АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНОГО, ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРОВ И ИХ КОММУТАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА И В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА-МОРРИ

Специальность: 1202.01 - Анализ и функциональный анализ
Отрасль науки: Математика
Соискатель: **Гасанов Сабир Гахраман оглы**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2022

Диссертационная работа выполнена в отделе «Математический анализ» Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Научный консультант: член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф.
Гулиев Вагиф Сабир оглы

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф.
Гамидулла Исрафил оглы Асланов

доктор физико-математических наук, проф.
Рагим Микаил оглы Рзаев

доктор математических наук, доцент
Мубариз Гафаршах оглы Гаджибеков

доктор математических наук, доцент
Джаваншир Джавад оглы Гасанов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:
член-корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
Мисир Джумаил оглы Марданов

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
Абдуррагим Фарман оглы Гулиев

Председатель научного семинара:
член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф.
Билал Тельман оглы Билалов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Диссертационная работа посвящена следующим важным разделам гармонического анализа таких как: теория функциональных пространств, теория максимальных операторов, теория дробно-максимальных операторов, теория потенциала Рисса, которые тесно взаимосвязаны между собой и удачно дополняют друг друга. Развитие функционального анализа и потребности теории дифференциальных уравнений привели к исследованию функциональных пространств. Выше сказанное достаточно хорошо подчеркивает актуальность тематики данной диссертации и как видим имеет как теоретическое так и практическое значение.

Одно из основных достижений последних десятилетий, повлияющих на облик гармонического анализа, состоит в успешном привлечении идей и техники теории максимальных операторов, теории дробно-максимальных операторов и интегральных операторов типа потенциала. Эти идеи и методы применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций, функциональном анализе, теории вероятностей, в задачах теории приближений, гармоническом анализе на однородных группах и др. разделах математики. Систематическое изучение максимального оператора, дробно-максимального оператора и потенциала Рисса в функциональных пространствах берёт свое начало из классической теоремы Харди-Литтлвуд-Соболева. В 1970-ых годах в работах J. Peetre, D.R. Adams теорема Харди-Литтлвуд-Соболева обобщалось из лебегова пространства в пространство Морри. Пространство Морри ввел в 1938 году Ч.Б. Морри, в связи с некоторыми проблемами эллиптических уравнений и вариационного исчисления. В дальнейшем изучение этих операторов и их коммутаторов в некоторых функциональных пространствах были продолжены в работах W. Orlicz, R.Coifman, R.Rochberg, G.Weiss, E.Stein, C.Fefferman, S.Chanillo, A. Cianchi, H.Kita, E.Nakai, S.Janson, Y.Sawano, V.Kokilashvilli, D.Yang,

M.A.Ragusa, X.Fu, E.Sawano, V.I.Burenkov, L.Softova, V.S. Guliyev, A.Gogatishvili, R.Mustafaev, P.Zhang, A.M. Nadjafov и др.

Применение метода теории потенциала к решению многочисленных краевых задач, встречающихся в теории дифференциальных уравнений с частными производными, в задачах теории аналитических функций, а также в задачах механики имеет богатую историю и успешную практику. Ограниченность дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов могут быть применены к исследованию регулярности решений эллиптических уравнений с VMO коэффициентами в некоторых функциональных пространствах. Различные свойства потенциала Рисса были исследованы в работах М. Рисса, Г.Х. Харди, Дж.Е. Литтлвуда, С.Л. Соболева, И. Стейна и др. Из азербайджанских математиков в этом направлении отметим работы А.Д. Гаджиева, С.К. Абдуллаева, Р.К. Сейфуллаева, В.С. Гулиева, И.А. Алиева, Р.М. Рзаева, Р.А. Бандалиева, Дж. Дж. Гасанова, Е.Дж. Ибрагимова, Я.Я. Мамедова, М.Г. Гаджибекова и др.

Критерий ограниченности дробно-максимальных, дробно- интегральных операторов в пространствах Орлича в терминах типа ёмкости получено в работе A. Cianchi[1]. Для ограниченности этих операторов нами доказаны необходимые и достаточные условия в пространствах Орлича в терминах Соболева[16,20]. Эти результаты являются различными характеристиками для ограниченности указанных операторов. Кроме того, нами изучено критерий ограниченности коммутаторов дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов в пространствах Орлича. В работе В.С. Гулиева и Ф. Дерингоза[2] доказаны достаточные условия для ограниченности

---

[1] Cianchi, A. Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces // Journal of London Mathematical Society -1999, 60(1), p. 247-286.

[2] Guliyev, V.S., Deringoz, F. On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces // Journal of Functional Spaces. Article ID 617414, -2014, -11 p.

типа Спанне потенциала Рисса и ее коммутатора в обобщенных пространствах Орлича-Морри. Нами доказаны необходимые условия. Кроме того, нами доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности типа Адамса дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов в обобщенных пространствах Орлича-Морри [9,15,18]. В работе P. Zhang[1] рассмотрена ограниченность коммутатора максимального оператора $[b, M]$ в пространстве Лебега, когда b принадлежит в пространство Липщица. Нами доказаны критерии ограниченности для коммутаторов дробно-максимального и дробно-интегрального операторов в пространствах Орлича, когда b принадлежит в пространство Липщица и в пространство BMO, соответственно[16,19,20].

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертации является изучение критерии ограниченности дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов в пространствах Орлича и в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

Цель и задачи исследования.

- получение необходимых и достаточных условий для ограниченности дробно-максимального оператора, потенциала Рисса и их коммутаторов в пространствах Орлича и обобщенных пространствах Орлича-Морри, соответственно.
- характеризация пространство BMO и пространства Липщица с помощью коммутаторов дробно-максимального оператора и потенциала Рисса в пространствах Орлича и обобщенных пространствах Орлича-Морри, соответственно.
- получение необходимых и достаточных условий для ограниченности максимального оператора и его коммутатора в обобщенных весовых пространствах Орлича-Морри.
- доказательство ограниченности максимального оператора в векторно - значных обобщенных весовых пространствах

[1] Zhang, P. Characterization of Lipscitz spaces via commutators of the Hardy-Littlewood maximal function // C.R. Acad. Sci., -2017, v.355, -p. 336-344.

Орлича-Морри и доказательство двухвесового неравенства для потенциала Рисса в p-выпуклых весовых модулярных банаховых функциональных пространствах.

- получение необходимых и достаточных условий для ограниченности мультисублинейного дробно-максимального оператора на произведении модифицированных пространств Морри, а также для ограниченности мультилинейного дробно-интегрального оператора на произведении пространств Морри и на произведении модифицированных пространств Морри.
- исследование ограниченности параметрического интеграла Марцинкевича в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории функций и функционального анализа, теории интегральных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимального, дробно-интегрального операторов и их коммутаторов в пространствах Орлича и в обобщенных пространствах Орлича-Морри, соответственно.

2. Критерии ограниченности максимального оператора и его коммутатора в обобщенных весовых пространствах Орлича-Морри и двухвесовые неравенства для потенциала Рисса в p-выпуклых банаховых функциональных пространствах.

3. Критерии ограниченности мультисублинейного дробно-максимального и мультилинейного дробно-интегрального операторов на произведении пространств Морри и на произведении модифицированных пространств Морри, соотственно.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимальных операторов и их коммутаторов в пространствах Орлича.

2. Найдены необходимые и достаточные условия для ограниченности потенциала Рисса и ее коммутатора в пространствах Орлича.

3. Доказаны критерии ограниченности дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

4. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности максимального оператора и его коммутатора в обобщенных весовых пространствах Орлича-Морри.

5. Доказана ограниченность максимального оператора в обобщенных векторно-значных весовых пространствах Орлича-Морри.

6. Доказаны двухвесовые неравенства для потенциала Рисса в p-выпуклых весовых модулярных банаховых функциональных пространствах.

7. Найдены необходимые и достаточные условия для ограниченности мультисублинейного дробно-максимального оператора на произведении модифицированных пространств Морри.

8. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-интегрального оператора на произведении пространств Морри и на произведении модифицированных пространств Морри.

9. Доказана ограниченность параметрического интеграла Марцинкевича на обобщенных пространствах Орлича-Морри.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Диссертация носит теоретический характер и способствует развитию теории операторов в пространствах Орлича и обобщенных пространствах Орлича-Морри. Результаты, полученные в диссертации, могут представлять интерес не только для специалистов в функциональном анализе и теории операторов, на которых она прежде всего рассчитана, а также, например, и в уравнениях с частными производными, и в вариационных задачах, в ввиду открывающихся приложений новых пространств.

Апробация и применение. Результаты диссертации докладывались на семинарах отдела "Математический анализ" ИММ НАН Азербайджана (рук. чл.–корр. НАН Азербайджана, проф. В.С. Гулиев; на семинарах отдела "Дифференциальные

уравнения" (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б. Алиев); на общеинститутском семинаре ИММ НАНА; на семинарах кафедры "Математический анализ" БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. С.С. Мирзоев), на семинарах кафедры "Теория функций и функциональный анализ" БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. А.М. Ахмедов). Основные результаты диссертации также докладывались на международной конференции по математике “Math. Anal., Differ. Equations” (Баку, 2015); на международной конференции по математике “Nonharmonic Anal. and Differ. Oper.” (Баку, 2016); на международной конференции посвященной 80-летию акад.А. Гаджиева (Баку, 2017); на междунородной конференции по математике “Operators in Morrey type spaces and Appl.” (Турция, 2017, 2019); на международной конференции по математике “ Modern Problems of Mathematics and Mechanics” (Баку, 2019).

Полученные результаты могут применены в функциональном анализе и теории операторов. С помощью полученных результатов можно исследовать качественные свойства граничных задач для эллиптических операторов. Оценки дробно-интегральных операторов и их коммутаторов могут быть применены к исследованию регулярности решений эллиптических уравнений с VMO коэффициентами в рассматриваемых функциональных пространствах. А также ограниченность дробно-максимальных операторов и их коммутаторов могут быть применены к исследованию ограниченности оператора Шредингера в рассматриваемых функциональных пространствах.

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично с использованием методов функционального анализа и теории операторов. Научный консультант принимал участие в выборе направления исследований и анализе полученных результатов.

Публикации автора.

- Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики -16.
- Тезисы докладов -6.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в отделе “Математический анализ” Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Структура и объем диссертации(в знаках). Титульная страница -419 знаков, оглавление -2576 знаков, введение -84421 знак, содержание диссертации -320160 знаков(глава I -83218 знаков, глава II -101423 знака, глава III -77654 знака, глава IV -57865 знаков), выводы -2101 знак, литература -26280 знаков, всего -435957 знаков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основное содержание диссертационной работы состоит из четырех глав. В первой главе диссертации определяются и исследуются характеризация дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов в пространствах Орлича. В этой главе доказываются необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимального оператора M_α, потенциала Рисса I_α и их коммутаторов в пространствах Орлича. Как применение этих результатов изучено ограниченность дробно-максимального коммутатора $M_{b,\alpha}$, нелинейного коммутатора $[b, M_\alpha]$ и коммутатора $[b, I_\alpha]$, когда b принадлежит пространству BMO и пространству Липщица и получено новые характеристики пространств BMO и Липшица, соответственно. В первом параграфе первой главы изложены необходимые факты о пространстве Орлича.

Определение 1. Функция $\Phi:[0,+\infty)\to[0,\infty]$ называется функцией Юнга, если Ф выпукла, непрерывна слева, $\lim\limits_{r\to+0}\Phi(r)=\Phi(0)=0$ и $\lim\limits_{r\to+\infty}\Phi(r)=\infty$.

Пусть $\mathcal{Y}$ множество всех функций Юнга Ф таких, что $0<\Phi(r)<+\infty,$ при $0<r<+\infty$.

Определение 2. (Пространство Орлича). Для функции Юнга Φ, множество

$$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=\left\{ f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Phi(k\,|\,f(x)\,|)dx<+\infty \text{ для некоторого } k>0\right\}$$

называется пространством Орлича. Пространство $L^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций f, что $f\chi_B\in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ для всех шаров $B\subset\mathbb{R}^n$.

$L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ банахово пространство относительно нормы

$$\|\,f\,\|_{L^{\Phi}}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\frac{|\,f(x)\,|}{\lambda})dx\le 1\right\}.$$

Для измеримого множества $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, измеримой функции f и $t>0$, пусть

$$m(\Omega,f,t)=|\,\{x\in\Omega:|\,f(x)\,|>t\}\,|.$$

В случае $\Omega=\mathbb{R}^n$, обозначим его $m(f,t)$.

Определение 3. Слабое пространство Орлича

$$WL^{\Phi}(\mathbb{R}^n):=\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|\,f\,\|_{WL^{\Phi}}<+\infty\}$$

определяется нормой

$$\|\,f\,\|_{WL^{\Phi}}=\inf\left\{\lambda>0:\sup_{t>0}\Phi(t)m(\frac{f}{\lambda},t)\le 1\right\}.$$

Для функции Юнга Φ и $0\le s\le+\infty$, пусть

$$\Phi^{-1}(s)=\inf\{r\ge 0:\Phi(r)>s\}\quad(\inf\varnothing=+\infty).$$

Если $\Phi\in\mathcal{Y}$, то Φ^{-1} является обычной обратной функцией Φ. Отметим, что

$$\Phi(\Phi^{-1}(r))\le r\le\Phi^{-1}(\Phi(r))\ \text{ для }\ 0\le r<+\infty.$$

Говорят, что функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2-условию, и обозначают $\Phi\in\Delta_2$, если

$$\Phi(2r)\le k\Phi(r)\ \text{ для } r>0,$$

для некоторого $k>1$. Если $\Phi\in\Delta_2$, то $\Phi\in\mathcal{Y}$. Функция Юнга Φ называется удовлетворяющей ∇_2-условию, обозначается также $\Phi\in\nabla_2$, если

$$\Phi(r)\le\frac{1}{2k}\Phi(kr),\quad r\ge 0,$$

для некоторого $k>1$.

Для функции Юнга Φ, дополнительная функция $\tilde{\Phi}(r)$ определяется, как

$$\tilde{\Phi}(r)=\begin{cases}\sup\{rs-\Phi(s):s\in[0,\infty)\}\ , & r\in[0,\infty)\\ +\infty\ , & r=+\infty.\end{cases}$$

Дополнительная функция $\tilde{\Phi}$ является также функцией Юнга и $\tilde{\tilde{\Phi}}=\Phi$.

Напомним, что дробно-максимальный оператор M_α определяется в виде

$$M_\alpha f(x)=\sup_{x\in B}|B|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\int_B|f(y)|\,dy,\ \ 0\le\alpha<n,$$

где супремум берется по всем шарам $B\subset\mathbb{R}^n$ соодержащих x, а оператор Рисса I_α в виде

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy,\ \ 0<\alpha<n.$$

Если α=0, то $M\equiv M_0$ называется максимальным оператором Харди-Литтлвуда.

Дробно-максимальный коммутатор определяется в виде

$$M_{b,\alpha}f(x)=\sup_{x\in B}|B|^{-1+\frac{\alpha}{n}}\int_B|b(x)-b(y)||f(y)|\,dy,$$

где супремум берется по всем шарам B содержащех x и b локально интегрируемая функция.

Если α=0, то $M_b\equiv M_{b,0}$ называется максимальным коммутатором.

Можно определить нелинейный коммутатор оператора M_α с локально интегрируемой функцией b в следующем виде:

$$[b,M_\alpha](f)(x)=b(x)M_\alpha(f)(x)-M_\alpha(bf)(x),$$

а коммутатор $[b, I_\alpha]$ и опреатор $|b, I_\alpha|$ определяются следующим образом, соответственно

$$[b, I_\alpha] = I_\alpha(bf)(x) - b(x)I_\alpha(f)(x), \quad |b, I_\alpha| = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(x) - b(y)|}{|x - y|^{n-\alpha}} f(y)dy.$$

Во втором параграфе получены необходимые и достаточные условия для ограниченности M_α в пространствах Орлича и слабых пространствах Орлича.

Основным результатом параграфа 1.2 является

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < n, \Phi, \Psi$ функции Юнга и $\Phi \in \mathcal{Y}$. Условие

$$r^{-\frac{\alpha}{n}} \Phi^{-1}(r) \le C\Psi^{-1}(r) \qquad (1)$$

для всех $r > 0$, где $C > 0$ не зависит от r, является необходимым и достаточным для ограниченности M_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $\Phi \in \nabla_2$, то условие (1) является необходимым и достаточным для ограниченности M_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

В 1.3 определены и доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимального коммутатора $M_{b,\alpha}$ и коммутатора $[b, M_\alpha]$ в пространствах Орлича.

Определение 4. Введем пространство

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\text{const}\} : \| f \|_* < \infty \}$$

с нормой

$$\| f \|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} | f(y) - f_{B(x,r)} | dy,$$

здесь $f_{B(x,r)} = \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)dy$.

Пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$ является банаховым относительно нормы $\|\cdot\|_*$

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для ограниченности оператора $M_{b,\alpha}$ из $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. Пусть $0<\alpha<n$, $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ и Φ, Ψ функции Юнга и $\Phi\in\mathcal{Y}$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и $\Psi\in\Delta_2$, то условие

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n})+\sup_{r<t<\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^{\alpha}\le C\Psi^{-1}(r^{-n})$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\Psi\in\Delta_2$, то условие

$$r^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n})\le C\Psi^{-1}(r^{-n}) \qquad (2)$$

является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi\in\nabla_2$ и $\Psi\in\Delta_2$. Если условие

$$\sup_{r<t<\infty}(1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^{\alpha}\le Cr^{\alpha}\Phi^{-1}(r^{-n}) \qquad (3)$$

справедливо для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, то условие (2) является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\Psi}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 5. Пусть $0<\beta<1$. Говорят, что функция b принадлежит пространству Липшица $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$, если существует такая постоянная C, что для всех $x, y\in\mathbb{R}^n$

$$|b(x)-b(y)|\le C|x-y|^{\beta}.$$

Наименьшая постоянная C удовлетворяющая этому условию называется $\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ нормой b и обозначается $\|b\|_{\dot{\Lambda}_{\beta}(\mathbb{R}^n)}$.

Теорема 3. Пусть $0<\beta<1$, $0\le\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{\mathrm{const}\}$, Φ,Ψ функции Юнга и $\Phi\in\mathcal{Y}$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и условие

$$t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}\Phi^{-1}(t) \le C\Psi^{-1}(t), \qquad (4)$$

справедливо для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если условие

$$\Psi^{-1}(t) \le C\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}, \qquad (5)$$

справедливо для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\Phi \in \nabla_2$ и $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4. Пусть $0<\beta<1$, $0 \le \alpha < n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\mathrm{const}\}$, Φ, Ψ функции Юнга и $\Phi \in \mathcal{Y}$.

1. Если условие (4) справедливо, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если условие (5) справедливо и $\dfrac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ почти убывающая для некоторого $\varepsilon>0$, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\Psi^{-1}(t) \approx \Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$ и $\dfrac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ почти убывающая для некоторого $\varepsilon>0$, то условие $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Для фиксированного шара B_0, дробно-максимальная функция относительно B_0 задается в виде

$$M_{\alpha,B_0}(f)(x)=\sup_{B_0\supseteq B\ni x}\frac{1}{|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}}\int_B|f(y)|\,dy,\quad 0\le\alpha<n,$$

где супремум берется по всем шарам B при $B\subseteq B_0$ и $x\in B$.

Теорема 5. Пусть $0<\beta<1$, $0\le\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$ и $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{\mathrm{const}\}$ неотрицательная функция. Предположим, что Φ,Ψ функции Юнга, $\Phi\in\mathcal{Y}\cap\nabla_2$ и $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$.

2. $[b,M_\alpha]$ является ограниченным из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\sup_B|B|^{-\beta/n}\,\Psi^{-1}(|B|^{-1})\,\|b(\cdot)-|B|^{-\alpha/n}\,M_{\alpha,B}(b)(\cdot)\|_{L^\Psi(B)}\le C.$$

В 1.4 получены необходимые и достаточные условия для ограниченности потенциала Рисса в пространствах Орлича.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для ограниченности оператора I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ и из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 6. Пусть $0<\alpha<n$ и $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$.

1. Условие

$$r^\alpha\Phi^{-1}(r^{-n})+\int_r^\infty\Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha\frac{dt}{t}\le C\Psi^{-1}(r^{-n})\qquad(6)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $\Phi\in\nabla_2$, то условие (6) является достаточным для ограниченности I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Условие

$$r^\alpha\Phi^{-1}(r^{-n})\le C\Psi^{-1}(r^{-n})\qquad(7)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является необходимым для ограниченности I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$ и из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если условие регулярности

$$\int_r^\infty \Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha \frac{dt}{t} \le Cr^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n})$$

справедливо для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, то условие (7) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если $\Phi \in \nabla_2$, то условие (7) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

В 1.5 доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности коммутатора потенциала Рисса в пространствах Орлича.

Следующая теорема дает небходимое и достаточное условие для ограниченности оператора $|b, I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 7. Пусть $0<\alpha<n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ и $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$.

1. Если $\Phi \in \nabla_2$ и $\Psi \in \Delta_2$, то условие

$$r^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) + \int_r^\infty (1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha \frac{dt}{t} \le C\Psi^{-1}(r^{-n}) \qquad (8)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $[b, I_\alpha]$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\Psi \in \Delta_2$, то условие (2) является необходимым для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi \in \nabla_2$ и $\Psi \in \Delta_2$. Если условие

$$\int_r^\infty (1+\ln\frac{t}{r})\Phi^{-1}(t^{-n})t^\alpha \frac{dt}{t} \le Cr^\alpha \Phi^{-1}(r^{-n}) \qquad (9)$$

справедливо для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, тогда условие (2) является необходимым и достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 8. Пусть $0<\alpha<n$, $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{\mathrm{const}\}$ и $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi\in\Delta_2$ и условие (8) справедливо, то условие $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ является достаточным для ограниченности $[b, I_\alpha]$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\Psi^{-1}(t)\lesssim\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$, то условие $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ является необходимым для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi\in\Delta_2$, $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ и условие (9) справедливо, то условие $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ является необходимым и достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Как применение Теоремы 6 рассмотрим ограниченность $[b, I_\alpha]$ в пространствах Орлича, когда b принадлежит пространству Липщица, с помощью которой даны некоторые новые характеризации пространств Липщица.

Теорема 9. Пусть $0<\beta<1$, $0<\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{\mathrm{const}\}$, $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и условия

$$\int_t^\infty \Phi^{-1}(r^{-n})r^{\alpha+\beta}\frac{dr}{r}\le Ct^{\alpha+\beta}\Phi^{-1}(t^{-n}), \tag{10}$$

$$t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}\Phi^{-1}(t)\le C\Psi^{-1}(t), \tag{11}$$

справедливы для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, тогда условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является достаточным для ограниченности $[b, I_\alpha]$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если условие

$$\Psi^{-1}(t)\le C\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}, \tag{12}$$

справедливо для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым для ограниченности $|b,I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\Phi\in\nabla_2$,условие (10) справедливо и $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$, то условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым и достаточным для ограниченности $|b,I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $L^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 10. Пусть $0<\beta<1$, $0<\alpha<n$, $0<\alpha+\beta<n$, $b\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\backslash\{\mathrm{const}\}$, $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$.

1. Если условия (10) и (11) удовлетворяются, то условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является достаточным для ограниченности $[b,I_\alpha]$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

2. Если условие (12) справедливо и $\dfrac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ является почти убывающей для некоторого $\varepsilon>0$, то условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым для ограниченности $|b,I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\Psi^{-1}(t)\approx\Phi^{-1}(t)t^{-\frac{\alpha+\beta}{n}}$, условие (10) справедливо и $\dfrac{t^{1+\varepsilon}}{\Psi(t)}$ почти убывающая для некоторого $\varepsilon>0$, то условие $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ является необходимым и достаточным для ограниченности $|b,I_\alpha|$ из $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ в $WL^\Psi(\mathbb{R}^n)$.

Вторая глава посвящена ограниченности дробно-максимальных, дробно-интегральных операторов и их коммутаторов в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

В 2.1 приводятся необходимые факты о пространствах Орлича-Морри и обобщенных пространствах Орлича-Морри.

Определение 6. Пусть $\varphi(x,r)$ положительная измеримая функция на $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ и Φ любая функция Юнга. Обозначим,

через $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ обобщенное пространство Орлича-Морри, пространство всех функций $f \in L^{\Phi}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ для которых

$$\| f \|_{\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \| f \|_{L^{\Phi}(B(x,r))} < \infty.$$

Говорят, что функция $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ почти возрастающая (соответственно поти убывающая) если существует такая постоянная $C>0$, что

$$\varphi(r) \le C\varphi(s) \quad (\text{соответственно } \varphi(r) \ge C\varphi(s)) \text{ для } r \le s.$$

Для функции Юнга Ф, обозначим через $\mathcal{G}_{\Phi}$ множество всех почти убывающих функций $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ таких, что $\dfrac{\varphi(t)}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}t^{-n})}, t\in(0,\infty)$ является почти возрастающей.

В 2.2 доказаны необходимые и достаточные условия для сильной (слабой) ограниченности типа Адамса дробно-максимального оператора в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

Теорема 11. Пусть $\Phi \in \nabla_2$ и $0<\alpha<n$. Пусть $\varphi \in \Omega_{\Phi}$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{r<t<\infty} \Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1}) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x,s)|^{-1})} \le C\varphi(x,r), \quad (13)$$

и

$$r^{\alpha}\varphi(x,r) + \sup_{r<t<\infty} t^{\alpha}\varphi(x,t) \le C\varphi(x,r)^{\beta}, \quad (14)$$

для некоторого $\beta\in(0,1)$ и для каждого $x\in\mathbb{R}^n$ и $r>0$. Положим $\eta(x,r)\equiv\varphi(x,r)^{\beta}$ и $\Psi(r)\equiv\Phi(r^{1/\beta})$. Тогда оператор M_{α} является ограниченным из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Следующая теорема является одним из основных результатов параграфа.

Теорема 12 (Результат типа Адамса). Пусть $0<\alpha<n$, Ф функция Юнга, $\varphi\in\Omega_{\Phi}$, $\beta\in(0,1)$, $\eta(t)\equiv\varphi(t)^{\beta}$ и $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют (13), то условие

$$t^{\alpha}\varphi(t) + \sup_{t<r<\infty} r^{\alpha}\varphi(r) \le C\varphi(t)^{\beta}, \quad (15)$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$, то условие

$$t^\alpha\varphi(t)\le C\varphi(t)^\beta, \tag{16}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi\in\nabla_2$. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t<r<\infty} r^\alpha\varphi(r)\le Ct^\alpha\varphi(t), \tag{17}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие (16) является необходимым и достаточным для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Если мы возьмем $\Phi(t)=t^p$, $p\in[1,\infty)$ и $\beta=\dfrac{p}{q}$ при $p<q<\infty$ в Теореме 12, то получим следующий новый результат для обобщенных пространств Морри.

Следствие 1. Пусть $0<\alpha<n$, $1<p<q<\infty$ $\varphi\in\Omega_p\equiv\Omega_{t^p}$.

1. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}}\le C\varphi(r), \tag{18}$$

то условие $t^\alpha\varphi(t)+\sup\limits_{t<r<\infty} r^\alpha\varphi(r)\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}}$, для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_p\equiv\mathcal{G}_{t^p}$, то условие

$$t^\alpha\varphi(t)\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}}, \tag{19}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию (17), то условие (19) является необходимым и достаточным для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

Если мы возьмем

$$\varphi(t)=\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})},\ 0\le\lambda\le n,\ \Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta}),\ \beta\in(0,1],$$

$$\eta(t)\equiv\varphi(t)^\beta=\left(\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}\right)^\beta=\frac{\Psi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Psi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})},$$

в Теореме 12, то получим следующий новый результат для пространств Орлича-Морри.

Следствие 2. Пусть $\Phi\in\nabla_2$, $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$ и $\beta\in(0,1)$. Если

$$\sup_{t<r<\infty} r^\alpha\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}r^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}r^{-\lambda})}\le Ct^\alpha\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})},$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие

$$t^\alpha\le C\left[\frac{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-n})}{\Phi^{-1}(\nu_n^{-1}t^{-\lambda})}\right]^{\beta-1}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым и достаточным для ограниченности M_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Определение 7. Для функции Юнга Φ и $\lambda\in\mathbb{R}$, обозначим через $W\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ слабое пространство Орлича-Морри, определенное как пространство всех функций $f\in WL^\Phi_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\lambda}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-\frac{\lambda}{n}})\|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL^\Phi}.$$

Определение 8. Пусть $\varphi(x,r)$ положительная измеримая функция на $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ и Φ любая функция Юнга. Через $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ обозначим слабое обобщенное пространство Орлича -Морри для всех функций $f \in WL^{\Phi}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ для которых

$$\| f \|_{W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(|B(x,r)|^{-1}) \| f \|_{WL^{\Phi}(B(x,r))} < \infty.$$

Теорема 13. Пусть Φ функция Юнга и $0<\alpha<n$. Пусть $\varphi \in \Omega_{\Phi}$ удовлетворяет условиям (13) и (14). Определим $\eta(x,t) \equiv \varphi(x,t)^{\beta}$ и $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$ $\beta \in (0,1)$. Тогда оператор M_{α} является ограниченным из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 14 (Слабая версия результата типа Адамса). Пусть $0<\alpha<n$, Φ функция Юнга, $\varphi \in \Omega_{\Phi}$, $\beta \in (0,1)$ и $\eta(t) \equiv \varphi(t)^{\beta}$ и $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$.

1. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет (13), то условие (15) является достаточным для ограниченности M_{α} из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi \in \mathcal{G}_{\Phi}$, то условие (16) является необходимым для ограниченности M_{α} из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\varphi \in \mathcal{G}_{\Phi}$ удовлетворяет условию (17), то условие (16) является необходимым и достаточным для ограниченности M_{α} из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

В 2.3 получены необходимые и достаточные условия для ограниченности типа Спанне и типа Адамса коммутатора дробно-максимального оператора в обобщенных пространствах Орлича-Морри, соответственно.

Следующая теорема является одним из наших основных результатов.

Теорема 15 (Результат типа Спанне)**.** Пусть $0 \le \alpha < n$, $\varphi_1 \in \Omega_{\Phi}$, $\varphi_2 \in \Omega_{\Psi}$ и $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Пусть $\Psi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ и $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, то условие

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Psi^{-1}(t^{-n})\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(s^{-n})}\le C\varphi_2(r) \tag{20}$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ и $\Psi\in\Delta_2$, то условие

$$t^\alpha\varphi_1(t)\le C\varphi_2(t) \tag{21}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Psi^{-1}(t)=\Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ и $\Phi,\Psi\in\Delta_2\cap\nabla_2$. Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^\alpha\varphi_1(t)\le Cr^\alpha\varphi_1(r) \tag{22}$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, тогда условие (21) является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Если мы возьмем $\Phi(t)=t^p$, $\Psi(t)=t^q$, $p,q\in[1,\infty)$ в Теореме 15, то получим следующий новый результат для обобщенных пространств Морри.

Следствие 3. Пусть $p,q\in[1,\infty)$, $0\le\alpha<n$, $\varphi_1\in\Omega_p\equiv\Omega_{t^p}$, $\varphi_2\in\Omega_q$ и $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Пусть $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$, тогда условие

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi_1(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}}}\le C\varphi_2(r)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$, то условие (21) является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ удовлетворяет условию (22), то условие (21) является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 16. Пусть $0 < \alpha < n$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, Φ функция Юнга при $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Пусть $\varphi \in \Omega_\Phi$ удовлетворяет условиям (20) и

$$r^\alpha \varphi(x,r) + \sup_{r<t<\infty}\left(1 + \ln\frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi(x,t) \le C\varphi(x,r)^\beta$$

для некоторого $\beta \in (0,1)$ и для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $r>0$. Определим $\eta(x,r) \equiv \varphi(x,r)^\beta$ и $\Psi(r) \equiv \Phi(r^{1/\beta})$. Тогда оператор $M_{b,\alpha}$ является ограниченным из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Одним из наших основных результатов является следующая

Теорема 17 (Результат типа Адамса). Пусть $0 < \alpha < n, \Phi \in \Delta_2$, $\varphi \in \Omega_\Phi$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in (0,1)$, $\eta(r) \equiv \varphi(r)^\beta$ и $\Psi(r) \equiv \Phi(r^{1/\beta})$.

1. Если $\Phi \in \nabla_2$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет (20), то условие

$$r^\alpha \varphi(r) + \sup_{r<t<\infty}\left(1 + \ln\frac{t}{r}\right) \varphi(t) t^\alpha \le C\varphi(r)^\beta$$

для всех $r > 0$, где $C > 0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$, то условие

$$r^\alpha \varphi(r) \le C\varphi(r)^\beta \tag{23}$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi \in \nabla_2$. Если $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\le Cr^{\alpha}\varphi(r)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, то условие (23) является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Если мы возьмем $\Phi(t)=t^p$, $p\in[1,\infty)$ и $\beta=\frac{p}{q}$ при $p<q<\infty$ в Теореме 17, то получим следующий новый результат для обобщенных пространств Морри.

Следствие 4. Пусть $0<\alpha<n$, $1\le p<q<\infty$, $\varphi\in\Omega_p$ и $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Если $1<p<\infty$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi(s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}}\le C\varphi(r), \qquad (24)$$

то условие

$$r^{\alpha}\varphi(r)+\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

для всех $r>0$ и $C>0$ не зависящих от r, является достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_{\Phi}$, то условие

$$r^{\alpha}\varphi(r)\le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}} \qquad (25)$$

для всех $r>0$ и $C>0$ не зависящих от r, является необходимым для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1<p<\infty$. Если $\varphi\in\mathcal{G}_{\Phi}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^{\alpha}\le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}}$$

для всех $r>0$ и $C>0$ не зависящих от r, то условие (23) является необходимым и достаточным для ограниченности $M_{b,\alpha}$ из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

В второй главе получены необходимые и достаточные условия для ограниченности типа Спанне и типа Адамса потенциала Рисса I_α в обобщенных пространствах $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}$, соответственно.

Теорема 18 (Результат типа Спанне). Пусть Φ,Ψ функции Юнга, $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$ и $0<\alpha<n$.

1. Если функции (Φ,Ψ) удовлетворяют условиям $\Phi\in\nabla_2$, (6), то условие

$$\int_t^{\infty}\operatorname*{ess\,inf}_{r<s<\infty}\frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}s^{-n})}\Psi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})\frac{dr}{r}\le C\varphi_2(t) \qquad (26)$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$, то условие

$$t^{\alpha}\varphi_1(t)\le C\varphi_2(t) \qquad (27)$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть функции (Φ,Ψ) удовлетворяют условиям $\Phi\in\nabla_2$, (6). Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию типа регулярности

$$\int_t^{\infty}\frac{\Psi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})}{\Phi^{-1}(\upsilon_n^{-1}r^{-n})}\varphi_1(r)\frac{dr}{r}\le Ct^{\alpha}\varphi_1(t), \qquad (28)$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие (27) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Если мы возьмем $\Phi(t)=t^p$, $\Psi(t)=t^q$, $p,q\in[1,\infty)$ в Теореме 18, то получим следующий новый результат для обобщенных пространств Морри.

Следствие 5. Пусть $0<\alpha<n$ и $p,q\in[1,\infty)$.

1. Если $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ и $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$, то условие

$$\int_t^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{r<s<\infty} \varphi_1(s)s^{\frac{n}{p}}}{r^{\frac{n}{q}}}\frac{dr}{r}\le C\varphi_2(t), \tag{29}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_p\equiv\mathcal{G}_{t^p}$, то условие (27) является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ и $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$. Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_p$ удовлетворяет условию регулярности

$$\int_t^\infty r^\alpha\varphi_1(r)\frac{dr}{r}\le Ct^\alpha\varphi_1(t), \tag{30}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие (27) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Одним из полученных нами важных результатов является следующая

Теорема 19 (Результат типа Адамса для I_α). Пусть $0<\alpha<n$, $\Phi\in\mathcal{Y}$, $\beta\in(0,1)$ и $\eta(t)\equiv\varphi(t)^\beta$, а $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (13), то условие

$$t^\alpha\varphi(t)+\int_t^\infty r^\alpha\varphi(r)\frac{dr}{r}\le C\varphi(t)^\beta, \tag{31}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$, то условие

$$t^\alpha\varphi(t)\le C\varphi(t)^\beta \tag{32}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi\in\nabla_2$. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию регулярности

$$\int_t^\infty r^\alpha\varphi(r)\frac{dr}{r}\le Ct^\alpha\varphi(t) \tag{33}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, то условие (32) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Если взять $\Phi(t)=t^p,\ p\in[1,\infty)$ и $\beta=\dfrac{p}{q}$ при $p<q<\infty$ в Теореме 19, то получим следующий новый результат для обобщенных пространств Морри.

Следствие 6. Пусть $1<p<q<\infty$.

1. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (18), то условие

$$t^\alpha\varphi(t)+\int_t^\infty r^\alpha\varphi(r)\frac{dr}{r}\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}}, \tag{34}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_p$, то условие

$$t^\alpha\varphi(t)\le C\varphi(t)^{\frac{p}{q}} \tag{35}$$

для всех $t>0$, где $C>0$ не зависит от t, является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\varphi\in\mathcal{G}_p$ удовлетворяет условию регулярности (33),

то условие (35) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(\mathbb{R}^n)$.

В 2.5 получены необходимые и достаточные условия для ограниченности типа Спанне и типа Адамса коммутатора $[b, I_\alpha]$ в обобщенных пространствах Орлича-Морри, соответственно.

Следующая теорема является одним из наших основных результатов.

Теорема 20 (Результат типа Спанне для $[b, I_\alpha]$). Пусть $0<\alpha<n$ и $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

1. Пусть Φ функция Юнга и Ψ определена через ее обратную $\Psi^{-1}(t)$, следующим образом $\Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}, t \in (0,\infty)$. Если $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, то условие

$$\int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(s)}{\Phi^{-1}(s^{-n})} \Psi^{-1}(t^{-n}) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(r),$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Пусть Φ, Ψ функции Юнга. Если $\Psi \in \Delta_2$ и $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$, то условие (27) является необходимым для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть Φ функция Юнга и Ψ определенная как обратная по множеству для всех $t \in (0,\infty), \Psi^{-1}(t) := \Phi^{-1}(t)t^{-\alpha/n}$ и $\Phi, \Psi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$.

Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию типа регулярности

$$\int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right) t^\alpha \varphi_1(t) \frac{dt}{t} \le C r^\alpha \varphi_1(r), \qquad (36)$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, то условие (27) является необходимым и достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 21 (Результат типа Адамса для $[b, I_\alpha]$). Пусть $0<\alpha<n$, $\Phi \in \mathcal{Y}$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in (0,1)$ и $\eta(t) \equiv \varphi(t)^\beta$ и $\Psi(t) \equiv \Phi(t^{1/\beta})$.

1. Если $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(|B(x,t)|^{-1})\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x,s)|^{-1})} \le C\varphi(x,r),$$

где C не зависит от x и r, то условие

$$r^\alpha\varphi(r)+\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^\alpha\frac{dt}{t} \le C\varphi(r)^\beta,$$

для всех $r>0$, где $C>0$ не зависит от r, является достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\Phi \in \Delta_2$ и $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$, то условие (32) является необходимым для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. Если $\varphi \in \mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t) \le C\varphi(r), \tag{37}$$

и

$$\int_r^\infty\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi(t)t^\alpha\frac{dt}{t} \le Cr^\alpha\varphi(r), \tag{38}$$

для всех $r > 0$, где $C > 0$ не зависит от r, то условие (32) является необходимым и достаточным для ограниченности $|b, I_\alpha|$ из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

В 2.6 получены необходимые и достаточные условия для слабой ограниченности типа Спанне и типа Адамса потенциала Рисса I_α в слабых обобщенных пространствах $W\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, соответственно.

Теорема 22 (Слабая версия результата типа Спанне). Пусть $0<\alpha<n$ и Φ,Ψ функции Юнга, $\Phi,\Psi\in\mathcal{Y}$.

1. Если функция (Φ,Ψ) удовлетворяют условию (6), то условие (26) является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если функция $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$, то условие (27) является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть функции (Φ,Ψ) удовлетворяют условию (6). Если $\varphi_1\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию (28), то условие (27) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Следующая теорема является одним из наших важных результатов.

Теорема 23 (Слабая версия результата типа Адамса). Пусть $0<\alpha<n$, $\Phi\in\mathcal{Y}$, $\beta\in(0,1)$ и $\eta(t)\equiv\varphi(t)^\beta$, $\Psi(t)\equiv\Phi(t^{1/\beta})$.

1. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет (13), то условие (31) является достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$, то условие (32) является необходимым для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

3. Если $\varphi\in\mathcal{G}_\Phi$ удовлетворяет условию регулярности (33), то условие (32) является необходимым и достаточным для ограниченности I_α из $\mathcal{M}^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в $W\mathcal{M}^{\Psi,\eta}(\mathbb{R}^n)$.

Третья глава посвящена ограниченности максимальных операторов и интегральных операторов в некоторых весовых модулярных пространствах.

В 3.1 получены необходимые и достаточные условия для ограниченности максимального оператора и его коммутатора в обобщенных весовых пространствах Орлича-Морри.

Определение 9. Для $1<p<\infty$, локально интегрируемая функция $w:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ называется A_p весом, если

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{-\frac{p'}{p}}dx\right)^{\frac{p'}{p}}<\infty.$$

Локально интегрируемая функция $w:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ называется A_1 весом, если

$$\frac{1}{|B|}\int_B w(y)dy\le Cw(x),\ \text{для}\ x\in B,$$

для некоторой постоянной $C>0$. Определим $A_\infty=\bigcup_{p\ge1}A_p$.

Для любого $w\in A_\infty$ и любого измеримого по Лебегу множества E, запишем $w(E)=\int_E w(x)dx$.

Определение 10. Пусть φ положительная измеримая функция на $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, пусть w неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^n$ и Φ любая функция Юнга. Обозначим через $M_w^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ обобщенное весовое пространство Орлича-Морри, пространство всех функций $f\in L_w^{\Phi,loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{M_w^{\Phi,\varphi}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,r>0}\varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(w(B(x,r))^{-1})\|f\|_{L_w^{\Phi}(B(x,r))}\equiv$$

$$\equiv\sup_{B\in\mathcal{B}}\varphi(B)^{-1}\Phi^{-1}(w(B)^{-1})\|f\|_{L_w^{\Phi}(B)}<\infty.$$

Одним из основных результатов параграфа является следующая

Теорема 24. Φ функция Юнга и φ_1,φ_2 положительные измеримые функции на $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$.

1. Если $\Phi\in\nabla_2$ и $w\in A_{i_\Phi}$, то условие

$$\sup_{r<t<\infty}\left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})}\right)\Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1})\le C\varphi_2(x,r),\quad(39)$$

где C не зависит от x и r, является достаточным для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$, то условие

$$\varphi_1(x,r) \le C\varphi_2(x,r), \tag{40}$$

где C не зависит от x и r, является необходимым для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi \in \nabla_2$ и $w \in A_{i_\Phi}$. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$, то условие (40) является необходимым и достаточным для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $WM_w^{\Phi,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ слабое обобщенное весовое пространство Орлича-Морри, пространство всех функций $f \in WL_w^{\Phi,loc}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\| f \|_{WM_w^{\Phi,\varphi}} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1}\Phi^{-1}(w(B(x,r))^{-1}) \| f \|_{WL_w^{\Phi}(B(x,r))} < \infty.$$

Теорема 25. Пусть Φ функция Юнга и φ_1, φ_2 положительные измеримые функции на $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

1. Если $w \in A_{i_\Phi}$, то условие (39) является достаточным для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$, то условие (40) является необходимым для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $w \in A_{i_\Phi}$. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$, то условие (40) является необходимым и достаточным для ограниченности M из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $WM_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Для ограниченности коммутатора M_b имеет место

Теорема 26. Пусть $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, Φ функция Юнга и φ_1, φ_2 положительные измеримые функции на $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

1. Пусть $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ и $w \in A_1$, тогда условие

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1}) \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})} \le C\varphi_2(x,r),$$

где C не зависит от x и r, является достаточным для ограниченности M_b из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

2. Если $\Phi \in \Delta_2$, $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$ и $w \in A_1$, то условие (40) является необходимым для ограниченности M_b из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

3. Пусть $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ и $w \in A_1$. Если $\varphi_1 \in \mathcal{G}_w^{\Phi}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\varphi_1(x,t) \le C\varphi_1(x,r),$$

где C не зависит от x и r, то условие (40) является необходимым и достаточным для ограниченности M_b из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

В 3.2 получена ограниченность максимального оператора в векторно - значных обобщенных прстранствах Орлича-Морри.

Определение 11. Пусть φ положительная измеримая функция на $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, w неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, Φ функция Юнга и $1 \le q \le \infty$. Обобщенное векторнозначное весовое пространство Орлича-Морри $M_w^{\Phi,\varphi}(l_q) = M_w^{\Phi,\varphi}(l_q,\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех последовательностей $F = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ для измеримых функций по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi}(l_q)} = \| \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \|_{M_w^{\Phi,\varphi}(l_q)} := \left\| \| \{f_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \|_{l_q} \right\|_{M_w^{\Phi,\varphi}} < \infty.$$

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 27. Пусть $1 < q < \infty$, Φ функция Юнга с $\Phi \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, $w \in A_1$ и $(\Phi, \varphi_1, \varphi_2)$ удовлетворяет условию

$$\int_r^{\infty}\left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(w(B(x,s))^{-1})}\right)\Phi^{-1}(w(B(x,t))^{-1})\frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r),$$

где C не зависит от x и r. Тогда максимальный оператор M является ограниченным из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_q)$, т.е., существует постоянная $C>0$ такая, что справедливо

$$\| MF \|_{M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_q)} \le C \| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)}$$

для всех $F=\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_q)$.

Отметим, что для $q=\infty$, имеем следующий более общий результат.

Теорема 28. Пусть $w \in A_{i_\Phi}$, $\Phi \in \nabla_2$ и $(\Phi,\varphi_1,\varphi_2)$ удовлетворяет условию (39). Тогда максимальный оператор M является ограниченным из $M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)$ в $M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_\infty)$, т.е., существует такая постоянная $C>0$, что справедливо

$$\| MF \|_{M_w^{\Phi,\varphi_2}(l_\infty)} \le C \| F \|_{M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)}$$

для всех $F=\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \in M_w^{\Phi,\varphi_1}(l_\infty)$.

В 3.3 приводятся условия интегрального типа на весы, которые обеспечивают ограниченность оператора Рисса из одного модулярного p-выпуклого весового БФП в другое и доказывается двухвесовое неравенство для потенциала. В частности, приводятся достаточные условия на весовые функции, которые обеспечивают ограниченность потенциала Рисса в пространстве Мусилака-Орлича.

Пусть (Ω,μ) полное σ-конечное измеримое пространство. Через $L_0=L_0(\Omega,\mu)$ обозначим совокупность всех вещественнозначных μ-измеримых функций на Ω.

Определение 12. Говорят, что вещественное нормированное пространство X называется БФП, если выполняются следующие условия:

P$_1$) норма $\| f \|_X$ определяется для каждой μ-измеримой функции f и $f \in X$ тогда, только тогда когда $\| f \|_X < \infty$ и $\| f \|_X = 0$ тогда только тогда, когда $f=0$ п.в.,

P$_2$) $\| f \|_X = \| |f| \|_X$ для всех $f \in X$,

P$_3$) если $0 \le f_n \uparrow f \le g$ п.в., то $\| f_n \|_X \uparrow \| f \|_X$ (свойство Фату),

P$_4$) если E измеримое подмножество множества Ω такое, что $\mu(E) < \infty$, то $\| \chi_E \| < \infty$, где χ_E характеристическая функция мно-жества E.

P$_5$) для любого измеримого множества $E \subset \Omega$ при $\mu(E) < \infty$ существует постоянная $C_E > 0$ удовлетворяющая неравенству

$$\int_E f(x)dx \le C_E \| f \|_X .$$

Пусть $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Для $k \in Z$ определим

$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^k < |x| \le 2^{k+1}\}$, $E_{k,2} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2}\}$,

$E_{k,1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^{k-1}\}$, $E_{k,3} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2^{k+2}\}$.

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 29. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ весовые функции на $\mathbb{R}^n$. Пусть X и Y БФП функций на $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега и нормами $\|.\|_{X(\mathbb{R}^n)}$ и $\|.\|_{Y(\mathbb{R}^n)}$, соответственно. Предположим, что $X_v(\mathbb{R}^n)$ и $Y_w(\mathbb{R}^n)$ соответствующие весовые пространства и существует $p > 1$ такое, что $Y_w(\mathbb{R}^n)$ является модулярным p-выпуклым весовым БФП. Пусть $I_s \in [L_p(\mathbb{R}^n); Y(\mathbb{R}^n)]$, $X_v(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{p,v}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяется следующие условия:

1) $$A = \sup_{t>0} \left(\int_{|y|<t} v(y)^{-p'} dy \right)^{\alpha/p'} \left\| \frac{\chi_{\{|x|>t\}}}{|x|^{n-s}} \left(\int_{|y|<|x|} v(y)^{-p'} dy \right)^{(1-\alpha')/p'} \right\|_{Y_w} < \infty ,$$

2) $$B = \sup_{t>0} \left(\int_{|y|>t} (v(y)|y|^{n-s})^{-p'} dy \right)^{\beta/p'} \left\| \chi_{\{|x|<t\}} \left(\int_{|y|>x} (v(y)|y|^{n-s})^{-p'} dy \right)^{(1-\beta)/p'} \right\|_{Y_w} < \infty,$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$;

3) существует такое $C>0$,что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in E_k} w(y) \le C \operatorname*{ess\,inf}_{y\in E_{k,2}} v(y), \quad \forall k\in Z,$$

4) существует такое $C>0$,что

$$\| \sum_k | g_k | \chi_{E_k} \|^p_{Y_w(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_k \| | g_k | \chi_{E_k} \|^p_{Y_w(\mathbb{R}^n)} .$$

Тогда $I_s \in [X_v(\mathbb{R}^n); Y_w(\mathbb{R}^n)]$.

В четвертой главе изучаются интегральные операторы в некоторых функциональных пространствах типа Морри. В 4.1 изложены необходимые и достаточные условия для ограниченности мультисублинейного дробно-максимального оператора $\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}$ на произведении модифицированных пространствах Морри.

Определение 13. Пусть $1\le p<\infty, 0\le\lambda\le n$. Обозначим через $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ пространство Морри, а через $WL^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ слабое пространство Морри, множество локально интегрируемых функций $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, с конечными нормами

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{L^p(B(x,r))}, \| f \|_{WL^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{WL^p(B(x,r))}$$

соответственно.

Определение 14. Пусть $1\le p<\infty$, $0\le\lambda\le n$, $[r]=\min\{1,r\}$. Обозначим через $\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ модифицированное пространство Морри, а через $W\tilde{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ слабое модифицированное пространство Морри множество локально интегрируемых функций $f(x), x\in\mathbb{R}^n$ с конечными нормами

$$\| f \|_{\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} [r]^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{\tilde{L}^p(B(x,r))}, \| f \|_{W\tilde{L}^{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} [r]^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{W\tilde{L}^p(B(x,r))}$$

соответственно.

Пусть $1<s\le\infty$, $\Omega\in L^s(\mathbb{S}^{mn-1})$ однородная функция степени нуль на $\mathbb{R}^{mn}$. Мультисублинейный дробно-максимальный оператор $\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}$ с грубым ядром Ω определен в виде

$$\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}(\vec{f})(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{nm-\alpha}}\int_{B(\vec{0},r)}|\Omega(\vec{y})|\prod_{j=1}^{m}|f_j(x-y_j)|\,d\vec{y},\ \ 0\le\alpha<nm.$$

Одним из основных результатов параграфа является следующая

Теорема 30. Пусть $0<\alpha<mn$, $1\le s'<\dfrac{mn}{\alpha}$ и $\Omega\in L^s(\mathbb{S}^{mn-1})$. Предположим, что $\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\lambda_j}{p_j}=\dfrac{\lambda}{p}$, $\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\lambda_j}{q_j}=\dfrac{\lambda}{q}$.

(i) Если $p>s'$, $\dfrac{\alpha}{mn}\le\dfrac{1}{p_j}-\dfrac{1}{q_j}\le\dfrac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ и $0\le\lambda_j<n-\dfrac{\alpha p_j}{m}$, то условие $\dfrac{\alpha}{n}\le\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\le\dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения модифицированных пространств Морри $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в модифицированное пространство Морри $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $f\in\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}f\|_{\tilde{L}^{q,\lambda}}\le C\prod_{j=1}^{m}\|f_j\|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

(ii) Если $p=s'$, $\dfrac{\alpha}{mn}\le\dfrac{1}{p_j}-\dfrac{1}{p_jq_j}\le\dfrac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ и $0\le\lambda_j<n-\dfrac{\alpha p_j}{m}$, то условие $\dfrac{\alpha}{n}\le\dfrac{1}{s'}-\dfrac{1}{q}\le\dfrac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения модифицированных пространств Морри $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в слабое модифицированное пространство Морри $W\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\| \mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m} f \|_{W\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C\prod_{j=1}^{m}\| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

(iii) Если $s' \le \frac{mn-\lambda}{\alpha} \le p \le \frac{mn}{\alpha}$, то оператор $\mathcal{M}_{\Omega,\alpha,m}$ является ограниченным из $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

В 4.2 изложены необходимые и достаточные условия для ограниченности мультилинейного дробно-интегрального оператора $I_{\Omega,\alpha,m}$ на произведении пространств Морри и на произведении модифицированных пространств Морри.

Мультилинейный интегральный оператор с грубым ядром Ω определяется в виде

$$I_{\Omega,\alpha,m}(\vec{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\Omega(\vec{y})}{|\vec{y}|^{nm-\alpha}} \prod_{j=1}^{m} f_j(x-y_j)d\vec{y}.$$

Теорема 31. Пусть $0<\alpha<mn$, $1<s\le\infty$ и $\Omega \in L^s(\mathbb{S}^{mn-1})$. Пусть также $\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{p_j} = \frac{\lambda}{p}$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} = \frac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}$ и $0 \le \lambda_j < n - \frac{\alpha p_j}{m}$, $j=1,...,m$.

(i) Если $p > s'$ и $\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{q_j} = \frac{\lambda}{q}$, то условие $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $I_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения пространств Морри $L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $f \in L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{L^{q,\lambda}} \le C\prod_{j=1}^{m}\| f_j \|_{L^{p_j,\lambda_j}}.$$

(ii) Если $p = s'$ и $\lambda\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j q_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{p_j q_j}$, то условие $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности

оператора $I_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения пространств Морри $L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в слабое пространство Морри $WL^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $f\in L^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{WL^{q,\lambda}} \le C\prod_{j=1}^{m}\| f_j \|_{L^{p_j,\lambda_j}}.$$

Одним из основных результатов параграфа является следующая

Теорема 32. Пусть $0<\alpha<mn,\ 1<s\le\infty$ и $\Omega\in L^s(\mathbb{S}^{mn-1})$. Пусть также

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{p_j}=\frac{\lambda}{p},\ \ \frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}=\frac{\alpha}{m(n-\lambda_j)}\ \text{ и }\ 0\le\lambda_j<n-\frac{\alpha p_j}{m},\ j=1,\dots,m.$$

(i) Если $p>s'$ и $\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{q_j}=\frac{\lambda}{q}$, то условие $\frac{\alpha}{n}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le\frac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $I_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения модифицированных пространств Морри $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в $\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $f\in\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C\prod_{j=1}^{m}\| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

(ii) Если $p=s'$ и $\lambda\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_jq_j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{p_jq_j}$, то условие $\frac{\alpha}{n}\le\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\le\frac{\alpha}{n-\lambda}$ является необходимым и достаточным для ограниченности оператора $I_{\Omega,\alpha,m}$ из произведения модифицированных пространств Морри $\tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ в слабое пространство Морри $W\tilde{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, существуя положительная постоянная C такая, что для всех

$f \in \tilde{L}^{p_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \tilde{L}^{p_m,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$

$$\| I_{\Omega,\alpha,m} f \|_{W\tilde{L}^{q,\lambda}} \le C \prod_{j=1}^{m} \| f_j \|_{\tilde{L}^{p_j,\lambda_j}}.$$

В 4.3 найдены достаточные условия на пары $(\varphi_1, \varphi_2, \Phi)$, которые обеспечивают ограниченность параметрического интеграла Марцинкевича μ_Ω^ρ из одного обобщенного пространства Орлича-Морри в другое. Как применение этого результата доказана ограниченность интеграла Марцинкевича связанного с оператором Шредингера в обобщенном пространстве Орлича-Морри.

Определим параметрический интегральный оператор Марцинкевича более высокого порядка следующим образом.

$$\mu_\Omega^\rho(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{t^\rho} \int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-p}} f(y)dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $0 < \rho < n$.

Мы используем следующие числовые характеристики для функции Юнга:

$$a_\Phi := \inf_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}, \quad b_\Phi := \sup_{t\in(0,\infty)} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}.$$

Теорема 33. Пусть $0 < \rho < n$, Ф любая функция Юнга, φ_1, φ_2 и Ф удовлетворяют условию

$$\int_r^\infty \left(\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \frac{\varphi_1(x,s)}{\Phi^{-1}(|B(x_0,s)|^{-1})} \right) \Phi^{-1}(|B(x_0,t)|^{-1}) \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(x,r), \quad (41)$$

где C не зависит от x и r. Пусть также $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$. Если Ф удовлетворяет условию $1 < a_\Phi \le b_\Phi < \infty$, то оператор μ_Ω^ρ является ограниченным из $M^{\Phi,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ в $M^{\Phi,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$.

Аналогично классической функции Марцинкевича, определим функции Марцинкевича μ_j, связанные с оператором Шредингера L в виде

$$\mu_j^L f(x) = \left(\int_0^\infty \left| \int_{|x-y|\le t} K_j^L(x,y) f(y) dy \right|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_j^L(x,y) = K_j^L(x,y)\,|x-y|$ и $K_j^L(x,y)$ является ядром для $R_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} L^{-\frac{1}{2}}$, $j = 1,\dots,n.$

Теорема 34. Пусть $V \in B_n$, Φ функция Юнга, (φ_1, φ_2) удовлетворяют условию (41). Если $1 < a_\Phi \le b_\Phi < \infty$, то оператор μ_j^L является ограниченным из M^{Φ,φ_1} в M^{Φ,φ_2}.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена получению критерии ограниченности максимальных операторов и интегральных операторов и их коммутаторов в некоторых функциональных пространствах.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимальных операторов и их коммутаторов в пространствах Орлича.

2. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности потенциала Рисса и ее коммутатора в пространствах Орлича.

3. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-максимальных операторов и их коммутаторов в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

4. Найдены необходимые и достаточные условия для ограниченности потенциала Рисса и ее коммутатора в обобщенных пространствах Орлича-Морри.

5. Доказано необходимое и достаточное условие для слабой ограниченности потенциала Рисса.

6. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности максимального оператора и его коммутатора в обобщенных весовых пространствах Орлича-Морри.

7. Изучена ограниченность максимального оператора в обобщенных векторно-значных весовых пространствах Орлича-Морри.

8. Доказаны двухвесовые неравенства для потенциала Рисса в p-выпуклых весовых модулярных банаховых функциональных пространствах.

9. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности мультисублинейного дробно-максимального оператора на произведении модифицированных пространств Морри.

10. Доказаны необходимые и достаточные условия для ограниченности дробно-интегрального оператора на произведении пространств Морри и на произведении модифицированных пространств Морри.

11. Изучена ограниченность параметрического интеграла Марцинкевича на обобщенных пространствах Орлича-Морри.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту член.–корр. НАНА, профессору В.С. Гулиеву за постоянное внимание к работе, ценные советы и полезные обсуждения.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough maximal operator on product Morrey and product modified Morrey spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2014, 4(2), -p. 57-65.

2. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough fractional maximal operator on product Morrey spaces // Journal of Contemporary Applied Mathematics, -2015, 4(2), -p. 66-76.

3. Hasanov, S.G. Multisublinear rough fractional maximal operator on product modified Morrey spaces // 7rd International Conference “Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications”, MADEA-7, -Baku, -08-13 Sept., -2015, -p. 66-67.

4. Hasanov, S.G. Multi-sublinear rough fractional maximal operator on product modified Morrey spaces // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics , -2015, 41(1), -p. 77-87.

5. Hasanov, S.G. Marcinkiewicz integral and its commutators on local Morrey type spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2015, 35(4), -p. 84-94.

6. Hasanov, S.G. Marcinkiewicz integral and its commutators on local Morrey type spaces // 7rd International Workshop “Nonharmonic Analysis And Differential Operators”, -Baku, -25-27 May, -2016, -p. 44.

7. Hasanov, S.G. Multilinear rough fractional integral operators on product Morrey spaces // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2016, 4(1), -p. 112-119.

8. Hasanov, S.G. Multilinear rough fractional integral on product modified Morrey spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical

and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2016, 36(4), -p.99-107.

9. Deringoz F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Characterizations for the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz-Morrey spaces // Journal of Inequalities and Applications, -2016, 248(1), -22 p.

10. Deringoz, F., Hasanov, S.G. Parametric Marcinkiewicz integral operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2016, 36(4), -p.70-76.

11. Hasanov, S.G. Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces // International Conference devoted to the 80-th anniversary of acad. Akif Gadjiev, -Baku, -06-08 Dec., -2017, -p. 91.

12. Deringoz, F, Hasanov, S.G. Parametric Marcinkiewicz integral operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // International Conference "Operators in Morrey type spaces and Appl.", OMTSA-2017, -Kirsehir: -2017, -10-13 July, -p. 158.

13. Bandaliyev, R.A., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Two-weighted inequalities for the Riesz potential in p-convex weighted modular Banach function spaces // Ukrainian Mathematical Journal, -2017, 69(11), -p. 1443-1454

14. Bandaliyev, R.A., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Correction to "Two-weighted inequalities for the Riesz potential in p-convex weighted modular Banach function spaces" // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2021, 41(4), - p. 42-44.

15. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. A characterization for Adams type boundedness of the fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Integral Transforms

and Special Functions, -2017, 28(4), -p. 284-299.

16. Guliyev, V.S., Deringoz, F., Hasanov, S.G. Riesz potential and its commutators on Orlicz spaces // Journal of Inequalities and Applications, -2017, 75(1), -18 p.

17. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Maximal operator and its commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces // Tokyo Journal of Mathematics, -2018, 41(2), -p. 347-369.

18. Deringoz, F., Guliyev, V.S., Hasanov, S.G. Commutators of fractional maximal operator on generalized Orlicz-Morrey spaces // Positivity, -2018, 22(1), -p. 141-158.

19. Guliyev, V.S., Deringos, F., Hasanov, S.G. Commutators of fractional maximal operator on Orlicz spaces // Mathematical Notes, -2018, 104 (3,4), -p. 498-507.

20. Guliyev, V.S., Deringoz, F., Hasanov, S.G. Fractional maximal function and its commutators on Orlicz spaces // Analysis and Mathematical Physics Journal, -2019, 9(1), -p. 165-179.

21. Hasanov, S.G. New characterizations of BMO spaces via commutators on Orlicz spaces // 3rd International Conference entitled Operators in General Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA 2019), -Kirsehir: -16-20 July, -2019, -p.88.

22. Hasanov, S.G. Characterizations of maximal operators in generalized weighted Orlicz-Morrey spaces // International Conference on “Modern Problems of Mathematics and Mechanics”(MPMM-2019), -Baku: -23-25 October, -2019, -p. 234-235.

Защита диссертации состоится **04 марта 2022 года в 14^{00}** часов на заседании Диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **28 января 2022 года.**

Подписано в печать: 14.01.2022
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 76648
Тираж: 70