AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

İKİNCİ TƏRTİB CIRLAŞAN ELLİPTİK VƏ PARABOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN KEYFİYYƏT XASSƏLƏRİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Sarvan Təhməz oğlu Hüseynov**

Elmlər doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2021

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Ali riyaziyyat” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Tahir Sədi oğlu Hacıyev

riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Mahir Mirzəxan oğlu Səbzəliyev

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

Varqa Kazım oğlu Kələntərov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA–nın müxbir üzvü, f-r.e.d., professor

_________________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: f-r.e.n.

_______________**Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA–nın həqiqi üzvü, f-r.e.d., professor

_________________ **Yusif Əbülfət oğlu Məmmədov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Dissertasiya işi ikinci tərtib cırlaşan elliptik və parabolik tənliklərin həllərinin keyfiyyət xassələrinə həsr olunmuşdur. Dissertasiyada müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent elliptik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsi, həllin Hölder kəsilməzliyi, hamar funksiyaların çəkili Sobolev fəzasında sıxlığı, Makenhaupt çəkili $p-$Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi, oblastın bir hissəsində cırlaşan $p-$Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi araşdırılmışdır. Həmçinin oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan $(p,q)-$Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi öyrənilmişdir. Dissertasiyada eyni zamanda qeyri-müntəzəm cırlaşan elliptik və parabolik tənliklər üçün Dirixle məsələsi tədqiq olunur. Qeyri-müntəzəm cırlaşan parabolik tənliklərin həlli üçün Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi öyrənilir.

Cırlaşan elliptik tənliklər üçün sərhəd məsələləri xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas tətbiqi bölmələrindən biridir.

Qeyd edək ki, cırlaşan elliptik tənliklər üçün kifayət qədər məqalələr çap olunmuşdur. İkinci tərtib cırlaşan elliptik tənliklər üçün, ən birincilərdən M.V.Keldışın (1951) məqaləsini qeyd etmək olar. Həmin işdə ilk dəfə olaraq oblastın sərhəddinin xarakteristik hissəsi sərhəd şərtinnən azad olunaraq həllin məhdudluğu ilə əvəz olunur. Daha sonra A.V. Bitsadze öz işində məhdudluq şərtinin bəzi çəki funksiyası ilə əvəz edilə biləcəyini göstərmişdir.

Cırlaşan elliptik tənliklər fırlanma səthlərinin kiçik əyilməsi, örtüklər nəzəriyyəsində və.s.məsələlərində rast gəlinir. Bu cür tənliklər qaz dinamikasında mühüm rol oynayır. Belə tənliklər diffuziya və dissipasiya ilə əlaqəli prosesləri modelləşdirir. Cırlaşan elliptik tənliklərin öyrənilməsinə dair fundamental işlər Trikomi Holmqren, Qellerşted, Frankl, Germain, Bitsadze, Babenko, Keldış, Vişik, Kudryavtsev, Fikera və Vekuaya aiddir. Feybs, Keniq və

Serapioninin işində cırlaşan divergent formalı xətti elliptik tənliklərin zəif həllərinin lokal requlyarlığı öyrənilmişdir.

Ümumi çəkili qeyri-müntəzəm divergent elliptik tənliklərin öyrənilməsi S.N.Krujkov və N.Trudinqerin əsərləri ilə başlamışdır. Xətti elliptik tənliklər üçün kifayət qədər inkişaf etmiş nəzəriyyə ilə yanaşı, Şauder və Kaççiopollinin işləri hesabına hazırda kvazixətti tənliklər üçün də mühüm nəticələr var.

Qeyri-stasionar halda bu nəzəriyyə V.A.Solonnikovun əsərlərində inkişaf etdirilmişdir. Bu nəticələr bir sıra kitablarda məsələn, M.Miranda, D.Qilbarq və N.Trudinqer, C.Morri və başqalarında ətraflı təsvir edilmişdir. Energetik metodun inkişafı Sobolev fəzaları aparatının inkişafı ilə sıx bağlıdır. Tamamıilə fərqli metodlarla ikinci tərtib xətti divergent parabolik tənliklərin həllinin Hölder kəsilməzliyi isbat olundu və bunlardan elliptik tənliklərin həlli üçün qiymətləndirmələr alındı. 1964-cü ildə parabolik tənliklər üçün J.Mozerin məhşur isbatı Harnak bərabərsizliyinin divergent parabolik tənliklərin həlli üçün tamamilə yeni bir yanaşma idi. Qeyd edək ki, Harnak bərabərsizliyindən həllərin Hölder kəsilməzliyi və güclü maksimum prinsipi asanlıqla alınır.

Zəif həllər üçün Harnak bərabərsizliyi Serrin və Trudinqer tərəfindən divergent formalı kvazixətti tənliklərə ümumiləşdirilmişdir. E.M.Landis elliptik tənliklər üçün De.Georgi teoreminin yeni isbat metodunu vermişdir. Sonralar məlum oldu ki,həllərin Hölder mənada kəsilməzliyi barəsindəki nəticə yüksək tərtibli tənliklərə, ümumiyyətlə desək şamil olunmur (1968-ci ildə bir-birindən asılı olmayaraq B.Q.Mazya, De.Georgi, E.Juisti və K.Miranda misal qurdular ki De.Georginin nəticəsi, hətta məhdudluq belə yüksək tərtibli tənliklər və tənliklər sistemi üçün təkcə müntəzəm elliptiklik şərti daxilində mövcud olmur). Amma yenə də Hölder normasının mövcud olduğu bir sinif yüksək tərtibli elliptik tənliklərin (və onların kvazixətti analoqlarını), İ.V.Skrıpnikin işində görmək olar. Yüksək tərtib elliptik tənliklər üçün Hölder bərabərsizliyi $n = 2l$ şərtində isbat edilmişdir. Kvazielliptik tənliklər üçün oxşar nəticə R.V.Hüseynov tərəfindən əldə edilmişdir. De.Georgi və J.Mozer tərəfindən irəli sürülən metodlar E.Juisti, G.Stampakkya, O.A.Ladıjenskaya, N.N.Uraltseva, C.Serrin, N.Trudinqer, S.N.Krujkov, Ə.Ə.Novruzov, Y.A.Alxutov, İ.T.Məmmədov, F.İ.Məmmədov və bir çox digər müəlliflər tərəfindən geniş inkişaf etdirilmişdir. O.A.Ladıgenskaya və N.N.Uraltsevanın monoqrafiya-sında kiçik hədləri də daxil olmaqla ,xətti və kvazixətti elliptik tənliklər, o cümlədən elliptik tip p-Laplas tənlikləri üçün kifayət qədər tam bir nəzəriyyə quruldu. Xətti parabolik tənliklər üçün (və qeyri-xətti,baş hissəsi xətti və koersitivlik tərtibi olması şərti ilə) oxşar bir nəzəriyyə O.A.Ladıgenskaya və N.N.Uraltseva və B.A.Solonnikovun monoqrafiyasında verilmişdir.

1982-ci ildə E.Feybs, C.Keniq və R.Serapioninin [1] xətti divergent elliptik tənliklərin həllinin requlyarlığına həsr olunmuş məşhur məqaləsi çap olundu. Burada fərz olunur ki, $\{a_{ij}(x)\}-$ matrisi müntəzəm elliptiklik şərtini və $\omega(x)-$ çəki funksiyası A_2-Maken-haupt şərtini ödəyir. Elə həmin ildə E.Feybs, D.S.Jerison, C.Keniqin[2] bir məqaləsi çap olundu. Bu məqalədə həmin tənlik üçün sərhəd nöqtəsinin requlyarlığı üçün Viner meyarı isbat olunmuşdur. Bu işlə əlaqədar olaraq, çəki funksiyası Makenhaupt sinfindən olduqda 1984-cü ildə F.Siarenza və Fraska, F.Siarenza və R.Serapioninin 1984-1987-ci illərdə xətti parabolik tənliklər üçün işlərini qeyd etmək olar.

Parabolik halda çəkili tənliyin xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, həllin baxılması lazım olan fəza-zaman miqyası çəkinin qiymətini dəyişməsinə uyğun olaraq nöqtədən nöqtəyə dəyişir. İstifadə olunan üsulla, əsasən, evklid fəzasında analiz zamanı istifadə olunan üsullara oxşardır və çətinlik Fridrixs, Sobolev, Puankare tipli lazımlı bərabərsizliklərin alınmasından ibarətdir. Bu çəkili tənliklərə də aiddir.

[1] Fabes, E., Kenig, K., Serapioni, R. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. -1982. v.7, -c. 77-116.

[2] Fabes, E.B. Jerison, D.S., Kenig, C.E. , The Wiener test for degenerate elliptic equations// Annals de l’institut Fourier. -1982, v.32, no 3. –c.151-182.

Oblast hipermüstəvi ilə iki hissəyə bölündükdə və oblastın hər bir hissəsində çəki Makenhaupt olduqda, elliptik tənliklərin həllərinin requlyarlıq xassələrinin analiz texnikası Y.A.Alxutov və V.V.Jikov tərəfindən işlənib hazırlanmışdır. Həllərin Hölder kəsilməzliyi alınmış və adi formada ümümiyyətlə Harnak bərabərsizliyinin doğru olmadığı göstərilmişdir.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti diferensial tənliklərin həllərinin keyfiyyət xassələrinin öyrənilməsi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifəsi oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan elliptik tip p-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyinin və Harnak bərabərsizliyinin öyrənilməsidir. Lavrentiev effektinin olduğu təqdirdə xətti cırlaşan elliptik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyinin tədqiqi. Xüsusi Makenhaupt çəkili p-Laplas üçün klassik Harnak bərabərsizliyinin olmaması. Belə tənliyə uyğun Harnak bərabərsizliyinin tapılması.

Qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib xətti divergent elliptik və parabolik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin birqiymətli həll olunmasının isbatı. Belə tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyinin və Harnak bərabərsizliyinin isbatı.

Tədqiqat metodları. İşdə diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin, funksional fəzalar nəzəriyyəsinin, daxilolma teoremləri və funksional analizin üsullarından istifadə olunmuşdur. Əsas tədqiqat vasitəsi Mozerin iterativ, De.Giorgi və Ladıjenskaya-Uraltseva metodudur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

1. Faza sərhədləri koordinat xətləri olduqda və müstəvidə dörd fazalı halda, hər bir fazada çəki qüvvət funksiyası olduqda, ikinci tərtib divergent formalı xətti elliptik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyi.
2. Fazanın sərhəddi hipermüstəvi olduqda Makenhaupt çəkili p-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi.

3.Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan p-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi.
4. Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan Makenhaupt çəkili p-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyi.
5. Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan dəyişən göstəricisi p-olan p(x)-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyi.
6. Fazanın sərhəddi hipermüstəvi olduqda ,fazanın hər hansı birində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan , iki fazada göstəricisi hissə-hissə sabit p(x) olan p(x)-Laplas tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi.
7. Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə malik, ikinci tərtib divergent müntəzəm elliptik operatorlar üçün Dirixle məsələsinin məxsusi funksiyalarının modulunun maksimumunun qiymətləndirilməsi.
8. Kiçik hədləri olan, qeyri-müntəzəm cırlaşan divergent formalı ikinci tərtib elliptik tənliklər sinfi üçün Dirixle məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi.
9. Qeyri-müntəzəm cırlaşan yeni sinif ikinci tərtib divergent parabolik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi, həllərin Hölder kəsilməzliyi və Harnak bərabərsizliyi.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:
1. Xüsusi Makenhaupt çəkili xətti elliptik tənliklər öyrənilir. Bu tənliklər üçün Dirixle məsələsinin birqiyməti həll olunması və Hölder mənada kəsilməzliyi isbat olunur.
2. Xüsusi Makenhaupt çəkili qeyri-xətti $p-$Laplas tənliyinə baxılır. Bu tənliyin həlli üçün Hölder mənada kəsilməzlik və Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.
3. Oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan qeyri-xətti $p(x)-$ Laplas tənliyi öyrənilir və həllin Hölder kəsilməzliyi isbat olunur.
4. Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan xətti və qeyri-xətti elliptik tənliklərə baxılır. Oblastın bir hissəsində

müntəzəm cırlaşan elliptik tənliyin həllinin Hölder kəsilməzliyi, oblastın bir hissəsində cırlaşan Makenhaupt çəkili $p-$ Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi, Harnak bərabərsizliyi, oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan $(p,q)-$ Laplas tənliyinin həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunmuşdur.
5. Qeyri-müntəzəm cırlaşan xətti elliptik tənliklər öyrənilir. Bir sinif qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin həll olunması isbat olunmuşdur.
6. İkinci tərtib qeyri-müntəzəm cırlaşan elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həlli üçün kəsilməzlik modulu öyrənilir.
7. Oblastın bir hissəsində böyük parametrə malik olan elliptik tənliklər üçün məxsusi funksiyaların modulunun müntəzəm qiymətləndirilməsi öyrənilir.
8. İkinci tərtib qeyri-müntəzəm cırlaşan divergent parabolik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin çəkili Sobolev fəzasında zəif həll olunması isbat edilir.
9. Qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklərin həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.
10. Qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyi göstərilir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiyada alınmış nəticələr yenidir. İş xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsində müəyyən bir boşluğu doldurmaqla, nəzəri xarakter daşıyır. Bu nəticələr cırlaşan elliptik və parabolik tənliklərin həllərinin keyfiyyət xassələrinə tətbiq oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun ümuminstitut seminarında, “Riyazi fizika tənlikləri” (AMEA–nın müxbir üzvü, prof. R.V.Hüseynov), “Diferensial tənliklər” (prof. Ə.Əliyev), “Qeyri-hormonik analiz” (AMEA–nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov) və “Riyazi analiz” (AMEA–nın müxbir üzvü, prof. V.S.Quliyev) şöbələrinin seminarlarında, eləcədə Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi fizika tənlikləri” (akad. Y.Ə.Məmmədov), “Diferensial və inteqral tənliklər” kafedralarının (prof.

N.Ş.İsgəndərov) və Tətbiqi Riyaziyyat Elmi Tədqiqat İnstitutunun elmi seminarlarında məruzə edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri A.Q. və H.Q. Stoletovlar adına Vladimir Dövlət Universitetində V.V.Jikov və Y.A.Alxutovun rəhbərlik etdiyi seminarda, həmçinin aşağıdakı elmi konfranslarda məruzə edilmişdir: Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 45 illiyinə həsr olunmuş X-cu Beynəlxalq konfransda (Bakı, 2004), AMEA-nın müxbir üzvü, prof. İ.T.Məmmədovun 50 illiyinə həsr olunmuş respublika konfransında (Bakı, 2005), prof. Y.C.Məmmədovun 75 – illiyinə həsr olunmuş respublika konfransında (Bakı, 2006), akad. A.C.Hacıyevin 70-illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2007), Azərbaycan xalqının ümummilli lideri H.Ə.Əliyevin 85–illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın aktual problemləri" adlı respublika konfransında (Bakı, 2008), REA-nın müxbir üzvü, prof. L.D. Kudryavtsevin 85-illiyinə həsr olunmuş 3-cü beynəlxalq konfransda (Moskva, 2008), akad. F.Q.Maqsudovun 80-illik yubileyinə həsr olunmuş "Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2010), akad. Z.İ.Xəlilovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2011), akad. İ.İ.İbrahimovun 100-illik yubileyinə həsr olunmuş "Funksiyalar nəzəriyyəsi və harmonik analizin problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı, 2012), Heydər Əliyevin 90-illiyinə həsr olunmuş respublika konfransında (Bakı, 2013), Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 55-illiyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransda (Bakı, 2014), "Diferensial tənliklər və dinamik sistemlər" adlı beynəlxalq konfranslarda (Suzdal, 2010, 2016, 2018), "Optimallaşdırma və onun sənaye tətbiqlərinə həsr olunmuş 6-cı" beynəlxalq konfransın əsərlərində (Bakı, 2018).

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqatın məqsədini göstərməkdən və istiqamətinin seçilməsindən ibarətdir. Bundan əlavə, alınan bütün nəticələr və tədqiqat üsulları şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 24 məqalə, 1 konfrans materialı və 23 tezis nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetrildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Ali riyaziyyat" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 489300 işarədir (titul səhifəsi – 288 işarə, mündəricat – 2853 işarə, giriş – 81500 işarə, birinci fəsil – 134000 işarə, ikinci fəsil – 136800 işarə, üçüncü fəsil – 42000 işarə, dördüncü fəsil – 95000 işarə). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 154 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya girişdən, dörd fəsildən və istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə tədqiqat mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış və işlən-mə dərəcəsi göstərilmişdir, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri qeyd olunmuşdur, elmi yeniliyi verilmişdir, tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti göstərilmişdir və həmçinin işin aprobasiyası haqqında məlumat verilmişdir.

Birinci fəsildə Makenhaupt çəkili xətti və qeyri-xətti p-Laplas tənliyinin həllərinin keyfiyyət xassələri öyrənilmişdir. Bu fəslin əsas nəticələri müəllifin [11, 12, 13, 14, 15, 18, 37, 44] işlərində nəşr olunmuşdur.

1.1-də hamar funksiyalar çoxluğu sıx olmayan, çəkili $W-$ Sobolev fəzasında müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib model ellip--tik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin həll olunması tədqiq olunur. W və $H-$ həlləri anlayışı verilir və W və $H-$ Dirixle məsələləri--nin birqiymətli həll olunması isbat olunur.

Mərkəzi koordinat başlanğıcında radiusu vahidə bərabər olan $B\subset R^2$ dairədə cırlaşan

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0, \tag{1}$$

elliptik tənliyinə baxaq.

Burada, $\omega(x)$ çəki funksiyasıdır

$$\omega(x)=\begin{cases}|x|^{-\alpha_1}, \; x_1>0, \; x_2>0; \\ |x|^{\beta_1}, \; x_1<0, \; x_2>0; \\ |x|^{-\alpha_2}, \; x_1<0, \; x_2<0; \\ |x|^{\beta_2}, \; x_1>0, \; x_2<0, \end{cases} \tag{2}$$

$0<\alpha_i<2, \; 0<\beta_i<2, \; i=1,2$ tənliyi ilə əlaqədar $W(B,\omega)$ funksiyalar sinfini daxil edək:

$$W(B,\omega)=\{u: u\in W_1^1(B), \; (u^2+|\nabla u|^2)\omega\in L_1(B)\} \tag{3}$$

Burada, $W_1^1(B)$ -klassik sobolev fəzasıdır. Yəni birinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi olan və B-də cəmlənən funksiyalardır. $W(B,\omega)$ çəkili Sobolev fəzasında norma

$$\|u\|_W^2=\int_B (u^2+|\nabla u|^2)\omega dx$$

kimi təyin olunur. $\omega^{-1}\in L_1(B)$ olduqda, $W(B,\omega)$ fəzası tam fəzadır. Kompakt daşıyıcısı B-də və $W(B,\omega)$ -dən olan funksiyaların qapanmasından alınan fəzanı $W_0(B,\omega)$ ilə işarə edək. Yuxarıda baxılan çəki müstəvidə , hər bir dörd rübdə A_2-Makenhaupt şərtini ödəyir və onun üçün belə bir Fridrixs bərabərsizliyi doğrudur

$$\int_B u^2\omega dx\le C\int_B |\nabla u|^2\omega dx \quad \forall u\in W_0(B,\omega). \tag{4}$$

Ona görə də $W_0(B,\omega)$ Sobolev fəzasında normanı belə

$$\|u\|_{W_0}^2=\int_B |\nabla u|^2\omega dx$$

vermək olar. (1) tənliyinin həlli anlayışını verək.

Tərif 1. $u\in W(B,\omega)$ funksiyası (1) tənliyinin W -həlli adlanır,əgər ixtiyari $\psi\in W_0(B,\omega)$ funksiyası üçün

$$\int_B \nabla u\nabla\psi\omega dx=0 \tag{5}$$

inteqral eyniliyi ödənsin.

B-də hamar funksiyalar çoxluğu, $W(B,\omega)$ və $W_0(B,\omega)$ fəzalarında sıx deyil. Bunun isbatı (2) şəklində olan çəki funksiyası üçün $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ olduqda V.V. Jikova məxsusdur.

Yuxarıda deyilənlə əlaqədar olaraq fərz edək ki, $H(B,\omega)$ və $H_0(B,\omega)$ fəzaları uyğun olaraq $C^\infty(B) \cap W(B,\omega)$ və $C_0^\infty(B)$-dan olan funksiyaların $W(B,\omega)$ normasında qapanmasından alınan fəzalardır.

Tərif 2. $u \in H(B,\omega)$ funksiyası (1) tənliyinin H -həlli adlanır, əgər ixtiyari $\psi \in H_0(B,\omega)$ funksiyası üçün (5) inteqral eyniliyi ödənsin.

(1) tənliyi üçün daxil edilmiş W və H -həlləri, W və H – Dirixle məsələləri ilə əlaqədardır.

$$Lu_1 = 0 \quad B\text{-də}, \quad u_1 \in W(B,\omega), \quad h \in C^\infty(\overline{B}), (u_1 - h) \in W_0(B,\omega) \tag{6}$$

və

$$Lu_2 = 0 \ \ B\text{-də}, u_2 \in H(B,\omega),\ h \in C^\infty(\overline{B}),\ (u_2 - h) \in H_0(B,\omega), \tag{7}$$

Belə çəki funksiyası üçün

$$\omega(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, \ x_1 x_2 > 0; \\ |x|^{\alpha}, \ x_1 x_2 < 0, \end{cases} \tag{8}$$

W və H -həlləri, anlayışı (1) tənliyi üçün V.V.Jikov tərəfindən verilmişdir. Eyni bir sərhəd funksiyası üçün, W və H -Dirixle məsələlərinin birqiymətli həll olunması ilk dəfə Y.A.Alxutov, V.V.Jikov tərəfindən öyrənilmişdir. $\omega(x)$ (2) şəklində təyin olunmuş çəki funksiyasıdır. $u \in W(B,\omega)$ funksiyası üçün mərkəzi koordinat başlanğıcında olan polyar koordinat sistemindən istifadə olunur və $u(x) = u(r,\theta)$ kimi verilir. Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$D^{(1)} = B \cap \{x : x_1 > 0,\ x_2 > 0\},\ D^{(2)} = B \cap \{x : x_1 < 0,\ x_2 < 0\},$$

$$D_r^{(i)} = D^{(i)} \cap \{x : |x| < r,\},\ S_r^{(i)} = D^{(i)} \cap \{x : |x| = r\},\ i = 1,2.$$

$d\mu_i = |x|^{-\alpha_i} dx,\ i = 1,2.$ işarə edək. Ölçülə bilən $E \subset R^2$ çoxluğunda, ölçülə bilən f funksiyası üçün

$$\mu_i(E) = \int_E d\mu_i, \oint_E f(x) d\mu_i = \frac{1}{\mu_i(E)} \int_E f(x) d\mu_i, \quad i = 1,2.$$

olar. Göstərilir ki, $u \in W(B,\omega)$ funksiyasının $D^{(1)}$ və $D^{(2)}-$ ə daralmaları

$$u^{(i)}(0) = \lim_{R \to 0} \oint_{D_R^{(i)}} u(x) d\mu_i,\ i = 1,2, \tag{9}$$

ədədinə bərabər olan $u^{(i)}(0), i = 1,2$ izlərinə malikdir və istənilən $R \in (0,1]$ üçün

$$\oint_{D_R^{(i)}} (u(x) - u^{(i)}(0))^2 |x|^{-2} d\mu_i \le C(a_i) \oint_{D_R^{(i)}} |\nabla u(x)|^2 d\mu_i,\ i = 1,2. \tag{10}$$

Hardi bərabərsizliyi doğrudur.

$W_2^1(D)$, birinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi D-oblastında L_2-ən olan olan Sobolev fəzasıdır.

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 1. $u(x)$ funksiyasının çəkili $H(B,\omega)$ Sobolev fəzasına daxil olması üçün zəruri və kafi şərt $u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0)$ olmasıdır. Burada H fəzasının W-də koölçüsü vahidə bərabərdir.
Aşağıda verilmiş funksiya $u \in W(B,\omega)$ olduqda

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0, x_2 > 0; \\ \sin\theta, & x_1 < 0, x_2 > 0; \\ 0, & x_1 < 0, x_2 < 0; \\ \cos\theta, & x_1 > 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

$H(B,\omega)$-Sobolev fəzasına daxil deyil.
$W_0(B,\omega)$ və $H_0(B,\omega)$ fəzaları Hilbert fəzalarıdır və skalyar hasil $\langle u, \upsilon \rangle = \int_B \nabla u \nabla \upsilon \omega dx$ kimi təyin olunmuşdur.

Teorem 1. (6)-(7) məsələsi birqiymətli həll olunandır. Onda elə sərhəd funksiyası var ki, $h \in C^{\infty}(\overline{B})$ üçün $u_1(x)$ və $u_2(x)$ həlləri müxtəlifdir.

1.2-də W və H -həllərinin Hölder kəsilməzliyi öyrənilir.

Teorem 2. Əgər $\omega(x)$ -çəki (2) şərtini ödəyirsə, onda (1) tənliyinin H - həlli B -də Hölderdir və W -həlli, H -həll deyil. Bundan əlavə koordinat başlanğıcında kəsiləndir və $B \cap \{x : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$, $B \cap \{x : x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0\}$ hər birində Hölderdir.

$\omega_i(x)$ çəki funksiyaları A_2 – Макenhaupt şərtini ödəyir, koordinat düz xətlərinə nəzərən cütdür və

$$\left(\oint_{D_r^{(i)}} |\varphi|^4 d\mu_j \right)^{\frac{1}{2}} \leq C r^2 \oint_{D_r^{(i)}} |\nabla \varphi|^2 d\mu_j,\ \varphi \in W_0(B, \omega),\ j = 1,2,3,4\,. \qquad (11)$$

Sobolev bərabərsizliyi doğrudur. (11)-dən və Mozerin iterasiya metodunnan çıxır ki, aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 2. (1) tənliyinin istənilən W və H -həlləri B -də lokal məhduddur.

Baxılan tənliklərin həllərinin çəkili qiymətləndirilməsi teoremin isbatında əsas rol oynayır. Onu ifadə etmək üçün B_r, haradaki $r \leq R$, ilə kifayət qədər kiçik r radiuslu və mərkəzi $S_R^{(i)}$, $i = 1,3$, qövslərində yerləşən açıq dairələri $D_r^{(i)} = B_r \cap D^{(i)}$ ilə işarə edək. Fərz edək ki,

$$\vartheta(x) = |u(x)|^{1+\varepsilon} + R^{\nu},\ \nu > 0,$$

haradki $u(x)$ (1) tənliyinin həllidir. Daxil olunmuş funksiya həmin tənliyin məhdud müsbət subhəllidir. Aşağıda fərz olunur ki,

$$\nu_0 = \min\left\{ \frac{\beta_2 + \alpha_1}{2},\ \frac{\beta_1 + \alpha_2}{2} \right\} \text{ və } 0 < \nu < \nu_0\,.$$

Teorem 3. ϑ, ν və r -dən asılı olmayan elə müsbət C_1 və C_2 sabitləri var ki,

$$1 \leq \gamma \leq C_1 R^{\nu - \nu_0}$$

şərti ödəndikdə, istənilən $0<\rho<r$ üçün

$$\left(\oint_{D_\rho^{(1)}} \vartheta^{2(\gamma+1)} d\mu_1\right)^{1/2} \le C_2(\gamma+1)^2\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^2 \oint_{D_\rho^{(1)}} \vartheta^{\gamma+1} d\mu_1,$$

$$\left(\oint_{D_r^{(3)}} \vartheta^{(\gamma+1)} d\mu_3\right)^{1/2} \le C_2(\gamma+1)^2\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^2 \oint_{D_r^{(3)}} \vartheta^{\gamma+1} d\mu_3 .$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Bir hissəsi Makenhaupt çəkili elliptik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyi haqqında Y.A.Alxutov və V.V.Jikov işlərinin nəticələrindən çıxır ki, (1) tənliyinin W və H -həlləri $B\setminus\{(0,0)\}$-də Hölder mənada kəsilməzdir. Odur ki, teorem 2-nin isbatı həllin koordinat başlanğıcında tədqiqinə gətirilir. İsbatın əsası teorem 3-ün qiymətləndirilmələrinə və lemma 1-in hökmünə əsaslanaraq müəllif tərəfindən hazırlanmış Mozer metodunun modifikasiyasıdır.

Teorem 3-dən sonra mülahizələr $S_R^{(i)}$ $i=1{,}3$, qövslərində $\vartheta(x)$ subhəllinin maksimumunun $D_R^{(i)}$ çoxluqları üzrə inteqralların orta qiymətləri vasitəsilə Mozer qiymətləndirilməsinə həsr olunub. Bunun üçün bu teoremdə alınmış bərabərsizlikləri inteqrallamaq lazımdır. γ sabitinə qoyulmuş məhdudiyyətlərə görə burada ənənəvi isbatı işləmir. Sonsuz azalan həndəsi silsiləli radiuslu dairələr ardıcıllığı üzrə bərabərsizliklərin inteqrallanmasından ibarət olan ,təklif olunan üsul imkan verir ki, sonlu addımnan sonra γ sabitinə qoyulan məhdudiyyətləri ödəyəcək və $B_r^{x_0}\subset D^{(i)}$ dairəsinə keçilməyinə imkan verir. Bundan sonra Mozer texnikasına əsaslanan adi mülahizələrdən istifadə etmək olar.

1.3-də xüsusi formalı çəkili Sobolev fəzasında hamar funksiyaların sıxlığı üçün zəruri və kafi şərt tapılır.

R^2 -evklid müstəvisində vahid radiuslu $B=\{x:|x|<1\}$ dairəsində, çəkili Sobolev fəzasında

$$\omega(x)=\begin{cases} f^{-1}(|x|), & x_1 x_2>0\\ f(|x|), & x_1 x_2<0.\end{cases}$$

çəki funksiyasına baxaq. Baxılan f, çəki funksiyasının aşağıdakı şərtləri ödəməsi tələb olunur. Fərz edək ki, $f(t)$ kəsilməzdir, $(0,1]$-də azalmayandır və

$$f(2t)\le c\, f(t)\quad \forall t\in\left(0,\frac{1}{2}\right], \tag{12}$$

$$\sup_{t\in(0,1)}\left(\int_t^1 \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right)\left(\int_0^t \frac{d\tau}{f(\tau)}\right)<\infty. \tag{13}$$

şərtlərini ödəyir. Xüsusi halda $f(t)=\ln^{\gamma}\frac{1}{2t}\cdot t^{-\alpha}$, $\gamma\in(-\infty,+\infty)$, $\alpha\in(0,2)$ funksiyası yuxarıdakı şərtləri ödəyir. $f(t)=t^{-\alpha}$, $\alpha\in(0,2)$, halında bu məsələ V.V.Jikovun işlərində həll olunub. Bizim halda (12), (13) şərtləri ödəndikdə $C^{\infty}(\overline{B})\cap W(B,\omega)$-an olan funksiyalar çoxluğu ümumiyyətlə desək, $W(B,\omega)$-də sıx deyil. Bununla əlaqədar olaraq $H(B,\omega)$ fəzasını $C^{\infty}(\overline{B})\cap W(B,\omega)$ çoxluğunun $W(B,\omega)$-da qapanması kimi təyin edək.

Teorem 4. $u\in W(B,\omega)$ funksiyası yalnız və yalnız o halda $H(B,\omega)$ fəzasına daxil olar ki,

$L_1(u)=L_3(u)$, şərti ödənsin, harda ki

$$L_1(u)=\lim_{r\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}u(r,\theta)\,d\theta,\quad L_3(u)=\lim_{r\to 0}\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2}u(r,\theta)d\theta.$$

1.4 müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent formalı kvazixətti elliptik tənliklərin zəif həllərinin Hölder normasının daxili apriori qiymətləndirilməsinə həsr olunmuşdur.

$D\subset R^n$, $n\ge 2$, oblastında elliptik tənliyinə baxaq

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0,\ \ p=const>1, \qquad (14)$$

haradaki, $\omega(x)\geq 0$. Həllə tərif vermək üçün

$$W_{loc}(D,\omega)=\{u: u\in W_{loc}^{1,1}(D), |\nabla u|^{p}\omega\in L_{loc}^{1}(D)\}$$

funksiyalar sinfini təyin edək. Haradaki $W^{1,1}(D)$ -klassik Sobolev fəzasıdır. $u\in W_{loc}(D,\omega)$ funksiyası (14) tənliyinin həlli adlanır, əgər istənilən finit funksiyası üçün $\xi\in W_{loc}(D,\omega)$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{D}\omega\ (x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}dx=0$$

inteqral eyniliyi ödənsin. Əsas məqsəd (14) tənliyinin həllərinin Höder kəsilməzliyini isbat etməkdən ibarətdir. Cırlaşan tənliklər üçün mövzuya çoxlu sayda iş həsr olunub. Ən geniş tədqiq olunan hal $\omega(x)$ çəki funksiyasının A_p -Makenhaupt şərtini ödədiyi haldır. $p\neq 2$ halı J.Heinonen, T.Kilpelainen, O.Martio [3] bu işlərdə öyrənmişlər. Qeyd edək ki, R^n -də təyin olunmuş $\omega(x)$ -çəki funkiyası o halda , A_p -şərtini ödəyir ki,

$$\sup\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}\omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_{B}\omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1}<\infty,\ 1<p<\infty,$$

haradaki supremium bütün $B\subset R^n$ kürələr üzrə götürülür. Bu cür çəkiyə standart misal kimi $\omega(x)=|x|^{\alpha}$, burada $-n<\alpha<n(\ p-1)$, həmçinin $\omega(x)=|x_n|^{\alpha}$, burada $-1<\alpha<p-1$ qüvvət funksiyalarını göstərmək olar.

A_p -Makenhaupt şərtinin əsas nəticələri ikilik şərti

$$\omega(B_{2r})\leq c\omega(B_r), \qquad (15)$$

[3] Heinonen, J., Kilpelainen, T., Martio, O. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations// Mineola. NY: Dover Publ. Inc.,- 2006. XII, 404 pp.

Sobolev bərabərsizliyi

$$\left(\oint_{B_r} |\varphi|^{pk} d\mu \right)^{\frac{1}{k}} \le c(n,p) r^p \oint_{B_r} |\nabla \varphi|^p d\mu, \ \varphi \in C_0^\infty(B_r), \ k = \frac{n}{n-1}, \quad (16)$$

Fridrixsin

$$\int_{B_r} |\varphi|^p d\mu \le c(n,\nu,p) r^p \int_{B_r} |\nabla \varphi|^p d\mu,$$

$$\varphi \in C^\infty(\overline{B}_r), \ \varphi\big|_E = 0, \ |E| \ge \gamma |B_r|, \ \gamma > 0 .$$

bu bərabərsizliyidir.

Y.A.Alxutovov və V.V.Jikovun işində daha ümumi şəkilli çəki funksiyalarına baxılmışdır. Daha dəqiq, fərz olunur ki, $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ hipermüstəvisi D oblastını iki

$$D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\} \text{ və } D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$$

alt oblastlarına bölür və

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & x \in D^{(1)} \\ \omega_2(x), & x \in D^{(2)}, \end{cases} \quad (17)$$

haradaki $\sum$ -a nəzərən cüt olan $\omega_i(x), \ i = 1,2,$ çəki funksiyalarının hər biri A_p -Makenhaupt şərtini ödəyirlər.

Bundan əlavə mərkəzi $\sum$ üzərində olan B_r kürələri üçün, sanki bütün $x \in B_r$ üçün $r \le r_0$ olduqda, r və x-dən asılı olmayan c sabiti ilə

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(B_r)} \le c \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(B_r)} \quad (18)$$

bərabərsizliyi ödənir. Xüsusi halda $\sum$ -nın r_0 ətrafında $\omega_1(x) \le c\omega_2(x)$ doğrudur.

Belə çəkilər üçün (15) ikilik şərti və (16) Sobolev bərabərsizliyi ümumi halda pozulur. Y.A.Alxutov və V.V.Jikovun işində göstərilir ki, $p = 2$ olduqda (17) və (18) şərtləri ödəndikdə (14) tənliyinin həlləri Hölder mənada kəsilməzdirlər, həm də klassik Harnak bərabərsizliyi yoxdur.

Aşağıdakı hökm həllərin Hölder mənada kəsilməzliyinin isbatında mühüm rol oynayır.

Lemma 3. Tutaq ki, $\vartheta(x)-$ funksiyası (14) tənliyinin müsbət məhdud subhəllidir, yəni

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \omega(x)|\nabla\vartheta|^{p-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}dx \le 0, \ \forall\xi\in C_0^{\infty}(D), \ \xi\ge 0 \qquad D-\text{də}.$$

Onda ixtiyari $B_{8R}\subset D$ kürəsi üçün

$$\sup_{B_R}\vartheta(x)\le c\left(\oint_{B_{2R}^{(1)}}\vartheta^p(x)d\mu_1+\oint_{B_{2R}^{(2)}}\vartheta^p(x)d\mu_2\right)^{1/p},$$

bərabərsizliyi ödənir, haradaki c sabiti yalnız n, p və ω -an asılıdır.

$D^{(1)}$ və $D^{(2)}$ oblastları bu lemmanın isbatında müxtəlif rol oynayırlar. Bu onunla bağlıdır ki, mərkəzləri bölən hipermüstəvi üzərində olan kürələrdə yüksək dərəcədən cəmlənməyə malik Sobolevin çəkili daxil etmə teoremi yoxdur.

Sonra əsas nəticə isbat olunur.

Teorem 5. Əgər ω (17) və (18) şərtlərini ödəyirsə,haradaki ω_1 və ω_2 Σ hipermüstəvisinə nəzərən cüt funksiyalar olub, A_p – Makenhaupt sinfinə daxildirsə, onda (14) tənliyinin bütün həlləri D-də Hölder mənada kəsilməzdir.

1.5–də(17), (18) şərtlərini ödəyən çəkili (14) tənliyinin həlləri üçün klassik Harnak bərabərsizliyinin yoxluğu isbat olunur və bu tənliyə uyğun Harnak bərabərsizliyi göstərilir.

Əvvəl göstərilmişdir ki , $\omega\in A_p$ isə, onda (14) tənliyinin həlləri D-də Hölder mənada kəsilməzdir və $B_{4R}\subset D$-də bütün mənfi olmayan həllər üçün klassik Harnak bərabərsizliyi

$$\inf_{B_R} u \ge const\cdot\sup_{B_R} u. \qquad (19)$$

ödənir. Bizim tərəfdən müəyyən edilmişdir ki, əgər mərkəzi $\sum\cap D$-də olan bütün B_R kürələrində

$$\frac{\omega_2(B_r)}{\omega_1(B_r)} \to \infty \quad \text{əgər } r \to 0,$$

münasibəti ödənirsə, onda (19) klassik Harnak bərabərsizliyi və (17) Sobolev bərabərsizliyi dəqiq ödənmir. Bu nəticənin isbatı tütüm potensialının qiymətləndirilmələrinə əsaslanır.

Bir halda ki, mərkəzləri Σ hipermüstəvisində olan kürələrdə (19) klassik Harnak bərabərsizliyi ödənmir, nəticənin ifadəsində məhz belə kürələr iştirak edir və aşağıdakı

$$B_R^- = B_R \cap \{x : -R < x_n < -R/2\}. \tag{20}$$

fərz olunur. Aşağıdakı hökm doğrudur.

Teorem 6. Əgər $\omega(x)$ çəkisi (17), (18) şərtlərini ödəyirsə və $u(x)$ -funksiyası mərkəzi $\sum$ -da olan kürəsində (14) tənliyinin mənfi olmayan həllidirsə , onda $B_{4R} \subset D$

$$\inf_{B_R} u \geq \gamma \sup_{B_R} u, \tag{21}$$

bərabərsizliyi doğrudur,haradaki müsbət $\gamma < 1$ sabiti u və $R-$ dən asılı deyil.

Teorem 6-dan $\sum\cap D$ nöqtələrində həllin Hölder mənada kəsilməzliyi və bunun nəticəsi kimi, həllərin bütün D oblastında Hölder kəsilməzliyi alınır.

1.6-da oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan dəyişən p göstəricili olan $p(x)-$ Laplas tənliyi tədqiq olunur. Daha dəqiq, $D \subset R^n, n \geq 2,$ oblastında aşağıda təyin olunacaq müsbət $\omega_\varepsilon(x)$, çəkili elliptik

$$L_\varepsilon u = div\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0 \tag{22}$$

tənliklər ailəsinə, $D-$də sanki hər yerdə

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \tag{23}$$

şərtini ödəyən ölçülən $p(x)$ göstəricisi ilə baxılır. Fərz olunur ki, D oblastı, $\sum = \{x : x_n = 0\}$ hipermüstəvisi ilə $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$, $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ hissələrinə bölünüb və

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, & x \in D^{(1)} \\ 1, & x \in D^{(2)} \end{cases}, \ \varepsilon \in (0,1]. \tag{24}$$

(22) tənliyinin həllini təyin etmək üçün

$$W_{loc}(D) = \left\{ u : \ u \in W^{1,1}_{loc}(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L^1_{loc}(D) \right\},$$

funksiyalar sinfini daxil edək, haradaki $W^{1,1}_{loc}(D)$, D-də birinci tərtib ümumiləşmiş törəməsi ilə birgə lokal cəmlənən funksiyaların Sobolev fəzasıdır.

$u \in W_{loc}(D)$ funksiyası (22) tənliyinin həlli adlanır, əgər $\psi \in C_0^\infty(D)$ finit funksiyası üçün

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = 0 \tag{25}$$

inteqral eyniliyi ödənsin.

Həllərin daxil olunmuş $W_{loc}(D)$ sinfində, hamar funksiyaların sıxlığı mühüm rol oynayır.

V.V. Jikov və X.Fanın işində göstərilib ki, əgər loqarifmik

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \quad x, y \in D, |x-y| < \frac{1}{2} \tag{26}$$

şərti ödənilirsə, onda ixtiyari $u \in W_{loc}(D)$ funksiyası üçün $\{u_j\}$ ardıcıllığı var ki, haradaki $u_j \in C^\infty(D)$ və istənilən $\overline{D}' \subset D$ altoblastında

$$\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{W^{1.1}(D')} = 0, \ \lim_{j\to\infty} \int_{D'} |\nabla u_j|^{p(x)} dx = \int_{D'} |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

münasibəti ödənir.

Hal –hazırda (26) şərti dəyişən dərəcəli cəmlənməyə malik Sobolev fəzaları nəzəriyyəsində və $p(x)$ -hormonik funksiyaların Hölder kəsilməzliyi məsələsində mühüm rol oynayır. Y.A.Alxutovun işində (26) şərti ödəndikdə $\varepsilon = 1$ halında (22) tənliyinin həllərinin Hölder normasının apriori qiymətləndirilməsi isbat olunmuşdur. Bu işdə fərz olunur ki , $i = 1,2$ qiymətlərində

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c_0}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \text{ əgər } x, y \in D^{(i)}, |x-y| < 1/2, \tag{27}$$

bərabərsizliyi müəyyən $D \bigcap \sum$, ətrafında ödənir və

$$p(x) \ge p(\tilde{x}), \quad x \in D^{(2)}, \tag{28}$$

bərabərsizliyi doğrudur, haradaki $\tilde{x}$ - x nöqtəsinin Σ hipermüstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtəsidir. Y.A.Alxutovun işində göstərilib ki, (27) şərti ödəndikdə hamar funksiyalar çoxluğu $W_{loc}(D)$ sinfində sıxdır. Burdan alınır ki, (25) inteqral eyniliyində kompakt daşıyıcıları D -ən olan $\psi \in W_{loc}(D)$ finit funksiyalarından istifadə etmək olar. Bizi isə α Hölder göstəricisinin kiçik ε parametrindən asılı olmaması məsələsi maraqlandırır.

Fərz edək ki, $\{u^\varepsilon(x)\}$, $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$ tənliyinin L_∞-da kompakt D altçoxluqlarında ε -a görə müntəzəm məhdud həllər ailəsidir. Aşağıdakı hökm isbat olunur.

Teorem 7. Əgər (23), (24), (27) və (28) şərtləri ödənirsə , onda ε -an asılı olmayan elə $\alpha \in (0,1)$ sabiti var ki , $\{u^\varepsilon(x)\}$ ailəsi ixtiyari $\overline{D}' \subset D$ altoblastı üçün $C^\alpha(D')$ -də kompaktdır.

İkinci fəsil oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan, ikinci tərtib divergent elliptik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyinə və Harnak bərabərsizliyinə həsr olunmuşdur. Bu fəslin əsas nəticələri müəllifin [20, 21, 24, 34,36,37,38,39,40,42,45,46,47] işlərində nəşr olunmuşdur.

2.1-də $D \subset R^n$, $n \ge 2$, oblastında xətti elliptik

$$L_\varepsilon u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (29)$$

tənliklər ailəsinə baxılır.

Fərz olunur ki D oblastı, $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ hipermüstəvi ilə iki $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ və $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ hissələrinə ayrılmışdır. Burada, $\omega_\varepsilon(x)$ çəki funksiyası (24) şəklindədir. $\{a_{ij}(x)\}$ ölçülə bilən simmetrik matrisdir və müntəzəm elliptiklik

$$\gamma^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \gamma|\xi|^2 \qquad (30)$$

şərtini ödəyir.

$u \in W^1_{2,loc}(D)$ funksiyası (29) tənliyinin həlli adlanır,əgər kompakt daşıyıcısı D-ən olan $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ finit funksiyası üçün

$$\sum_{i.j=1}^{n} \int_D a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x)u_{x_i}\varphi_{x_j}\,dx = 0$$

inteqral eyniliyi ödənsin.

Tutaq ki, $\{u^\varepsilon(x)\}$, $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$ tənliyinin L_∞-da kompakt D altçoxluqlarında ε -a görə müntəzəm məhdud həllər ailəsidir.

Aşağıdakı nəticə alınmışdır.

Teorem 8. Yalnız fəzanın n -ölçüsündən və (30) şərtindəki γ-sabitindən asılı olan elə $\alpha \in (0,1)$ sabiti var ki, ixtiyari $\overline{D'} \subset D$ altoblastı üçün $\{u^\varepsilon(x)\}$ ailəsi $C^\alpha(D')$-də kompaktdır.

2.2-də 8-ci teorem oblastın bir hissəsində kiçik ε parametrinə görə müntzəm cırlaşan p-Laplas tipli tənliyin ümumuləşməsinə həsr olunmuşdur. Hipermüstəvi vasitəsilə iki hissəyə bölünmüş $D \subset R^n$, $n \ge 2$, oblastında (24) şərtini ödəyən $\omega_\varepsilon(x)$ çəkisi ilə

$$L_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad p > 1 \qquad (31)$$

elliptik tənliklər ailəsinə baxılır. (31) tənliyinin həlli elə $u \in W^1_{p,loc}(D)$ funksiyası başa düşülür ki,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = 0$$

inteqral eyniliyi kompakt daşıyıcısı D -dən olan $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ finit funksiyası üçün ödənsin.

Məlumdur ki, hər bir qeyd olunmuş $\varepsilon \in (0,1]$ qiymətində (31) tənliyinin ixtiyari həlli istənilən $\overline{D'} \subset D$ altoblastında D' -də Hölder mənada kəsilməz funksiyaların $C^\alpha(D')$ fəzasına daxildir. Bizi α göstəricisinin ε -an asılı olmaması məsələsi maraqlandırır.

$L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$ tənliyinin L_∞ -da kompakt D altçoxluqlarında, ε -a görə mümtəzəm məhdud $\{u^\varepsilon(x)\}$ həllər ailəsinə baxaq. Bu bölmənin əsasını aşağıdakı hökmün isbatı təşkil edir.

Teorem 9. Yalnız fəzanın n -ölçüsündən və p-ən asılı olan elə $\alpha \in (0,1)$ sabiti var ki, $\{u^\varepsilon(x)\}$ ailəsi, istənilən $\overline{D'} \subset D$ altoblastında $C^\alpha(D')$ -də kompaktdır.

2.3-də (31) tənliyinin mənfi olmayan həlləri üçün Harnak bərabərsizliyinin analoqu isbat olunur. Əgər $\omega_\varepsilon \equiv 1$ isə, $B_{4R} \subset D$ kürəsində (31) tənliyinin mənfi olmayan həlləri üçün (19) klassik Harnak bərabərsizliyi doğrudur.

Bizi mənfi olmayan həllərin, ε -an asılı olmayan sabitlə Harnak bərabərsizliyinin analoqu haqqında məsələ maraqlandırır. Bizim tərəfimizdən müəyyən olunmuşdur ki, mərkəzi hipermüstəvidə olan kürələrdə ε -an asılı olmayan sabitlə (19) Harnak bərabərsizliyi yoxdur. Əsas məqsəd mərkəzi Σ üzərində olan kürələrdə Harnak bərabərsizliyinin analoqunu almaqdır. Aşağıda (20)-ci işarələmədən istifadə olunur.

Teorem 10. $u(x)$, (31) tənliyinin mərkəzi $\sum$ üzərində olan $B_{4R} \subset D$ kürəsində mənfi olmayan həllidirsə onda (21) bərabərsizliyi u, R, ε-an asılı olmayan γ sabiti ilə ödənir.

(21) bərabərsizliyindən teorem 9-un hökmü çıxır.

2.4-də (31) şəkilli tənlik $D \subset R^n$, $n \geq 2$, oblastı hipermüstəvi ilə iki hissəyə bölünmüş

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon\omega(x),\ x \in D^{(1)}, \\ \omega(x),\ x \in D^{(2)}, \varepsilon \in (0,1], \end{cases} \tag{32}$$

haradaki çəki $\omega(x)$, A_p -Makenhaupt şərtini ödəyir.

Bundan əlavə fərz olunur ki, mərkəzi Σ hipermüstəvisi üzərində olan kifayət qədər kiçik R_0 radiuslu açıq B_{R_0} kürələrində $B_{R_0} \cap \{x : x_n > 0\}$ yarımkürəsinin demək olar ki, bütün x nöqtələrində

$$\omega(x) \leq \gamma\omega(x'),\ \gamma = const > 0 \tag{33}$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki x', x -nöqtəsinin Σ hipermüstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtədir. Xüsusi halda bu şərti $|x|^\alpha$, haradaki $-n < \alpha < n\,(p-1)$ və $|x_n|^\alpha$, haradaki $-1 < \alpha < p-1$ çəkiləri ödəyir. Bundan əlavə Σ hipermüstəvisinə nəzərən cüt olan $A_p -$ Makenhaupt şərtini ödəyən ixtiyari çəki yarayır. Yaxşı məlumdur ki, hər bir qeyd olunmuş $\varepsilon \in (0,1]$ qiymətində baxılan tənliyin ixtiyari həlli istənilən $\overline{D}' \subset D$ altoblastında, D' -də Hölder kəsilməzliyinə malik funksiyaların $C^\alpha(D')$ fəzasındandır. Bizi α göstəricisinin ε -an asılı olmaması sualı maraqlandırır. Əvvəl olduğu kimi, aşağıda da, $\{u^\varepsilon(x)\}$, $L_\varepsilon u^\varepsilon = 0$ tənliyinin $L_\infty -$ da kompakt D altçoxluğunda ε -a nəzərən müntəzəm məhdud həllər ailəsidir.

Teorem 11. ω çəkisi A_p -Makenhaupt şərtini ödəyirsə və (33) şərti ödənirsə onda yalnız p -ən, fəzanın ölçüsü n-dən, (33)-ki

γ sabitindən və ω çəkisindən asılı olan elə $\alpha \in (0,1)$ sabiti var ki, istənilən $\overline{D'} \subset D$ altoblastı üçün $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ ailəsi $C^{\alpha}(D')$ -də kompaktdır.

2.5-də, (31) tənliyinin (32) və (33) şərtlərini ödəyən $\omega_{\varepsilon}(x)$ çəkisi ilə araşdırılması davam edir.

Burda mərkəzi hipermüstəvi üzərində olan kürələrdə $\varepsilon -$an asılı olmayan sabitlə (19) klassik Harnak bərabərsizliyinin ödənməməsi göstərilir. (20)-ci işarələmədən istifadə olunaraq, əsas nəticə aşağıdakı hökmdən ibarətdir.

Lемма 4. Əgər çəki A_p -Makenhaupt şərtini ödəyirsə və (33) fərziyəsi ödənilərsə, onda ixtiyari $q > 0$ üçün u və R-ən asılı olmayan C sabiti liə

$$\inf_{B_R} u(x) \geq C \left(\oint_{B_{2R}} v^{-q}(x) d\mu \right)^{-1/q}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Lемма 5. Əgər çəki A_p -Makenhaupt şərtini ödəyirsə və (33) fərziyəsi ödənilərsə, onda istənilən $B_{2r} \subset B_{3R} -$kürəsi üçün

$$\int_{B_r} |\nabla \ln v|^p d\mu \leq C r^{-p} \omega(B_r),$$

qiymətləndirməsi doğrudur, haradaki C sabiti u, r, R və ε-an asılı deyil.

Teorem 12. Əgər çəki $\omega(x)$ A_p -Makenhaupt şərtini ödəyirsə və (33) fərziyəsi ödənilərsə, onda mərkəzi Σ üzərində olan $B_{4R} \subset D$ kürəsində (31) tənliyinin mənfi olmayan həlləri üçün (21) bərabərsizliyi doğrudur, haradaki müsbət sabit u, R və ε -an asılı deyil.

2.6-da hipermüstəvi ilə iki hissəyə bölünmüş $D \subset R^n$, $n \geq 2$, oblastında (22) elliptik tənliklər ailəsi, (24)-ən olan və $p(x)$ göstəricili

$$p(x)=\begin{cases} q, & x\in D^{(1)} \\ p, & x\in D^{(2)}, \end{cases} \qquad 1<q<p. \qquad (34)$$

şəkilli çəki ilə baxılır. Həlli təyin etmək üçün $p(x)$-göstəricisi ilə bağlı

$$W_{loc}(D)=\{u:u\in W_{loc}^{1,1}(D), |\nabla u|^{p(x)}\in L_{loc}^{1}(D)\},$$

funksiyalar sinfi daxil edilir, haradaki $W_{loc}^{1,1}(D)$ -birinci tərtib ümumiləşmiş törəmələri ilə birgə D -ə lokal cəmlənən funksiyaların Sobolev fəzasıdır.

(22) tənliyinin həlli dedikdə

$$\int_D \omega_\varepsilon(x)\,|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\cdot\nabla\varphi dx=0$$

inteqral eyniliyini $\varphi\in C_0^\infty(D)$ finit funksiyası üçün ödəyən $u\in W_{loc}(D)$ fynksiyası başa düşülür.

Əvvəllər olduğu kimi yenə də, $\{u^\varepsilon(x)\}$, $L_\varepsilon u^\varepsilon=0$ tənliyinin L_∞ -da D kompakt alt çoxluqlarında ε-a görə müntəzəm məhdud həllər ailəsidir. Aşağıdakı hökm isbat olunur.

Teorem 13. Yalnız fəzanın n-ölçüsündən və (34) şərtindəki p,q sabitlərindən asılı olan elə $\alpha\in(0,1)$ sabiti var ki, istənilən $\overline{D}'\subset D$ altoblastında $\{u^\varepsilon(x)\}$ ailəsi $C^\alpha(D')$-də kompaktdır.

Yuxarıda qeyd olunmuş nəticənin isbatı aşağıda gətirilən iki köməkçi nəticəyə əsaslanır: 1) mərkəzləri Σ hipermüstəvisi üzərində olan $B_R\subset D$ kürələrində $M=\sup\limits_{B_{R_0}}|u(x)|$, haradaki, $R_0\le 1/4$,

2) $R\le R_0/6$ üçün

$$M_6=\sup_{B_{6R}}u,\quad m_6=\inf_{B_{6R}}u,\quad \vartheta(x)=\ln\frac{M_6-m_6+2R}{M_6-u(x)+R}.$$

qəbul edilir.

Lemma 6. İxtiyari $R\le\rho<r\le 3R$ üçün, $a(n,p)>0$ sabiti ilə

$$\sup_{B_\rho} \vartheta \le C(n,p,q,M)\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^a \left(\oint_{B_r} \vartheta^p\,dx\right)^{1/p}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Yuxarıdakı lemmadan Mozer üsulunun köməyi ilə aşağıdakı fakt təyin olunur.

Lemma 7. Aşağıdakı

$$\sup_{B_R} \vartheta \le C(n,p,q,M) \oint_{B_{2R}} \vartheta dx.$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

İfadə olunan teoremin isbatının gedişində həm də müəyyən edilmişdir ki, D oblastında (31) tənliyinin ixtiyari həlli yalnız n, p və $q-$dən asılı olan göstərici ilə Hölder mənada kəsilməzdir. Qeyd edək ki, hər bir qeyd olunmuş $\varepsilon \in (0,1]$ qiymətində həllərin Hölder kəsilməzliyi E.Acerbi, N.Fusconun [4] işinin nəticələrindən alınır.

2.7 bölməsində $(p,q)-$ Laplas tənliyinin mənfi olmayan həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.

Teorem 14. Əgər (24), (34) şərtləri ödəndikdə, mərkəzi Σ hipermstəvisi üzərində olan $B_{8R} \subset D$ kürəsində (22) tənliyinin mənfi olmayan u- həlli üçün R radiuslu B_R konsentrik kürəsində

$$\inf_{B_R} u + R \ge C(n,p,q) \sup_{B_R} u$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada (20) işarələməsindən istifadə olunmuşdur və C sabiti yalnız $n, p, q-$ən asılıdır.

Teorem 14-ün isbatı,

$$\vartheta(x) = \begin{cases} w(x), & x \in D^{(2)} \\ \min(w(x), \tilde{w}(x)), & x \in D^{(1)}. \end{cases}$$

kimi götürülən aşağıdakı hökmə əsaslanır.

---

[4] Acerbi, E., Fusco, N. A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. -1991. v.2, no. 1. -p.1-16.

Lemma 8. İxtiyari $q_0 > 0$ üçün bərabərsizliyi

$$\inf_{B_R} \vartheta(x) \geq C(n,p,q,q_0)\left(\oint_{B_{2R}} \vartheta^{-q_0}(x)dx\right)^{-1/q_0}.$$

doğrudur, və yaxud, $w \geq \vartheta$ olduğundan onda

$$\inf_{B_R} w(x) \geq C(n,p,q,q_0)\left(\oint_{B_{2R}} \vartheta^{-q_0}(x)dx\right)^{-1/q_0}$$

olacaq.

Üçüncü fəsildə qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent elliptik tənliklərə baxılır. Bu fəslin əsas nəticələri müəllifin [2, 3, 7, 9, 25, 43] işlərində nəşr ol**u**nmuşdur.

3.1-də qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib elliptik

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad u/\partial D = 0, \tag{35}$$

tənliklər üçün d diametrli məhdud D oblastında birinci sərhəd məsələsinin həllinin anizotrop çəkili Sobolev fəzasında birqiymətli zəif həll olunması isbat olunur, burada

$$f \in L_2(D), \ \frac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in L_2(D); \ i = 1,\ldots,n.$$

Tənliyin yüksək tərtibli törəmələrinin əmsallarından düzəldilmiş matris ölçülə bilən simmetrik olub istənilən $\xi \in E_n$, $x \in D$ üçün,

$$\gamma\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma^{-1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2, \ \gamma \in (0,1]\text{-sabitdir} \tag{36}$$

bərabərsizliyi ödənilir, burada

$$\lambda_i(x) = \left(|x|_\alpha\right)^{\alpha_i}, \ |x|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{2}{2+\alpha_i}}, \ \alpha_i \geq 0; \ i = 1,\ldots,n. \tag{37}$$

şəklindədir.

Bu paraqrafda Sobolev bərabərsizliyi tipli aşağıdakı hökm isbat olunur. Aşağıdakı $W^1_{p,\alpha}(D)$ ilə norması sonlu olan funksiyaların banax fəzasını, $C_0^\infty(D)$ -an olan funksiyaların hər yerdə sıx alt fəzasını isə $\overset{\circ}{W}{}^1_{p,\alpha}(D)$ ilə işarə edəcəyik:

$$\|u\|_{W^1_{p,\alpha}(D)} = \left[\int_D \left(|u|^p + \sum_{i=1}^n (\lambda_i(x))^{p/2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right]^{1/p}, \ (1 < p < \infty),$$

$\alpha^- = \min\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $\alpha^+ = \max\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ işarə edək.

Teorem 15. Tutaq ki, $\lambda_i, i = 1, ..., n$ funksiylari (37) ilə təyin olunublar. Onda istənilən $p, \dfrac{2n}{n+2} < p < 2$ və ixtiyari $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(D)$ funksiyası üçün

$$\alpha^+ < \frac{4-2p}{3p-2} \tag{38}$$

şərti ödəndikdə

$$\|u\|_{L_{\frac{np}{n-p}}(D)} \le c_2 \left(\int_D \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}, \tag{39}$$

qiymətləndirməsi doğrudur, haradaki

$$c_2 = c_1 \left(2d^{n-1}\right)^{\frac{2-p}{2p}} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^{\frac{p-2}{p}} \left(\frac{d}{2} \right)^{\frac{\gamma_i(2-p)}{p}} \right)^{1/2},$$

$$\gamma_i = \frac{4 - 2p - \alpha_1(3p-2)}{(2+\alpha_i)(2-p)}, \ i = 1, ..., n.$$

L operatorunun kiçik əmsalları üzərinə

$$\omega = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{b_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right\|_{L_r(D)} < \frac{\mu}{c_3}, \tag{40}$$

$$c(x) \in L_r(D), c(x) \le 0. \tag{41}$$

şərtlərinin ödənməsini fərz edəcəyik. Burada $r > n$, c_3 sabiti isə $p = \dfrac{2rn}{(n-1)r+n}$ olduqda, eyni ilə c_2 sabiti kimi təyin olunur. Birinci sərhəd məsələsinin birqiymətli zəif həll olunması,ifadə olunan daxil etmə teoreminin köməyi ilə müəyyən olunur.

Teorem 16. Əgər (36)-(41) şərtləri ödənirsə, onda (35) birinci sərhəd məsələsi istənilən $f \in L_2(D), \dfrac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}} \in L_2(D); i = 1,\ldots,n.$ üçün $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(D)$ fəzasında birqiymətli zəif həll olunandır.

Bundan əlavə (35) məsələsinin həlli üçün qiymətləndirmə müəyyən olunmuşdur.

Teorem 17. Əvvəlki teoremin şərtləri ödəndiyi halda (35) birinci sərhəd məsələsinin zəif $u(x)$ həlli üçün

$$\|u\|_{W^1_{2,\alpha}(D)} \le c\left(\|f\|_{L_2(D)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{f_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\|_{L_2(D)}\right),$$

qiymətləndirilməsi doğrudur, burada müsbət c sabiti yalnız n, d, r, μ, ω və α vektorundan asılıdır.

3.2-də $Lu = 0$ şəklində bircins tənlik üçün Dirixle məsələsinə baxılmışdır. (35) şəklində kiçik hədləri olmayan tənlik üçün sərhəddə kəsilməz φ funksiyalarının qiymətlərini alan həllin sərhəd nöqtəsində kəsilməzlik modulu tədqiq olunur. Aşağıda $\varepsilon^y_R(k)$, harada ki $y \in R^n, R > 0, k > 0$ qapalı $\left\{x : \sum_{i=1}^{n}\dfrac{(x_i - y_i)^2}{R^{\alpha_i}} \le (kR)^2\right\}$ ellipsoidi işarə edək. Daha bir anlayış qeyd olunmuş Σ ellipsoidinə ciddi daxili K kompaktının tutumu anlayışını daxil edək. Tutaq ki $V_\Sigma(K) = \{u \in \dot{W}^1_{2,\alpha}, \quad u \ge 1 \ K$ -da mənada $W^1_{2,\alpha}\}$,

$$J_\Sigma(u)=\int_\Sigma \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.$$

$cap_\Sigma(K)=\inf\limits_{u\in V_\Sigma(K)} J_\Sigma(u)$ ədədi K kompaktının L -operatorunun doğurduğu Σ -a nəzərən tutumu adlanır. Aşağıdakı hökmdə Σ , $\varepsilon_1^0(1)$ ellipsoiddir və D oblastının sərhəddi koordinat başlanğıcını özündə saxlayır.

Teorem 18. Əgər $u\in W_{2,\alpha}^1(D)$, əmsalları (36) şərtini ödəyən $Lu=0$ tənliyi üçün, Dirixle məsələsinin zəif həllidirsə və φ sərhəd funksiyası ∂D -in Σ ilə kəsişməsində sıfra çevrilirsə onda aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur

$$|u(x)|\le C_1(\alpha,\mu,n)\sup_{\partial D}|\varphi|\exp\times$$

$$\times\left[-C_2(\alpha,\mu,n)\sum_{i=1}^{\ln\frac{1}{|x|}/(2+\alpha^+)} e^{i(n-2+|\alpha|/2)}cap\sum\left(\varepsilon_{e^{-i}}^0\setminus D\right)\right].$$

3.3 oblastın bir hissəsində böyük parametrə malik elliptik tənliklər üçün, Dirixle məsələsinin məxsusi funksiyalarının modulunun maksimumunun qiymətləndirilməsinə həsr olunmuşdur.

Daha dəqiq hipermüstəvi ilə $D^{(1)}=D\cap\{x:x_n>0\}$ və $D^{(2)}=D\cap\{x:x_n<0\}$ hissələrə bölünmüş məhdud Lipşis $D\subset R^n$, $n\ge 2$, oblastında (30) şərtini ödəyən (29) şəkilli L_ε operatoru üçün

$$-L_\varepsilon u=\lambda\omega_\varepsilon(x)u,\ u|_{\partial D}=0, \tag{42}$$

məsələsinin

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases}1,\ x\in D^{(1)}\\ \varepsilon^{-1},\ x\in D^{(2)},\varepsilon\in(0,1]\end{cases}. \tag{43}$$

çəkisi ilə məxsusi funksiyalarına baxılır. Məxsusi funksiyalar

$$\int_D u^2\omega_\varepsilon dx=1. \tag{44}$$

bərabərliyi ilə normallaşdırılır. Aşağıda u_m ilə (42) məsələsinin λ_m məxsusi ədədinə uyğun məxsusi funksiyası işarə edilir.

Teorem 19. Əgər (30) və (43) şərtləri ödənirsə, onda (42) məsələsinin (44) şərti daxilində,məxsusi funksiyaları üçün yalnız n -dən , D oblastından və (30)-kı γ sabitindən asılı olan C sabiti ilə

$$\sup_{x\in D}|u_m(x)| \le C\lambda_m^{\frac{n}{4}}.$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Dördüncü fəsildə qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklərə baxılır. Bu fəslin əsas nəticələri müəllifin [1, 4, 5, 6, 34, 41] işlərində nəşr olunmuşdur.

4.1-də qeyri-müntəzəm qüvvət üstlə cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklər sinfi tədqiq olunur. Bu tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin çəkili Sobolev fəzasında birqiymətli zəif həll olunması isbat olunur.

Aşağıda E_n və R_{n+1} uyğun olaraq $x=(x_1,...,x_n)$ və $(x,t)=(x_1,...,x_n,t)$ nöqtələrinin evklid fəzaları, $\Omega\subset E_n$, $0\in\Omega$, $\partial\Omega$ sərhədli məhdud oblast, T_0 və T müsbət ədədlər, $Q_T=\Omega\times(-T_0,T)$ qəbul edilir. Məhdud Ω -oturacağına malik Q_T silindrində

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f,\ f\in L_2(Q_T), \qquad (45)$$

$$u\big|_{S_T}=0,\ \ u\big|_{Q_0}=0, \qquad (46)$$

birinci sərhəd məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $\left\|a_{ij}(x,t)\right\|$, Q_T -də ölçülə bilən simmetrik matrisdir və ixtiyari $(x,t)\in Q_T$, $\xi\in E_n$ üçün

$$\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\le\mu^{-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\xi_i^2. \qquad (47)$$

müntəzəm elliptiklik şərti ödənir, $\mu \in (0,1]$ sabitdir, burada $\lambda_i(x,t) = \left(|x|_\alpha + \sqrt{|t|}\right)^{\alpha_i}$, $|x|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\overline{\alpha}_i}$, $\overline{\alpha}_i = \dfrac{2}{2+\alpha_i}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n$.

(45)–(46) məsələsinin həll olunması $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ fəzasında Q_T - qapanmasında sonsuz diferensiallanan və S_T -in yaxınlığında sıfra bərabər funksiyaların

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)} = \left[vrai \max_{t\in[-T_0,T]} \int_\Omega u^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_T} \lambda_i(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dxdt \right]^{\frac{1}{2}}$$

bu normaya tamamlamağı ilə araşdırılır. (38)-ə olduğu kimi $\alpha^+ < 2$ təyin olunur.

Aşağıdakı nəticə alınmışdır.

Teorem 20. Əgər L operatorunun əmsalları (47) şərtini ödəyirsə və $\alpha^+ < 2$ olarsa, onda istənilən $f \in L_2(Q_T)$ üçün (45)-(46) birinci sərhəd məsələsi $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)$ fəzasında birqiymətli zəif həll olunandır və məsələnin həlli üçün qiymətləndirməsi doğrudur

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_{2,\alpha}(Q_T)} \leq C_3(\mu,\alpha,\Omega,)\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

4.2 əlavə şərti

$$0 \leq \alpha_i < \frac{2}{n-1},\ i = 1,\ldots,n \tag{48}$$

daxilində məhdud $\Omega \subset R^{n+1}$ oblastında (45) bircins parabolik tənliyinin həllərinin Hölder kəsilməzliyinə həsr olunmuşdur.

Ən əvvəl Ω^ρ ilə, $\left\{(x,t) : |x - x'| < \rho, t' - \rho^2 < t < t'\right\}$ silindrinin Ω-a yerləşdiyi $(x',t') \in \Omega$, nöqtələri küllüsünü işarə edək. Cırlaşma nöqtəsinin ətrafında verilmiş tənliyin zəif həllərinin Hölder normasının daxili apriori qiymətləndirilməsi isbat olunur.

Teorem 21. Əmsalları (47), (48) şərtlərini ödəyən (45) bircins tənliyinin zəif u -həlli, $\Omega-$da Hölder mənada kəsilməzdir və ixtiyari $\rho>0$ üçün

$$\|u\|_{C^{\lambda}(\Omega^{\rho})}\leq H\|u\|_{C(\Omega)},$$

bərabərsizliyi doğrudur, burada λ yalnız $\alpha_1,\dots,\alpha_n$,n və H -isə əlavə olaraq həm də ρ -an asılıdır.

4.3-də cırlaşma nöqtəsinin ətrafında, əvvəlki bölmədə baxılan bircins tənliyin mənfi olmayan zəif həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.

Alınmış nəticənin ifadə olunması üçün

$$Q(\rho)=(-\rho^2R^2,0)\times\varepsilon^0_{\rho R}(1),\ S(\rho)=\left(-\left(\frac{1}{3}+\rho\right)R^2,-\left(\frac{3}{4}-\rho\right)R^2\right)\times\varepsilon^0_{\rho R}(1)$$

$$P(R)=(-R^2,0)\times\varepsilon^0_R(1).$$

işarə edək.

Teorem 22. Əgər u funksiyası əmsalları (47) və (48) şərtlərini ödəyən (45) bircins tənliyinin P(4R) silindrində mənfi olmayan həllidirsə , onda u və R-ən asılı olmayan C sabiti ilə

$$\sup_{S\left(\frac{1}{3}\right)}u(x,t)\leq C\inf_{Q\left(\frac{1}{3}\right)}u(x,t)$$

Harnak bərabərsizliyi doğrudur

4.4-də, 4.3-ün nəticələri $\lambda_i(x,t)$, $i=1,\dots,n$ funksiyaları üzərinə daha ümumi şərtlər daxilində (45) şəkilli qeyri-müntəzəm cırlaşan bircins tənliklərə ümumiləşdirilmişdir. Daha dəqiq (45) tənliyinin əmsallarının baxılan oblastda (47) şərtini ödəməsi nəzərdə tutulur ki, burada

$$\lambda_i(x,t)=g_i\left(\rho(x)+\sqrt{|t|}\right),\quad \rho(x)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(|x_i|),\tag{49}$$

harada ki $g_i(z)=\frac{\left(\omega_i^{-1}(z)\right)^2}{z^2}$; $i=1,2,\ldots,n.$ $\omega_i(t)$ funsiyaları ciddi monoton artandırlar, $\omega_i(0)=0$, şərtini ödəyir. $\omega_i^{-1}(t)$, $\omega_i(t)$ funksiyalarının tərsidir və $i=1,2,\ldots,n$ qiymətlərində

$$\omega_i(2t)\le 2\omega_i(t), \tag{50}$$

$$\left(\frac{\omega_i(t)}{t}\right)^{q-1}\int_0^{\omega_i^{-1}(t)}\left(\frac{\omega_i(z)}{z}\right)^q dz\le c_1 t \tag{51}$$

müəyyən $q>n$ sabiti ilə t -ən asılı olmayan c_1 sabiti ilə şərtini ödəyirlər. ω_i funksiyalarına sadə misal kimi $\omega_i(t)=t^{\alpha_i}$ göstərmək olar,haradaki

$$\alpha_i\ge\frac{-1+\sqrt{1+4q(q-1)}}{2(q-1)}.$$

$$S(\rho)=\{(x;t):|x_i|<\rho\omega_i^{-1}(R),i=1,2,\ldots,n\}\times$$

$$\times(-(1/3+\rho)R^2,(3/4-\rho)R^2),$$

$$Q(\rho)=\Pi_{\rho R}\times(-\rho^2R^2,0);$$

qəbul edək, haradaki,

$$\Pi_R=\{x:|x_i|<\omega_i^{-1}(R),i=1,2,\ldots,n\},$$

$$P(R)=\Pi_R\times(-R^2,0).$$

Aşağıdakı nəticə alınmışdır.

Теорема 23. Əgər u, əmsalları (47)-(48) və (50)-(51) şərtlərini ödəyən (45) tənliyinin P(4R) silindrində mənfi olmayan həllidirsə, onda u və R -ən asılı olmayan C sabiti ilə

$$\sup_{S\left(\frac{1}{3}\right)} u\le C\inf_{Q\left(\frac{1}{3}\right)} u$$

Harnak bərabərsizliyi doğrudur.

4.5-də, 4.4-də alınan Harnak bərabərsizliyi, bircins tənliyin zəif həllərinin Hölder kəsilməzliyini isbat etmək üçün tətbiq olunur.

NƏTICƏ

Dissertasiya işi ikinci tərtib cırlaşan elliptik və parabolik tənliklərin həllərinin keyfiyyət xassələrinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Xüsusi Makenhaupt çəkili xətti elliptik tənliklər öyrənilir. Bu tənliklər üçün Dirixle məsələsinin birqiyməti həll olunması və Hölder mənada kəsilməzliyi isbat olunur.
2. Xüsusi Makenhaupt çəkili qeyri-xətti $p-$Laplas tənliyinə baxılır. Bu tənliyin həlli üçün Hölder mənada kəsilməzlik və Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.
3. Oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan qeyri-xətti $p(x)-$ Laplas tənliyi öyrənilir və həllin Hölder kəsilməzliyi isbat olunur.
4. Oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə müntəzəm cırlaşan xətti və qeyri-xətti elliptik tənliklərə baxılır. Oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan elliptik tənliyin həllinin Hölder kəsilməzliyi, oblastın bir hissəsində cırlaşan Makenhaupt çəkili $p-$ Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi, Harnak bərabərsizliyi, oblastın bir hissəsində müntəzəm cırlaşan $(p,q)-$Laplas tənliyinin həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunmuşdur.
5. Qeyri-müntəzəm cırlaşan xətti elliptik tənliklər öyrənilir. Bir sinif qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinin həll olunması isbat olunmuşdur.
6. İkinci tərtib qeyri-müntəzəm cırlaşan elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinə baxılır. Bu məsələnin həlli üçün kəsilməzlik modulu öyrənilir.
7. Oblastın bir hissəsində böyük parametrə malik olan elliptik tənliklər üçün məxsusi funksiyaların modulunun müntəzəm qiymətləndirilməsi öyrənilir.
8. İkinci tərtib qeyri-müntəzəm cırlaşan divergent parabolik tənliklər üçün birinci sərhəd məsələsinin çəkili Sobolev fəzasında zəif həll olunması isbat edilir.

9. Qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklərin həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.
10. Qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib divergent parabolik tənliklərin həllərinin Hölder kəsilməzliyi göstərilir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Mamedov, I.T., Guseynov, S.T. On weak solvability of the first boundary value problem for second order non-uniformly degenerate parabolic equations in divergence form// -Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, -2000. v.XIII(XXI), -p.97-104.
2. Mamedov,I.T., Guseynov,S.T. Dirichlet problem for one class of nonuniformly degenerate second order elliptic equations//-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,- 2001, v.XIV(XXII), -p.59-66.
3. Гусейнов, С.Т. О модуле непрерывности в граничной точке решения задачи Дирихле для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук, -2001. №4. -с.92-99.
4. Guseynov, S.T. On an apriori estimation of a Holder norm of solutions of the second order non-uniformly degenerating parabolic equations //-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,- 2002. vol.16(24) -p.45-49.
5. Гусейнов, С.Т. О внутренней гладкости решений вырождающихся параболических уравнений 2-го порядка// Науч. конф. посвящ.70-летию проф.Г.К.Намазова , -Баку: 2002, -с.56-58.
6. Guseynov, S.T. A Harnack's i nequality for the solution of non-uniformly degenerate divergent parabolic equations of the second order//-Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, series of phys.-tech. and math. sciences, -2002. v. XXII, № 1,-pp. 102-112.

7. Гусейнов, С.Т. Оценка максимума модуля решений вырож- дающихся эллиптических уравнений 2-го порядка// Тезисы X межд.конф.по мат.и механ. посвящ.45-летию ИММ, - Баку: -5-7 ,мая-2004, -с.60.
8. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости W и H- решений одного эллиптического уравнения// Всерос. конф. «Диф. уравнения и их приложения», - Самара: -27 июня-2 июля,-2005, -с.24-25.
9. Гусейнов, С.Т. О разрешимости первой краевой задачи для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка//Тезисы межд. конф. по мат.и механ. посвящ. 50-летию чл.-корр. НАНА проф. И.Т.Мамедова, -Баку: -11-13 мая -2005, -с.81.
10. Гусейнов, С.Т. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для равномерно вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка.// Тезисы конф. «Теор. и прикладные задачи операторных уравнений», посвящ. 75-летию проф. Я.Д.Мамедова, - Баку:-2006, -с.56-57.
11. Гусейнов, С.Т. Первая краевая задача для равномерно вырождающихся дивергентных эллиптических уравнений второго порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат. наук,- 2006. № 2 -с.41-48.
12. Guseynov, S.T. On Holder continuity of solutions of a second order one uniformly degenerating elliptic equation //-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, -2006. vol. XXIV (XXXII). -p.75-86.
13. Guseynov, S.T. On density of smooth functions in Sobolev weight space//-Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan,-2007. v. XXVI (XXXIV). -p.69-74.
14. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости решений одного эллиптического уравнения. Тезисы XIII международной конф. по мат. и мех. посв.70-летию со дня рожд. действительного члена НАНА, проф. А.Д.Гаджиева ,-Баку:-21-23 ноября, -2007, -с.61.
15. Гусейнов, С.Т. О разрешимости задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений //Əməkdar elm

xadimi akad. Ə.Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konf. tezisləri,-Bakı:- 2007, s.72-73.
16. Гусейнов, С.Т. Внутренняя оценка нормы Гельдера решений неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений// Мат. меж. Российско-Азерб. симп. «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информ.» и VI школы молод. учён. «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики»//- Нальчик:-Эльбрус, 30-31-марта,-2008, -с.58.
17. Гусейнов, С.Т. О гёльдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений// Azərbaycanın ümummilli lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Resp. Elmi konf. mater., Баку:- 2008, -с.46-48.
18. Гусейнов, С.Т. Гёльдерова непрерывность решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста// Вестник Бакинского Унив. сер.физ.-мат. наук, Баку: -2008, №3, -с.25-33.
19. Гусейнов, С.Т., Алиев, М.Дж. Первая краевая задача для вырождающихся уравнений второго порядка//Тезисы Док. III меж. Конф. Посв.85-летию чл.корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева,-Москва: 25-29 марта - 2008. -с.251-252.
20. Алхутов, Ю.А., Гусейнов, С.Т. Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения//-Москва: Дифференциальные уравнения, - 2009. т.45, №1, -с.54-59.
21. Guseynov, S.T., Aliyev, M.J. On Hölder continuity of p(x)-hormonik funktions// Abstracns of the third congress of the world matematical socirty of Turkic countries ,-Almaty: -Yune 30-Yuly 4,-2009,-p.211.
22. Гусейнов,С.Т. О Гёльдеровости решений одного эллиптического уравнения//Тезисы международной конференций по математике и механике, посвященной 50-летию ИММ НАН Азербайджана,-Баку:-6-8 мая,-2009,-с.120-121.
23. Гусейнов, С.Т., Алиев М.Дж. Теорема типа Фрагмена-Линдельефа для решений неравномерно вырождающихся на

бесконечности эллиптических уравнений второго порядка// Межд. конф. по дифференц. уравн. и динамическим системам, -Суздаль: - 2-7 июля,- 2010, -с.69-70.
24. Гусейнов, С.Т.,Алиев, М.Дж. Неравенства типа Харнака для решений эллиптических уравнений с нестандартным услови- ем роста// Тезисы международной конференций по матема- тике и механике, посвященной 80-летному юбилею академика Ф.Г. Максудова,- Баку:-17-19 март,-2010,- с.135-136.
25. Гусейнов, С.Т. Задача Дирихле для одного класса равномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка// -Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,- 2010. № 1, -с.15-20.
26. Гусейнов, С.Т. О Гельдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений с нестандартным условием роста. Мат. конф., посвящ.100-летнему юбилею акад. З.И.Халилова, -Баку:- 12-14 января, -2011, -с.121-122.
27. Guseynov, S.T. On solvability of Dirichlet generalized problem for second order quasilinear elliptic equations//IV Congress of the Turkic world mathematical society,- Baku: -1-3 Yuly ,-2011,-p.203.
28. Гусейнов, С.Т. О разрешимости задачи Дирихле для квази- линейных эллиптических уравнений второго порядка// -Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,-2011.№ 2, -с. 50-54.
29. Гусейнов, С.Т.,Алиев, М.Дж. О гёльдеровой непрерывности решений равномерно вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка//Теории функций и проблемы армонического анализа материалы межд. конф., посв. 100-летному юбилею академика И.И.Ибрагимова, 28 феврал-01март, –Баку:-2012, -с.82.
30. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака слабого типа для решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка//-Баку: Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-мат.наук,-2012. №3, -с.63-67.

31. Гусейнов, С.Т., Алиев, М.Дж. Гёльдерова непрерывность решений неравномерно вырождающихся параболических уравнений //Тезисы межд. конф., посв. 90-летию со дня рождения Г.Алиева, -Баку: -2013 , -с.152-153.
32. Guseynov, S.T. On Hölder continuity of solutions of second order non uniformly degenerate parabolic equations in divergent form// Appled. Mathematical Sciences, Hikari Ltd., -2013.v.7, no 90. -pp.4475-4482.
33. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для неравномерно вырождающихся параболических уравнений второго поря- дка// Riyaziyyat və Mexanika Institutunun 55-illiyinə həsr olunmus Beynəlxalq konfransın Materialları,15-16 may,-Баку:- 2014, -с. 137-138.
34. Huseynov, S.T., On Holder property of solution of degenerate quasilinear elliptic equations//Applied Mathematical Sciences, Hikari Ltd., -2015.vol.9, no.100, -pp.4979-4986.
35. Huseynov, S.T. Hölder continuity of solutions of *p*-laplacian with partially Muckenhoupt weigh// International Journal of Evolution Equations, -2015. vol. 10, no. 1, -pp.43-51.
36. Guseynov, S.T. On a class of degenerated quazilinear elliptic equations with non-standart growth condition// The 5-th International Conference on Control and Optimization With Industrial Applications, 27-29 Auqust , Baku:- 2015.-p.333-335.
37. Гусейнов, С.Т. Оценка нормы Гёльдера и неравенство Харнака для решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. Межд. конф. по дифференц. уравн. и динамическим системам,- Суздаль:-8-12 июля ,-2016, -с.58-59.
38. Гусейнов, С.Т. Гёльдеровская непрерывность решений *p*-лапласиана с вырождающимся в части области макен-хауптовым весом//-Баку: Proceedings of IAM. -2016. v. 5, № 2, -p.196-204.
39. Huseynov, S.T. Harnack type inequality for non-negative solu- tions of second order degenerate parabolic equations in divergent form// Electronic Journal of Differential Equations, vol. -2016 (2016), no.278, -pp.1-11.

40. Huseynov, S.T. Hölder continuity for (p,q) -Laplace equations that degenerate uniformly on part of the domain// Electronic Journal of Differential Equations, vol.-2017(2017), no.308 , -pp. 1-12.
41. Гусейнов, С.Т. О равномерной в области оценке модуля собственной функции для эллиптического уравнения, содержащего большой параметр на части области// -Баку:Proceedings of IAM, -2017. v.6, №1, -pp.151-156.
42. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для решений p-лапласиана с частично макенхауптовым весом//-Москва: Дифференциальные уравнения, -2017. т. 53, № 5, -с. 653–664.
43. Гусейнов, С.Т. Гёльдеровская непрерывность и неравенство Харнака для решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения, содержащего $p-$ Лапласиан//-Киев: Украинский математический журнал, -2017. т.69, №12, -с.1596-1604.
44. Гусейнов, С.Т., Садигов, М.Н. О непрерывности по Гёльдеру решений вырождающихся квазилинейных уравнений эллип- тического типа// Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransın materialları, -Баку: -25-26 мау, -2017, -s.144-145.
45. Alkhutov, Yu. A., Huseynov, S.T. Harnak's inequality for *p*-Laplacian equations with Muckenhoupt weight degenerating in part of the domain// Electronic gournal of differential equations.-Texac:-vol. 2017 (2017), no.79, pp.1-13.
46. Гусейнов, С.Т. Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка// Межд.конф.по дифференц. уравн. и динамическим системам, -Суздаль:- 6-11 июля, -2018,-с.77-78.
47. Huseynov, S.T. Harnack inequality for (p,q) -laplacian equations uniformly degenerated in a part of domain// Electronic Journal of Differential Equations, vol. -2018(2018), no.143 , -pp. 1-7.
48. Huseynov, S.T. Harnack inequality of solutions to nonlinear elliptic equations degenerated on a part of the domain// Proceedings

of the 6^{th} international conference on control and optimization with industrial applications, -Baku:- vol.2,11-13 July,-2018,p. 157-159.

Müəllif müəllimi, mərhum AMEA-nın müxbir üzvü, professor I.T.Məmmədovun xatirəsini dərin hörmətlə yad edir və işə daimi diqqətinə görə professor Y.A.Alxutova səmimi minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın müdafiəsi **14 yanvar 2022-ci il** tarixində saat **14^{00}** Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küç. 9.

Dissertasiya işi ilə Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **10 dekabr 2021-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 29.10.2021
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 70395
Tiraj: 30