N}$, задачи (1), (2) являются нулями целых функций $y(x,\lambda)$ и $Ty(x,\lambda)$, соответственно. Очевидно, что функция $F_r(\lambda)=Ty(l,\lambda)/y(l,\lambda)$ определена на множестве $B=(C\setminus R)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, где $B_n=(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0)),\ n\in\mathrm{N},\ \lambda_0(0)=-\infty,$ и является мероморфной функцией конечного порядка, $\lambda_n(0)$ и $\lambda_n(\pi/2),\ n\in\mathrm{N},-$полюсы и нули этой функции, соответственно.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\frac{dF_r(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{y^2(l,\lambda)}\int_0^l\tau\,y^2(x,\lambda)dx,\ \lambda\in B. \tag{4}$$

Имеет место следующая асимптотическая формула

$$F_r(\lambda)=-\left(\sqrt{2}\right)^{1-2sgn\gamma}(p(1)\tau^3(1))^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{|\lambda|^3}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{|\lambda|}}\right)\right),\ \lambda\to-\infty, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F_r(\lambda)=-\infty. \tag{6}$$

Теперь исследуем вопрос о числе нулей функции $y(x,\lambda)$, содержащихся в интервале $(0,\,l)$.

Лемма 2. *Каждый нуль* $x(\lambda)$ *функции* $y(x,\lambda)$ *является простой и непрерывно-дифференцируемой функцией от* $\lambda\in(-\infty,+\infty)$.

Пусть μ является вещественным собственным значением уравнения (1) при граничных условиях $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, (2c), если $\beta=0$, либо $y(0)=Ty(0)=0$, (2a), (2c), если $\beta\in(0,\pi/2]$. Индексом осцилляции собственного значения μ называется разность между числами нулей, содержащихся в интервале $(0,\,l)$, функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda\in(\mu-\varepsilon,\mu)$ и $\lambda\in(\mu,\mu+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0-$достаточно малое число.

Лемма 3. Существует число $\xi<0$ такое, что вещественные собственные значения $\xi_k,\ k=1,\,2,\,\ldots,$ спектральной задачи (1),

$y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ (2c) при $\beta=0,$ либо $y(0)=Ty(0)=0,$ (2a), (2c) при $\beta\in(0,\pi/2],$ содержатся в интервале $(-\infty,\xi),$ являются простыми, имеют индекс осцилляции 1 и образуют неограниченно убывающую последовательность.

Пусть $\kappa(\lambda)-$ число нулей функции $y(x,\lambda),$ которые расположены в интервале $(0,l).$

Лемма 4. *Если* $\lambda>\lambda_1(\delta_0)$ *и* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0)],\ n\in\mathrm{N},$ *то* $\kappa(\lambda)=n-1,$ *если* $\lambda\le\lambda_1(\delta_0),$ *то* $\kappa(\lambda)=\sum\limits_{\xi_k\in(\lambda,\lambda_1(\delta_0))} i(\xi_k),$ *где* $i(\xi_k)$ *является индексом осцилляции собственного значения* ξ_k.

В 1.3 рассматривается система Штурма (1), (2a)-(2.c) и

$$(a\lambda+b)y(l)-(c\lambda+d)Ty(l)=0, \tag{7}$$

где $a, b, c, d-$ действительные постоянные такие, что $\sigma=bc-ad>0.$ Изучаются структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций этой задачи.

При $c\ne0$ определим число $N_0\in\mathrm{N}$ из неравенства $\lambda_{N_0-1}(0)<-d/c\le\lambda_{N_0}(0).$

Теорема 3. *Собственные значения спектральной задачи (1), (2.a)-(2.c), (7) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Собственная функция* $y_n(x),$ $n\in\mathrm{N},$ *соответствующая собственному значению* λ_n, *обладает следующими осцилляционными свойствами: a) если* $c=0$, *то* $y_n(x)$ *при* $n\ge2$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в* $(0,l);$ *функция* $y_1(x)$ *при* $\lambda_1>\lambda_1(\delta_0)$ *не имеет нулей в* $(0,l),$ *а при* $\lambda_1\le\lambda_1(\delta_0)-$ *имеет* $m(\lambda_1)$ *простых нулей в* $(0,l);$ *b) если* $c\ne0$, *то в случае* $\lambda_n\ge\lambda_1(\delta_0)$ *функция* $y_n(x)$ *при* $n\le N_0$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, а при* $n>N_0$ *– в точности* $n-2$ *простых нулей в* $(0,l),$ *а в случае* $\lambda_n<\lambda_1(\delta_0),$ $n=1$ *либо* $n=2,$ *функция* $y_n(x)$ *имеет* $m(\lambda_n)$ *простых нулей в* $(0,l).$

В 1.4 изучается базисные свойства собственных функций задачи (1), (2.a)-(2.c), (7) в пространстве $L_2((0,l),\tau).$

Пусть $H=L_2((0,l),\tau)\oplus C-$ гильбертово пространство со

скалярным произведением

$$(\hat{y},\hat{\vartheta}) = (\{y,k\},\{\vartheta,t\}) = (y,u)_{L_{2,\tau}} + |\sigma|^{-1}\, k\bar{t},$$

где $(y,\vartheta)_{L_{2,\tau}} = \int\limits_{o}^{l} \tau(x) y(x)\, \overline{\vartheta(x)}\, dx$. Определим оператор

$$L\hat{y} = L\{y(x),k\} = \{\tau^{-1}(x)\ell_r(y)(x), dTy(l) - by(l)\}$$

на области

$$D(L) = \{\{\hat{y} = \{y(x),k\} \in H : y(x) \in W_2^4(0,l),\ \ell_r(y)(x) \in L_2(0,l),$$
$$y \in B.C.,\ k = ay(l) - cTy(l)\},$$

которая всюду плотно в H, где $B.C.-$множество функциий удовлетворяющих граничным условиям (2a)-(2c). Очевидно, что задача (1), (2.a)-(2.c), (7) сводится к следующей задаче на собственные значения

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\ \hat{y} \in D(L). \tag{8}$$

При этом собственные значения λ_n, $n \in \mathrm{N}$, задачи (1), (2.a)-(2.c), (7) и задачи (8) совпадают, а между собственными функциями имеется взаимно однозначное соответствие

$$y_n(x) \leftrightarrow \hat{y}_n = \{y_n(x),\ k_n\},\ k_n = ay_n(l) - cTy_n(l).$$

Теорема 4. *L является самасопряженным дискретным полуограниченным оператором в H. Система собственных векторов $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{y}_n = \{y_n(x),\ k_n\}$, этого оператора образует ортогональный базис в H.*

Обозначим: $\delta_n = (\hat{y}_n,\hat{y}_n) = \| y_n \|_{L_{2,\tau}}^2 + \sigma^{-1}k_n^2$, $n \in \mathrm{N}$. На основании условия $\sigma > 0$, имеем

$$\delta_n > 0 \quad \text{и} \quad k_n = ay_n(l) - cTy_n(l) \neq 0,\ n \in \mathrm{N}. \tag{9}$$

В силу (9), из теоремы 4 следует, что система $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n = \delta_n^{-1/2}\hat{y}_n$, собственных векторов задачи (8) образует ортонормированный базис в H.

Теорема 5. *Пусть $s-$произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_p((0,l),\tau)$, $1 < p < \infty$, причем в $L_2((0,l),\tau)$ этот базис является безусловным базисом. При этом система $\{u_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$, сопряженная к системе $\{y_n(x)\}_{n=1,n\neq s}^{\infty}$, определяется равенством:*

$$u_n(x) = y_n(x) - (\delta_s k_n / \delta_n k_s) y_s(x), n \in \mathrm{N}.$$

В главе II рассматриваются спектральные задачи описывающие изгибные колебания однородной балки Эйлера-Бернулли, в сечениях которой действует продольная сила, левый конец которой заделан, а на правом конце сосредоточен инерционный груз и действует следящая сила и этот конец либо упруго закреплен либо свободен. Изучаются спектральные свойства, в том числе базисные свойства в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, подсистем собственных функций этих задач.

В 2.1 дается постановка задачи. Рассмотрим балку Эйлера-Бернулли длины L с прямолинейной осью переменного, но не закрученного сечения, совершающий изгибные колебания в плоскости Oxz. Свободные изгибные колебания однородной балки, в сечениях которой действует продольная сила $\overline{Q}(X)$, описывают уравнением

$$EJ \frac{\partial^4 W(X,t)}{\partial X^4} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\overline{Q}(X) \frac{\partial W(X,t)}{\partial X}\right) + \rho F \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial t^2} = 0.$$

где J – момент инерции сечения относительно Oy, EJ – изгибная жесткость балки, $W(X,t)$ – прогиб текущей точки оси стержня, ρ – плотность балки, а F – площадь поперечного сечения балки.

Если левый конец балки заделан, а на правом конце сосредоточен груз массой m и инерцией I, то краевые условия записываются в следующем виде

$$W(0,t) = 0, \quad \frac{\partial W(0,t)}{\partial t} = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial X^2} = -I \frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial X \partial t^2},$$

$$EJ \frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial X^3} - \overline{Q}(L) \frac{\partial W(L,t)}{\partial X} = m \frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Вводим обозначения $x = X/L$ и $w = W/L$ и запишем уравнения свободных изгибных колебаний однородной балки с постоянной жесткости и краевые условия в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{\rho F L^4}{EJ} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial t} = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w(1,t)}{\partial x^2} = -\frac{IL}{EJ} \frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x \partial t^2},$$

$$\frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x^3} - Q(1)\frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = \frac{mL^3}{EJ}\ \frac{\partial^2 W(1,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $Q(x) = (L^2/EJ)\overline{Q}(Lx)$.

Обозначим $\rho FL^4\omega^2/EJ$ через λ. Тогда задача о свободных изгибных колебаниях балки заменой $w(x,t) = y(x)\cos\omega t$ сводится к следующей задаче на собственные значения

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ 0 < x < 1, \tag{10}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{11}$$

$$y''(1) - a_1\lambda y'(1) = 0, \tag{12}$$

$$Ty(1) - a_2\lambda y(1) = 0, \tag{13}$$

где $q(x) \equiv Q(x)$, $Ty \equiv y''' - qy'$, $a_1 = I/\rho FL^3$, $a_2 = -m/\rho FL$. Заметим, что выполняются условия $q(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Предположим, что функция $q(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$.

В 2.2 приводится некоторые вспомогательные факты и утверждения.

Введем краевое условие

$$y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0,\ \gamma \in [0, \pi/2]. \tag{14}$$

В работе Н.Б. Керимова и З.С.Алиева[5] доказано, что собственные значения краевой задачи (10), (11), (14), (13) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_n(\gamma)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_n(\gamma) > 0$, $n \in \mathrm{N}$; собственная функция $y_{n,\gamma}(x)$, $n \in \mathrm{N}$, соответствующая собственному значению $\lambda_n(\gamma)$, имеет в точности $n-1$ простых нулей в $(0, 1)$.

В 2.3. доказывается существование и единственность решении начально-краевой задачи (10)-(12) и изучается его основные свойства.

Теорема 6. *При каждом фиксированном $\lambda \in C$ существует единственное нетривиальное решение $y(x,\lambda)$ задачи (10)-(12) с точностью до постоянного множителя*

Замечание 1. Не нарущая общности, можно считать, что $y(x,\lambda)$ для каждого фиксированного $x \in [0, 1]$ является целой функцией от λ.

Следует отметить, что $y(x,\lambda)$ играет фундаментальную роль при исследовании спектральных свойств задачи (10)-(13).

Лемма 5. *Нули функции* $y(x,\lambda)$ *и* $y'(x,\lambda)$, *содержащихся в промежутке* $(0,1]$, *являются простыми и непрерывно дифференцируемыми функциями от* λ.

Введем функцию $H(x,\lambda)=y'(x,\lambda)/y''(x,\lambda)$. В силу теоремы 6, замечания 1 и леммы 5 функция $H(x,\lambda)$ для каждого фиксированного $x\in[0,1]$ является мероморфной функцией конечного порядка от λ.

Обозначим $K_n=(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0))$, $n=1,2,\ldots$, где $\lambda_0(0)=-\infty$.

Заметим, что функция $G(\lambda)=1/H(1,\lambda)=y''(1,\lambda)/y'(1,\lambda)$ определена для значений $\lambda\in K\equiv(C\setminus R)\bigcup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n\right)$, причем $\lambda_n(\pi/2)$ и $\lambda_n(0)$, $n\in\mathrm{N}$, $-$нули и полюсы этой функции соответственно.

Лемма 6. *Справедлива формула*

$$\frac{dG}{d\lambda}=-\frac{1}{y'^2(1,\lambda)}\left\{\int_0^1 y^2(x,\lambda)\,dx-a_2y^2(1,\lambda)\right\},\ \lambda\in K. \qquad (15)$$

Лемма 7. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to-\infty}G(\lambda)=+\infty. \qquad (16)$$

Имеет место следующая теорема типа сравнения.

Лемма 8. *Пусть* $0<\xi<\eta$. *Если* $y'(x,\xi)$ *имеет* m *нулей в интервале* $(0,1)$, *то* $y'(x,\eta)$ *имеет не меньше* m *нулей в* $(0,1)$.

Через $\tau(\lambda)$ и $s(\lambda)$ обозначим число нулей, содержащихся в интервале $(0,1)$, функции $y(x,\lambda)$ и $y'(x,\lambda)$, соответственно.

Теорема 7. *Функции* $y(x,\lambda)$ *и* $y'(x,\lambda)$ *обладают следующими осцилляционными свойствами: если* $\lambda\in(0,\lambda_1(0)]$, *то* $\tau(\lambda)=s(\lambda)=0$, *если* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(\pi/2))$ *и* $n\geq 2$, *то либо* $\tau(\lambda)=n-2$, *либо* $\tau(\lambda)=n-1$, *а если* $\lambda\in[\lambda_n(\pi/2),\lambda_n(0)]$ *и* $n\geq 2$, *то* $\tau(\lambda)=n-1$, *если* $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(0)]$ *и* $n\geq 2$, *то* $s(\lambda)=n-1$.

Замечание 2. Если $\lambda\in(\lambda_{n-1}(0),\lambda_n(\pi/2))$ и достаточно близко к $\lambda_{n-1}(0)$, то $\tau(\lambda)=n-2$, а если λ достаточно близко к $\lambda_n(\pi/2)$, то $\tau(\lambda)=n-1$.

В 2.4 изучаются структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных функций задачи (10)-(13).

Замечание 3. Если $\lambda -$ собственное значение задачи (10)-(13), то $y'(1,\lambda) \neq 0.$

Теорема 8. *Собственные значения спектральной задачи (10)-(13) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такую, что* $\lambda_n > 0,$ $n \in \mathrm{N}.$ *Кроме того, (i) собственная функция* $y_n(x),$ *соответствующая собственному значению* $\lambda_n,$ *при* $n=1$ *не имеет нулей, а при* $n \geq 2$ *имеет либо* $n-2,$ *либо* $n-1$ *простых нулей в* $(0,1);$ *(ii) функция* $y_n'(x),$ $n \in \mathrm{N},$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в* $(0,1).$

Теорема 9. *Справедливы асимптотические формулы:*

$$\sqrt{\lambda_n} = (n-3/2)\,\pi + O(1/n), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = \sin(n-3/2)\pi x - \cos(n-3/2)\pi x + e^{-(n-3/2)\pi x} + \\ + (-1)^n e^{-(n-3/2)\pi(1-x)} + O(1/n), \end{aligned} \tag{18}$$

причем соотношение (18) выполняется равномерно по $x \in [0,1].$

В 2.5 изучается базисные свойства в пространстве $L_p(0,1), 1 < p < \infty,$ подсистем собственных функций краевой задачи (10)-(13). Эта задача сводится к спектральной задаче для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus C^2$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{\vartheta}) = (\{y, m, k\}, \{\vartheta, s, t\}) = (u, \vartheta)_{L_2} + |a_1|^{-1} m\bar{s} + |a_2|^{-1} k\bar{t}, \tag{19}$$

где $L\hat{y} = L\{y, m, k\} = \{(Ty)'(x), y''(1), Ty(1)\}$ определен на области

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x), m, k\} \in H : y(x) \in W_2^4(0,1), (Ty)'(x) \in L_2(0,1),$$
$$y(0) = y'(0) = 0, m = a_1 y'(1), k = a_2 y(1)\},$$

которая всюду плотно в H. Заметим, что оператор L определен в H корректно. При этом спектральная задача (10)-(13) принимает вид

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y}, \ \hat{y} \in D(L).$$

Теорема 10. L *является самасопряженным дискретным полуограниченным оператором в* H. *Система собственных векторов* $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty},$ $\hat{y}_n = \{y_n(x), m_n, k_n\},$ $m_n = a_1 y_n'(1),$ $k_n = a_2 y_n(1),$ *этого оператора образует ортогональный базис в* H .

Обозначим: $\delta_n = (\hat{y}_n, \hat{y}_n).$ В силу замечания 3 из (19) получим

$$\delta_n = \| y_n \|_{L_2}^2 + a_1 y'^2(1) - a_2 y^2(1) > 0. \tag{20}$$

Тогда, в силу теоремы 10, система $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n = \delta_n^{-1/2}\hat{y}_n$, образует ортонормированный базис (базис Рисса) в H.

Пусть r, l $(r \neq l)$ – произвольные фиксированные натуральные числа и

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} y_r'(1) & y_l'(1) \\ y_r(1) & y_l(1) \end{vmatrix}. \qquad (21)$$

Теорема 11. *Пусть* $\Delta_{r,l} \neq 0$. *Тогда система* $\{y_n(x)\}_{n=1, n\neq r,l}^{\infty}$ *собственных функций задачи (10)-(13) образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *причем этот базис является безусловным базисом при* $p = 2$. *Пусть теперь* $\Delta_{r,l} = 0$. *Тогда система* $\{y_n(x)\}_{n=1, n\neq r,l}^{\infty}$ *неполна и не минимальна в* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Замечание 4. В силу теоремы 8 и замечания 2 для каждого $n \in \mathrm{N}$ и для любого малого $\delta > 0$ имеют место соотношения

$$\tau(\lambda) = n-1 \text{ при } \lambda \in (\lambda_n(0), \lambda_n(0)+\delta),$$
$$\tau(\lambda) = n \text{ при } \lambda \in (\lambda_{n+1}(\pi/2)-\delta, \lambda_{n+1}(0)).$$

Заметим, что для каждого натурального n существует единственное $\eta_n \in (\lambda_{n+1}(0), \lambda_{n+1}(\pi/2))$ такое, что $y(1,\eta_n) = 0$. Тогда, в силу последних двух соотношений, получим $\tau(\lambda) = n-1$ при $\lambda \in (\lambda_n(0), \eta_n]$, $\tau(\lambda) = n$ при $\lambda \in (\eta_n, \lambda_{n+1}(0))$. Имеет место также асимптотическая формула

$$\sqrt[4]{\eta_n} = n\pi + O(1/n). \qquad (22)$$

Замечание 5. В силу асимптотик (17) и (22) для каждого a_1 существует натуральное число $n^{(1)} = n_{a_1} \geq 2$ такое, что при $n \geq n^{(1)}$ имеем $\lambda_{n-1}(0) < \lambda_n < \eta_{n-1} < \lambda_n(\pi/2)$. Тогда $\tau(\lambda) = n-2$ при $n \geq n^{(1)}$. Из лемм 5, 6 и формулы (17) следует, что при возрастании a_1 число $n^{(1)}$ убывает. Следовательно, существует число $a_1^{(1)} > 0$ такое, что $n^{(1)} = 2$ при $a_1 > a_1^{(1)}$.

Замечание 6. Пусть $r \geq 2$ и число $a_{1,r} > 0$ такое, что $a_{1,r}\eta_{r-1} = G(\eta_{r-1})$. Тогда $\lambda_r = \eta_{r-1}$ при $a_1 = a_{1,r}$. Следовательно, в силу леммы 6 при $a_1 < a_{1,r}$ имеем $\lambda_{r-1}(0) < \eta_{r-1} < \lambda_r < \lambda_r(\pi/2)$. Тогда $r < n^{(1)}$

при $a_1 \le a_{1,r}$.

Теорема 12. *Если* $r=1, l \ge n^{(1)}$ *либо* $r \ge 2,\ a_1 \le a_{1,r},\ \ l \ge n^{(1)}$, *то система* $\{y_n(x)\}_{n=1,n\ne r,l}^{\infty}$ *образует базис в* $L_p(0,1),\ 1<p<\infty,$ *причем этот базис является безусловным базисом при* $p=2.$

В 2.6 изучаются свойства собственных значений и собственных функций спектральной задачи

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))'=\lambda y(x),\ 0<x<1, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0, \\ y''(1)-(a_1\lambda+b_1)y'(1)=0,\ Ty(1)-a_2\lambda y(1)=0, \end{gathered} \tag{23}$$

где $b_1 \ne 0.$ При $b_1<0$ эта задача описывает изгибные колебания однородного стержня с постоянной жесткости, в сечениях которой действует продольная сила, левый конец которой заделан, а правый конец упруго закреплен и на этом конце действует следящая сила и сосредоточен инерционный груз.

Лемма 9. *При изменении* $\lambda \le 0$ *функции* $y(x,\lambda)$ *и* $y'(x,\lambda)$ *только тогда могут потерять нули или приобрести новые, если они войдут внутрь интервала* $(0,1)$ *или выйдет оттуда через краевую точку* $x=0.$

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\begin{gathered} \ell(y)(x)=\lambda y(x),\ 0<x<1, \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=Ty(1)-a_2\lambda y(1)=0. \end{gathered} \tag{24}$$

Лемма 10. *Существует* $\zeta<0$ *такое, что все вещественные собственные значения* $\mu_n,\ n=1,2,\ldots,$ *краевой задачи (24) являются простыми, лежат на луче* $(-\infty,\zeta),$ *образуют неограниченно убывающую проследовательность, имеют индекс осцилляции* 1 *и допускают асимптотику* $\mu_n=-4\left(n\pi+\pi/2\right)^4+o(n^4).$

Пусть $\lambda<0$ и $i(\mu_n)-$индекс осцилляции собственного значения $\mu_n,\ n\in\mathrm{N},$ задачи (24). Тогда имеет место

$$s(\lambda)=\tau(\lambda)=\sum_{\mu_n\in(\lambda,0)} i(\mu_n). \tag{25}$$

Определим $N_1\in\mathrm{N}$ из неравентсва

$$\lambda_{N_1-1}(\pi/2)<-b_1/a_1\le\lambda_{N_1}(\pi/2).$$

Теорема 13. *Собственные значения задачи (23) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такую, что* $\lambda_n > 0$ *при* $n \geq 2$. *Соответствующие им собственные функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots,$ $y_n(x), \ldots$ *и их производные обладают следующими осцилляционными свойствами: i) если* $N_1 = 1$, *то функции* $y_1(x)$ *и* $y_1'(x)$ *не имеют нулей в случае* $\lambda_1 \geq 0$, *имеют* $\sum_{\mu_n \in (\lambda_1, 0)} i(\mu_n)$ *простых нулей в случае* $\lambda_1 < 0$, *функция* $y_n(x)$ *при* $n \geq 2$ *имеет либо* $n-2$, *либо* $n-1$ *простых нулей, а функция* $y_n'(x)$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в* $(0,1)$; *ii) если* $N_1 > 1$, *то функция* $y_n(x)$ *при* $n < N_1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, при* $n \geq N_1$ *имеет либо* $n-2$, *либо* $n-1$ *простых нулей, а функция* $y_n'(x)$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в* $(0,1)$.

Заметим, что задача (23) сводится к задаче на собственные значения для самосопряженного оператора $\tilde{L}$ в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus C^2$ со скалярным произведением (19), где оператор $\tilde{L}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{L}\hat{y} = L\{y, m, k\} = \{\ (Ty)'(x), y''(1) - b_1 y'(1),\ Ty(1)\},$$

$$D(\tilde{L}) = \{\hat{y} = \{y(x), m, k\} \in H\ :\ y(x) \in W_2^4(0,1),\ (Ty)'(x) \in L_2(0,1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0,\ m = a_1 y'(1),\ k = a_2 y(1)\}.$$

Замечание 7. Из (17) следует, что существует натуральное число $\tilde{n} \geq 2$ такое, что при $n \geq \tilde{n}$ функция $y_n(x)$ имеет ровно $n-2$ простых нулей в интервале $(0,1)$. Очевидно, что $\tilde{n} > N_1$.

Теорема 14. *Пусть* $r, l\ (r \neq l)$ – *произвольные фиксированные натуральные числа. Если* $b_1 < 0$, $N_1 > 1$, $r < N_1$ *и* $l \geq \tilde{n}$, *либо* $b_1 > 0$, $r = 1$ *и* $l \geq \hat{n}$, *то система* $\{y_n(x)\}_{n=1, n \neq r, l}^{\infty}$ *образует базис в* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ *(безусловный базис при* $p = 2$).

В 2.7 исследуется спектральные свойства задачи (10)-(13) при $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. В этом случае L является замкнутым, несамосопряженным оператором в H с компактной резольвентой.

Определим оператор $J : H \to H$ следующим образом:

$$J\{y, m, k\} = \{y, -m, k\}.$$

Лемма 11. *Оператор J является унитарным и симметричным в H со спектром состоящим из двух собственных значений: -1 с кратностью 1 и $+1$ с бесконечной кратностью.*

В силу леммы 11 оператор J порождает пространство Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0,1) \oplus C^2$ с внутренним произведением

$$[\hat{y}, \hat{\vartheta}] = (\hat{y}, \hat{\vartheta})_{\Pi_1} = (\{y, m, k\}, \{\vartheta, s, t\})_{\Pi_1} = (y, \vartheta)_{L_2^r} + a^{-1} m\bar{s} - a_2^{-1} k\bar{t}. \quad (26)$$

Теорема 15. *Оператор L является J – самосопряженным в Π_1. Система корневых векторов оператора L (после нормировки) образует базис Рисса в H.*

Теорема 16. *Пусть $a_1 < 0$ и $a_2 < 0$. Тогда все собственные значения краевой задачи (10)-(13) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_n > 0$, $n \geq 2$. Соответствующие им собственные функции $y_n(x)$, $n \in \mathrm{N}$, и их производные обладают следующими осцилляционными свойствами: функции $y_n(x)$ и $y_n'(x)$ при $n \geq 3$ имеют в точности $n-2$ простых нулей, при $n = 2$ не имеют нулей, а при $n = 1$ имеют в точности $\sum_{\mu_n \in (\lambda_1, 0)} i(\mu_n)$ простых нулей в интервале $(0,1)$.*

Лемма 12. *Пусть $\{\hat{\vartheta}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_n = \{\vartheta_n, s_n, t_n\}$, является системой сопряженной к системе $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $\hat{\vartheta}_n = \delta_n^{-1} \hat{y}_n$, $n \in \mathrm{N}$.*

Теорема 17. *Пусть r, l $(r \neq l)$ – произвольные фиксированные натуральные числа. Если $\Delta_{r,l} \neq 0$, то система $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных функций задачи (10)-(13) при $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причем этот базис является безусловным базисом при $p = 2$, а если $\Delta_{r,l} = 0$, то эта система неполна и не минимальна в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.*

Заключение

В диссертационной работе рассматриваются регулярные и вполне регулярные системы Штурма со спектральным параметром в граничных условиях. Тема исследований актуальна, поскольку

рассматриваемые задачи встречаются при изучении различных процессов механики и физики.

В диссертации получены следующие основные результаты: для вполне регулярных систем Штурма при наличии потенциала

– изучены структура корневых подпространств и осцилляционные свойства всех собственных функций;

для регулярных систем Штурма при наличии потенциала и со спектральным параметром в одном из граничных условий

– найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси;

– полностью изучены осцилляционные свойства собственных функций;

– доказана базисность системы собственных функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty,$ после удаления любой произвольной функции,

для вполне регулярных систем Штурма со спектральным параметром в двух из граничных условий

– изучено расположение собственных значений на вещественной оси;

– полностью исследованы осцилляционные свойства собственных функций и их производных;

– получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций;

– установлены достаточные условия для базисности систем корневых функций в пространстве $L_p, 1 < p < \infty,$ после удаления двух функции.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Алиев, З.С., Гулиева, С.Б. Осцилляционные свойства собственных функций уравнения поперечных колебаний стержня, подвергаемого действию осевым силам // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» посвященной 55-летному юбилею Института Математики и Механики НАН Азербайджана, – Баку: – 2014, – с. 38-40.

2. Алиев, З.С., Гулиева, С.Б. Некоторые спектральные свойства одной вибрационной краевой задачи со спектральным параметром в граничном условии // Материалы Международной конференции «Сферы приложения математики и ИКТ. Новые технологии обучения», I часть, – Гянджа: – 2014, – с. 112-115.
3. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B. Oscillation properties of eigenfunctions of a vibrational boundary value problem // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., mathematics, – 2014. v. 34, no. 4, – p. 29–36.
4. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B. Spectral properties for the equation of vibrating beam // – Baku: Proceedincs of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2015, v. 41, no. 1, – p. 135–145.
5. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Some spectral properties of an eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // The Abstract of International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, – Antalya: – 05-07 November, – 2015, – p. 112.
6. Гулиева С.Б. Некоторые спектральные свойства одной краевой задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничных условиях // Материалы I Международной научной конференции молодых ученых, т. I, – Гянджа: – 2016, – с. 341.
7. Guliyeva, S.B. Basis properties of the system of eigenfunctions of a fourth order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // – Baku: Transactions NAS Azerbaijan, ser. phys.–tech. math. sci., iss. math., – 2017. v. 37, no. 4, – p. 42–48.
8. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load // Journal of Differential Equations, – 2017. v. 263, no. 9, – p. 5830–5845.
9. Aliyev, Z.S., Guliyeva, S.B., Spectral properties of a fourth order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // Filomat, – 2018. v. 32, no. 7, – p. 2421-2431.
10. Рзаев, О.Г., Гулиева, С.Б. О краевой задаче описывающей изгибные колебания стержня, на одном конце которого действует следящая сила и сосредоточен инерционный груз \\ Баку: Известия Педагогического Университета, серия математических и естественных наук, – 2018. т. 66, № 2, – с. 95–102.
11. Guliyeva, S.B. The properties of the eigenvalues and eigenfunctions of a vibration boundary value problem // – Baku: Caspian Journal of

Applied mathematics, Ecology, and Economics, – 2019. v. 7, no. 1, – p. 25-31.
12. Гулиева, С.Б. Спектральные свойства краевой задачи, описывающей изгибные колебания однородного стержня, на одном из концов которого сосредоточена инерционная нагрузка и действует следящая сила // Материалы Международной конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”, – Воронеж: Россия, – 2021, – с. 97–98.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям профессорам Зиятхану Алиеву и Оруджали Гусейнову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Защита диссертации состоится **10 декабря 2021 года в 14^{00} часов** на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам ____ _____ 2021 года

Подписано в печать:

Формат бумаги: 60х84 1/16

Объём: 40000

Тираж: 70