АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ С АКУСТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ И ЗАПОМИНАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Специальность: 1211.01 - Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Севда Эльхан кызы Исаева**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2022

Диссертационная работа выполнена в отделе «Дифференциальные уравнения» **Института Математики и Механики НАН Азербайджана** и на кафедре «Дифференциальные и интегральные уравнения» **Бакинского Государственного Университета**

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Акбар Байрам оглы Алиев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Таир Сади оглы Гаджиев

доктор физико-математических наук, профессор
Гамлет Фарман оглы Гулиев

доктор физико-математических наук, профессор
Алик Малик оглы Наджафов

доктор математических наук, профессор
Махир Мирзахан оглы Сабзалиев

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Председатель диссертационного совета:

член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., профессор

________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.-м.н.

________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

академик, д.ф.-м.н., профессор

________________ **Юсиф Абульфат оглы Мамедов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Данная диссертация посвящена изучению смешанных задач с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений и смешанных задач для нелинейных гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами.

Некоторые задачи механики жидкости и газа сводятся к решению смешанных задач с акустическими граничными условиями. В этой области первые математические исследования проведены в работе J.T.Beale, S.I.Rosencrans. В этой работе авторы получают уравнения в области $\Omega \subset R^3$ с границей Γ:

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_t \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, \infty),$$

$$m\delta_{tt} + d\delta_t + k\delta = -\rho_0 u_t \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, \infty),$$

которые представляют собой теоретическую модель, описывающую безвихревое волновое движение жидкости; здесь ρ_0, m, d, k - физически известные величины, $u(x,t)$ - потенциал скоростей жидкости и $\delta(x,t)$ - перемещение точки $x \in \Gamma$ в момент времени t в направлении нормали ν границы в этой точке. При выводе этой модели предполагалось, что каждая точка поверхности Γ реагирует как пружина на избыточное давление акустической волны и что разные точки Γ не взаимодействуют друг с другом. Поверхности такого типа называются локально реагирующими.

Изучению смешанных задач с акустическими граничными условиями посвящены многочисленные работы, в которых получены результаты, аналогичные результатам для случая смешанных задач с граничными условиями Дирихле или Неймана. В некоторых работах акустические граничные условия накладываются вместе с однородным условием Дирихле на части границы. В работе A.T.Cousin, C.L.Frota, N.A.Larkin доказаны существование, единственность и экспоненциальное убывание глобальных решений смешанной задачи для обобщенной системы уравнений типа Клейна-Гордона с акустическими граничными условиями на одной части границы и однородным условием Дирихле на оставшейся части границы. В работе C.L.Frota, A.T.Cousin, N.A.Larkin авторы получили результаты об убывании решений для нелинейного волнового уравнения, когда $n=1$; аналогичные результаты получены в работе J.Y.Park, S.H.Park. В работе C.L.Frota, J.A.Goldstein доказаны существование и единственность глобальных решений для смешанной задачи с акустическими граничными условиями на одной части границы и однородным условием Дирихле на оставшейся части границы. В некоторых работах акустические граничные условия накладываются на всей границе. В работе C.L.Frota, L.A.Medeyros, A.Vicente доказаны существование, единственность и экспоненциальное убывание глобальных решений для смешанной задачи в области с нелокально реагирующей поверхностью; а также существование и единственность решений в случае немонотонного диссипативного члена. В работе J.M.Jeong, J.Y.Park, Y.H.Kang доказано разрушение решений для квазилинейного волнового уравнения с акустическими граничными условиями на одной части границы и однородным условием Дирихле на оставшейся части границы. В работе P.J.Graber, B.Said-Houari получены результаты о локальном существовании, глобальном существовании, убывании и разрушении решений смешанной задачи для волнового уравнения с полулинейными акустическими граничными условиями.

Задачи сопряжения возникают в некоторых приложениях физики и биологии. Задачи сопряжения для гиперболических уравнений исследованы в работе R.Dautray, J.L.Lions, где доказаны единственность и регулярность решений для линейной задачи. В работе J.E.Muñoz Rivera, H.Portillo Oquendo рассмотрена задача сопряжения для вязкоупругих волн и доказано экспоненциальное убывание решений. В работе D.Andrade, L.H.Fatori, J.E.Muñoz Rivera доказаны существование и экспоненциальное убывание глобальных решений для задачи сопряжения. В работе J.J.Bae изучена задача сопряжения, где один компонент зажат, а другой находится в вязкоупругой жидкости, производящей диссипацию на границе и получен результат об экспоненциальном убывании решений. В работе W.D.Bastos, C.A.Raposo изучена задача сопряжения с фрикционной диссипацией и получен результат о существовании и единственности решений, а также установлена экспоненциальная устойчивость полной энергии. В работе A.B.Aliev, E.H.Mammadhasanov изучена задача сопряжения, для которой установлен результат о существовании и единственности решений методом динамической регуляризации граничных условий и условий сопряжения.

Но ни в одной из этих работ не рассмотрены смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения, к решению которых сводятся некоторые задачи механики жидкости и газа. В диссертационной работе рассматриваются такие смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений.

Дифференциальные уравнения с запоминающим оператором, особенно уравнения с гистерезисом имеют большое значение среди нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Понятие гистерезисного оператора впервые было введено в работе М.А.Красносельского и А.В.Покровского. Исследование разрешимости задачи Коши и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными с такими нелинейностями является нетривиальной задачей. Особую трудность имеют уравнения с запоминающим оператором, если запоминающий оператор находится под оператором дифференцирования по времени. Глобальная разрешимость и отсутствие глобальных решений для квазилинейных уравнений Соболева, когда нелинейное слагаемое находится под оператором дифференцирования по t, достаточно подробно исследованы в монографии А.Г.Свешникова, А.Б.Альшина, М.О.Корпусова и Ю.Д.Плетнера. Из последующих исследований, проводимых в этом направлении можно отметить работы М.О.Корпусова и А.Г.Свешникова. В работах A.Visintin, M.Hilpert исследованы соответствующие задачи с запоминающим оператором, применяя результаты теории нелинейных полугрупп. Существование, единственность, асимптотический характер периодических решений аналогичных задач для полулинейных и квазилинейных гиперболических уравнений исследованы в работах P.Krejci. В диссертационной работе более подробно изучаются начально-краевые задачи с запоминающими операторами, в которых запоминающий оператор находится под оператором дифференцирования по времени.

В диссертационной работе рассматриваются в основном два направления.

1. Изучаются смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений. В связи с этим большой интерес представляет доказательство существования минимального глобального аттрактора для рассматриваемой задачи.
2. Изучаются начально-краевые задачи для нелинейных гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами, в которых запоминающий оператор находится под оператором дифференцирования по времени.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы являются смешанные задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений и начально-краевые задачи для нелинейных гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами. Предмет исследования - изучение поведения решений смешанных задач с акустическими условиями сопряжения для волновых уравнений с нелинейными фокусирующими и дефокусирующими источниками и начально-краевых задач для гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами и гистерезисными нелинейностями.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является изучение начально-краевых задач с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений, к решению которых сводятся некоторые задачи механики жидкости и газа, а также начально-краевых задач для нелинейных гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами и гистерезисными нелинейностями, которые возникают при описании различных биологических, технологических и химических процессов.

Методы исследования. В диссертации были использованы методы теории дифференциальных уравнений, теории функционального анализа, теории полугрупп, в том числе метод компактности, теоремы вложения, принцип сжимащих отображений, метод дискретизации.

Основные положения, выносимые на защиту:

- исследование существования и единственности решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- изучение поведения решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- исследование существования решений начально-краевой задачи с нелинейными акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- исследование существования решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с фокусирующими источниками;

- исследование существования решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- изучение поведения решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- исследование существования минимального глобального аттрактора начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- исследование существования и поведения решений начально-краевых задач для полулинейного гиперболического и квазилинейного параболического уравнений с запоминающими операторами;
- исследование существования решений смешанной задачи для системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами;
- исследование существования слабых решений смешанной задачи с акустическими граничными условиями для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором.

Научная новизна исследования. Получены следующие основные результаты.

- доказано существование и единственность локальных слабых и локальных сильных решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- для начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками получен результат о существовании глобальных слабых решений, если $p \le \min\{q_1, q_2\}$ и результат о разрушении слабых решений этой задачи за конечный промежуток времени, если $p > \max\{q_1, q_2\}$;

- получен результат о существовании и единственноси локальных слабых решений начально-краевой задачи с нелинейными акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- доказано существование локальных слабых решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с фокусирующими источниками;
- доказано существование, единственность и экспоненциальное убывание глобальных сильных решений начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- получен результат о существовании минимального глобального аттрактора начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- доказано существование и единственность решений начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором, получен результат о существовании минимального глобального аттрактора для этой задачи;
- доказана теорема о существовании решений начально-краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения с запоминающим оператором и получен результат о единственности решений в случае гистерезисной нелинейности;
- получен результат о существовании решений начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения четвертого порядка с запоминающим оператором, доказано существование минимального глобального аттрактора для этой задачи;

- получен результат о существовании решений смешанной задачи для системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами;
- доказано существование и единственность решений смешанной задачи для системы Тимошенко с запоминающим оператором;
- получен результат о существовании слабых решений смешанной задачи с акустическими граничными условиями для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми и представляют теоретический и прикладной интерес. Они могут быть использованы в некоторых задачах механики жидкости и газа, а также в различных биологических, технологических и химических процессах.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах кафедры механико-математического факультета БГУ ”Дифференциальные и интегральные уравнения” (рук. д.ф.-м.н. Я.Т.Мехралиев), на семинарах механико-математического факультета БГУ (рук. д.ф.-м.н., проф. Н.Ш.Искендеров), на семинарах кафедры факультета прикладной математики и кибернетики БГУ ”Уравнения математической физики” (рук. д.ф.-м.н., акад. Ю.А.Мамедов), на семинарах отдела ИММ НАН Азербайджана ”Дифференциальные уравнения” (рук. д.ф.-м.н., проф. А.Б.Алиев) и на общеинститутских семинарах ИММ НАН Азербайджана (рук. член-корр. НАНА, д.ф.-м.н., проф. М.Дж.Марданов). А также в нижеследующих конференциях: на международной конференции по математике и механике, посвященной 50 летию института математики и механики НАН Азербайджана (Баку, 2009), Third Congress of the World Mathematical Society of Turkish Countries (Алма-ата, 2009), на IV международной конференции ”Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения” (Махачкала, 2009), на международной конференции посвященной 80 летнему юбилею академика Ф.Г.Максудова ”Спектральная теория и ее приложения” (Баку, 2010), на международной школе-семинаре ”Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2010), на международной конференции посвященной 100 летнему юбилею академика З.И.Халилова (Баку, 2011), на VI международной научной конференции ”Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения” (Махачкала, 2013), на международной конференции, посвященной 55 летию института математики и механики НАН Азербайджана (Баку, 2014), на V Международной научной конференции ”Международные Колмогоровские чтения - XIV, посвященные 100 летию проф. З.А.Скопеца” (Коряжма, 2017), на XII международной конференции ”Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики” (Махачкала, 2017), VI congress of the Turkic world mathematical society (Астана, 2017), на международной конференции посвященной 100 летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 2017), на международной конференции, посвященной 70 летию профессора Г.А.Исаханлы (Баку, 2018), на международной научно-практической конференции ”Новейшие достижения и успехи развития технических наук” (Краснодар, 2018), VI International Conference on Control and Optimization with Industiral Applications (Баку, 2018), IX International Conference of the Georgian Mathematical Union (Батуми-Тбилиси, 2018), на международной научно-практической конференции ”Современная математика и ее приложения” (Грозный, 2018), на V международной конференции, посвященной 95 летию со дня рождения Л. Д. Кудрявцева ”Функциональные пространства” (Москва, 2018), на международной конференции, посвященной 90 летию со дня рождения академика Азада Мирзаджанызаде (Баку, 2018), на международной конференции, посвященной 80 летию со дня рождения академика Мираббаса Касимова (Баку, 2019), VIII International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications Dedicated to the 100th Anniversary of Baku State

University (IECMSA-2019) (Баку, 2019), на XIII международной конференции, приуроченной к 55 летию факультета математики и компьютерных наук (Махачкала, 2019), на IV Всероссийской конференции с международным участием “Математическое моделирование и информационные технологии” (Сыктывкар, 2020).

Личный вклад автора. Все полученные результаты принадлежат автору.

- Получен результат о существовании глобальных слабых решений для начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками, если $p \le \min\left\{q_1, q_2\right\}$ и результат о разрушении слабых решений этой задачи за конечный промежуток времени, если $p > \max\left\{q_1, q_2\right\}$;
- Получен результат о существовании минимального глобального аттрактора начально-краевой задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками;
- Получен результат о существовании минимального глобального аттрактора начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 53 научных работ: публикации в изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Азербайджанской Республики – 21, материалы конференции – 1, тезисы докладов – 31.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Бакинский Государственный Университет и Институт Математики и Механики НАН Азербайджана.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Титульная страница состоит из 389 знаков, оглавление – из 3321 знаков, введение – из 76000 знаков, основное содержание диссертации – из 388000 знаков (I глава – 136000, II глава – 76000, III глава – 108000, IV глава – 68000), выводы – из 1328 знаков и список использованной литературы – из 21886 знаков. Общий объем диссертационной работы состоит из 490924 знаков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка используемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и показан степень ее разработанности, сформулирована цель и задача исследования, приведена научная новизна, отмечена теоретическая и практическая ценность исследования, а также представлена информация об аппробации работы.

Прежде чем изложить основные результаты, введем некоторые обозначения и определения.

R^N – N -мерное Евклидово пространство $\left(R^1 = R\right)$;
$x = \left(x_1, \ldots, x_N\right)$ – точка пространсва R^N;
$R^+ = \left\{t \in R^1 : t > 0\right\}$;
Z^+ – множество неотрицательных целых чисел;
Ω – область в R^N;
Γ – граница области Ω;
$Q_T = \{(x,t): x \in \Omega, t \in (0,T)\}$;
$u_x = \left(u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}\right)$;
$u_x \upsilon_x = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i} \upsilon_{x_i}$;
$D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω;

$D'(\Omega)$ – пространство, сопряженное к пространству $D(\Omega)$ – пространство распределений в Ω;
$L^p(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с p-й степенью в Ω по мере $dx = dx_1 \dots dx_N$; $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$;
$L^\infty(\Omega)$ – пространство функций, ограниченных почти всюду в Ω, $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$;
$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \upsilon : D^\alpha \upsilon \in L^p(\Omega), \, |\alpha| \le m \right\}$,

$$\|\upsilon\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha \upsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad D^\alpha \upsilon = \frac{\partial \upsilon^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, $\alpha_i \in Z^+$, $i = 1, \ldots, N$;
$W_0^{m,p}(\Omega)$ – замыкание $D(\Omega)$ в $W^{m,p}(\Omega)$;
$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$;
$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$;
$H^{-m}(\Omega) = \left(H_0^m(\Omega) \right)' = W^{-m,2}(\Omega)$;
$H^s(\Omega)$ – пространство Соболева нецелого порядка s;
$C^k(\overline{\Omega})$, $k \in Z^+$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$;
если X – некоторое пространство Банаха, то

$$L^p(0,T;X) = \Big\{ f : f \text{ - измеримое отображение } [0,\mathrm{T}] \to X, \ \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \text{ при } 1 \le p < \infty, \ \operatorname*{sup\,ess}_{t \in (0,T)} \|f(t)\|_X < \infty \text{ при } p = \infty \Big\};$$

$D((0,T);X)$ – пространство C^∞- отображений $(0,\mathrm{T}) \to X$ с компактным носителем в $(0,\mathrm{T})$;

$C^k([0,T];X)$, $k \in Z^+$ – пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $[0,T] \to X$;

$\mathrm{M}(\Omega; C^0([0,T]))$ – пространство измеримых функций, действующих из Ω в $C^0([0,T])$;

$L(X;Y)$ – пространство непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y;

$D'((0,T);X) = L(D(0,T);X)$ – пространство распределений на $(0,\mathrm{T})$ со значениями в X;

$H(\Delta,\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \}$,

$$\|u\|_{H(\Delta,\Omega)} \equiv \|u\|_{\Delta,\Omega} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2};$$

$(u,\upsilon)_i = \int_{\Omega_i} u(x)\upsilon(x)dx$, $\|u\|_i = \left(\int_{\Omega_i} (u(x))^2 dx \right)^{1/2}$ – скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega_i)$, где Ω_i – область в R^N $(i = 1,2)$;

$(\delta,\theta)_\Gamma = \int_\Gamma \delta(x)\theta(x)d\Gamma$, $\|\delta\|_\Gamma = \left(\int_\Gamma (\delta(x))^2 d\Gamma \right)^{1/2}$ – скалярное произведение и норма в $L^2(\Gamma)$, где Γ – граница области Ω;

отображение $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ – оператор следа нулевого порядка;

отображение $\gamma_1 : H(\Delta,\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ – оператор следа Неймана;

$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \text{ п. в.на } \Gamma_1 \}$, где Γ_1 – часть границы Γ области Ω;

$$\|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Приведем известные определения некоторых понятий.

Определение 1. Если $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ - полугруппа, определенная на метрическом пространстве (X,d), то наименьшее непустое ограниченное замкнутое множество $A\subset X$, инвариантное относительно динамической системы, порождающей полугруппу $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ и удовлетворяющее соотношению

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\upsilon\in B}\inf_{u\in A} d(S(t)\upsilon,\, u)=0$$

для любого ограниченного множества $B\subset X$, называется минимальным глобальным аттрактором полугруппы $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Определение 2. Пусть $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ - полугруппа, определенная на метрическом пространстве (X,d). Множество $B_0\subset X$ называется поглощающим, если для любого ограниченного множества $B\subset X$ существует число $t_1(B)$ такое, что

$$S(t)B\subset B_0$$

для любого $t\geq t_1(B)$.

Определение 3. Полугруппа $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, определенная на метрическом пространстве (X,d), называется асимптотически компактной, если для любого ограниченного множества $B\subset X$ такого, что $\bigcup_{t\geq 0}S(t)B$ ограничено в (X,d), любая последовательность вида $\{S(t_k)\upsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $t_k\to\infty$, $\upsilon_k\in B$, имеет сходящуюся подпоследовательность.

Определение 4. Пусть дана система, которая характеризуется двумя скалярными переменными $u(t)$ и $w(t)$ (зависящими от времени) в Банаховом пространстве X, причем $w(t)$ в каждый момент времени $t\in[0,T]$ зависит не только от $u(t)$, но и от предыдущих значений $u(t)$ (то есть, от $u|_{[0,t]}$): $w(t)=[\mathsf{F}(u,\xi^0)](t)$ для $\forall t\in[0,T]$, где $\xi^0\in R^1$- заданное число. Тогда $\mathsf{F}(u,\xi^0)$ называется запоминающим оператором в X.

Определение 5. Для заданного $\xi^0 \in R^1$, запоминающий оператор $\mathsf{F}(u, \xi^0): u \to w$ называется гистерезисным оператором, если этот оператор удовлетворяет условию

$$\begin{cases} [\mathsf{F}(u_1)](\cdot,t) = [\mathsf{F}(u_2)](\cdot,t) \text{ для } \forall u_1, u_2 \in \mathrm{Dom}(\mathsf{F}) \\ \text{таких, что } u_1 = u_2 \text{ на } [0,t] \text{ для } \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

и траектория пары $(u(t), w(t))$ является инвариантной относительно любого возрастающего диффеоморфизма $\varphi:[0,T] \to [0,T]$, то есть $\mathsf{F}(u \circ \varphi, \xi^0) = \mathsf{F}(u, \xi^0) \circ \varphi$ на $[0,T]$; другими словами, если $u \to w$, то $u \circ \varphi \to w \circ \varphi$.

Перейдем к краткому изложению содержания работы.

Первая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе первой главы рассмотрена следующая смешанная задача с фокусирующими нелинейными источниками и акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q_1 - 1} u_t = |u|^{p-1} u \quad \text{в} \quad \Omega_1 \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$\upsilon_{tt} - \Delta \upsilon + |\upsilon_t|^{q_2 - 1} \upsilon_t = |\upsilon|^{p-1} \upsilon \quad \text{в} \quad \Omega_2 \times (0, \infty), \tag{2}$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0, \infty), \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \tag{4}$$

$$u = \upsilon, \ \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} \quad \text{на } \Gamma_2 \times (0, \infty), \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega_1, \tag{6}$$

$$\upsilon(x,0) = \upsilon_0(x), \ \upsilon_t(x,0) = \upsilon_1(x), \ x \in \Omega_2, \tag{7}$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \delta_t(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon_0}{\partial \nu} \equiv \delta_1(x), \ x \in \Gamma_2, \tag{8}$$

где $\Omega \subset R^n\ (n \ge 1)$ – ограниченная область с гладкой границей Γ_1, $\Omega_2 \subset \Omega$ – подобласть с гладкой границей Γ_2 и

$\Omega_1 = \Omega \setminus (\Omega_2 \bigcup \Gamma_2)$ – подобласть с границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$; $\nu(x)$ – внешняя единичная нормаль границы Γ в точке $x \in \Gamma$; $M, D, K : \Gamma_2 \to R$, $u_0, u_1 : \Omega_1 \to R$, $\upsilon_0, \upsilon_1 : \Omega_2 \to R$, $\delta_0 : \Gamma_2 \to R$ – заданные функции; $p > 1$, $q_i > 1$, $i = 1,2$.

Введены определения слабого и сильного решений задачи (1)-(8).

Определение 6. Тройку функций $(u(x,t), \upsilon(x,t), \delta(x,t))$, где

$$u : \Omega_1 \times [0,T] \to R,\ \upsilon : \Omega_2 \times [0,T] \to R,\ \delta : \Gamma_2 \times [0,T] \to R,$$

назовем слабым решением задачи (1)-(8), если

$$u \in L^\infty\left(0, T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right),\ \upsilon \in L^\infty\left(0, T; H^1(\Omega_2)\right),$$

$$\gamma_0(u) = \gamma_0(\upsilon) \text{ п. в. на } \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$u_t \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega_1)\right) \bigcap L^{q_1+1}\left(\Omega_1 \times (0,T)\right),$$

$$\upsilon_t \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega_2)\right) \bigcap L^{q_2+1}\left(\Omega_2 \times (0,T)\right),$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Gamma_2)\right)$$

и выполнены следующие равенства:

$$\tfrac{d}{dt}(u_t, \Phi)_1 + (\nabla u, \nabla \Phi)_1 + \left(|u_t|^{q_1-1} u_t, \Phi\right)_1 + \tfrac{d}{dt}(\upsilon_t, \Psi)_2 + (\nabla \upsilon, \nabla \Psi)_2 +$$
$$+ \left(|\upsilon_t|^{q_2-1} \upsilon_t, \Psi\right)_2 - \left(\delta_t, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} = \left(|u|^{p-1} u, \Phi\right)_1 + \left(|\upsilon|^{p-1} \upsilon, \Psi\right)_2$$

для $\forall \Phi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $\forall \Psi \in H^1(\Omega_2)$ таких, что $\Phi = \Psi$ на Γ_2, в смысле распределений в $D'(0,T)$ и

$$\tfrac{d}{dt}\left(\gamma_0(u) + M\delta_t, e\right)_{\Gamma_2} + \left(D\delta_t + K\delta, e\right)_{\Gamma_2} = 0$$

для $\forall e \in L^2(\Gamma_2)$, в смысле распределений в $D'(0,T)$, а также:

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_1,$$

$$\upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\ \upsilon_t(x,0) = \upsilon_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_2,$$

$$\delta(x,0)=\delta_0(x),\ \delta_t(x,0)=\delta_1(x) \text{ п. в. на } \Gamma_2 .$$

Определение 7. Тройку функций $(u(x,t),\upsilon(x,t),\delta(x,t))$, где

$$u:\Omega_1\times[0,T]\to R,\ \upsilon:\Omega_2\times[0,T]\to R,\ \delta:\Gamma_2\times[0,T]\to R,$$

назовем сильным решением задачи (1)-(8), если

$$u\in L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right),\ u_t\in L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\right)\bigcap L^{q_1+1}(\Omega_1\times[0,T]),$$

$$u_{tt}\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_1)\right),$$

$$\upsilon\in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_2)\right),\ \upsilon_t\in L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega_2)\right)\bigcap L^{q_2+1}(\Omega_2\times[0,T]),$$

$$\upsilon_{tt}\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega_2)\right),$$

$$u(t)\in H(\Delta,\Omega_1),\ \upsilon(t)\in H(\Delta,\Omega_2) \text{ п. в. на } (0,T),$$

$$\delta,\delta_t,\delta_{tt}\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_2)\right),$$

и

$$u_{tt}-\Delta u+|u_t|^{q_1-1}u_t=|u|^{p-1}u \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_1\times(0,T),$$

$$\upsilon_{tt}-\Delta\upsilon+|\upsilon_t|^{q_2-1}\upsilon_t=|\upsilon|^{p-1}\upsilon \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_2\times(0,T),$$

$$\gamma_0(u_t)+M\delta_{tt}+D\delta_t+K\delta=0,\ \gamma_0(u)=\gamma_0(\upsilon) \text{ п. в. на } \Gamma_2\times(0,T),$$

$$\left\langle\gamma_1(u(t)-\upsilon(t)),\gamma_0(\varphi)\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}=\left(\delta_t(t),\gamma_0(\varphi)\right)_{\Gamma_2}$$

для $\forall\varphi\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ п. в. на $(0,T)$,

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_1,$$

$$\upsilon(x,0)=\upsilon_0(x),\ \upsilon_t(x,0)=\upsilon_1(x) \text{ п. в. в } \Omega_2,$$

$$\delta(x,0)=\delta_0(x),\ \delta_t(x,0)=\delta_1(x) \text{ п. в. на } \Gamma_2 .$$

Для задачи (1)-(8) доказана следующая теорема о существовании и единственности локальных слабых решений.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$M,D,K\in C(\Gamma_2),\ M(x)>0,\ D(x)>0,\ K(x)>0,\ x\in\Gamma_2; \quad (9)$$

$$p>1 \text{ если } n=1,2,\ 1<p\le\frac{n}{n-2} \text{ если } n\ge 3. \qquad (10)$$

Тогда для

$$\left.\begin{array}{l}\forall(u_0,\upsilon_0,\delta_0)\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times H^1(\Omega_2)\times L^2(\Gamma_2)\\ \forall(u_1,\upsilon_1,\delta_1)\in L^{2q_1}(\Omega_1)\times L^{2q_2}(\Omega_2)\times L^2(\Gamma_2)\end{array}\right\} \qquad (11)$$

существует число $T>0$ такое, что задача (1)-(8) имеет единственное слабое решение (u,υ,δ), удовлетворяющее условиям

$$u\in C\big([0,T];H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\big),\ u_t\in C\big([0,T];L^2(\Omega_1)\big)\cap L^{q_1+1}(\Omega_1\times(0,T)),$$
$$\upsilon\in C\big([0,T];H^1(\Omega_2)\big),\ \upsilon_t\in C\big([0,T];L^2(\Omega_2)\big)\cap L^{q_2+1}(\Omega_2\times(0,T)),$$
$$\delta,\delta_t\in L^\infty\big(0,T;L^2(\Gamma_2)\big);$$

кроме того, если $T_{\max}>0$ – длина максимального интервала существования решения (u,υ,δ), то справедлива следующая альтернатива:

либо $T_{\max}=+\infty$;

либо

$$\lim_{t\to T_{\max}-0}\left(\|u_t\|_1^2+\|\upsilon_t\|_2^2+\|\nabla u\|_1^2+\|\nabla\upsilon\|_2^2+\left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2+\left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right)=+\infty.$$

Во втором параграфе первой главы установлен следующий результат о существовании и единственности локальных сильных решений задачи (1)-(8).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9)-(10) и

$$q_i>1 \text{ если } n=1,2;\ 1<q_i\le\frac{n}{n-2} \text{ если } n\ge 3\ (i=1,2).$$

Предположим, что

$$p\le\min\{q_1,q_2\}$$

и

$$u_0\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\cap H^2(\Omega_1),\ u_1\in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\cap L^{2q_1}(\Omega_1),$$
$$\upsilon_0\in H^2(\Omega_2),\ \upsilon_1\in H^1(\Omega_2)\cap L^{2q_2}(\Omega_2),\ \delta_0,\delta_1\in L^2(\Gamma_2).$$

Тогда существует число $T>0$ такое, что задача (1)-(8) имеет единственное сильное решение (u,υ,δ).

В третьем параграфе первой главы доказана следующая теорема о существовании глобальных слабых решений задачи (1)-(8) при выполнении условия $p \le \min\{q_1, q_2\}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и условие $p \le \min\{q_1, q_2\}$. Тогда локальное слабое решение (u, υ, δ) задачи (1)-(8) является глобальным и T можно взять сколь угодно большим.

В четвертом параграфе первой главы определена энергетическая функция:

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\upsilon_t\|_2^2 + \|\nabla \upsilon\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right] -$$

$$-\frac{1}{p+1}\left(|u|^{p+1}, 1\right)_1 - \frac{1}{p+1}\left(|\upsilon|^{p+1}, 1\right)_2,$$

где (u, υ, δ) - слабое решение задачи (1)-(8) и установлен следующий результат о разрушении решений этой задачи за конечное время.

Теорема 4. Пусть

$$(u_0, \upsilon_0, \delta_0) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2),$$

$$(u_1, \upsilon_1, \delta_1) \in L^{2q_1}(\Omega_1) \times L^{2q_2}(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$$

и выполнены условия (9), (10). Предположим, что

$$p > \max\{q_1, q_2\}, \quad K(x) \ge 1 \quad (x \in \Gamma_2),$$

$$0 < E(0) < E_1, \; E_1 = \alpha_1^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right),$$

$$\|\nabla u_0\|_1^2 + \|\nabla \upsilon_0\|_2^2 > \alpha_1^2, \; \alpha_1 = B^{-\frac{1}{p-1}},$$

где B – положительная константа, зависящая от Ω_1, Ω_2, p. Тогда слабое решение задачи (1)-(8) разрушается за конечное время.

В пятом параграфе первой главы рассмотрена начально-краевая задача для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками с нелинейными акустическими условиями сопряжения:

$$u=\upsilon\ ,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}+\rho(u_t)=\delta_t \text{ на } \Gamma_2\times(0,\infty),$$

для которой доказана теорема о существовании и единственности локальных слабых решений при выполнении следующих условий на нелинейность ρ:

$$\rho\in C^1(-\infty;+\infty),$$

$$|\rho(s)|\le c_5|s|^{q_1}\quad(c_5>0);$$

$\rho(s)$ – монотонно возрастающая функция на $(-\infty;+\infty)$.

В шестом параграфе первой главы доказано существование и единственность локальных слабых решений начально-краевой задачи для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с фокусирующими источниками:

$$u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u+|u_t|^{q_1-1}u_t=f(u) \text{ в } \Omega_1\times(0,\infty),$$

$$\upsilon_{tt}-\Delta\upsilon_t-\Delta\upsilon+|\upsilon_t|^{q_2-1}\upsilon_t=g(\upsilon) \text{ в } \Omega_2\times(0,\infty),$$

с акустическими условиями сопряжения:

$$M\delta_{tt}+D\delta_t+K\delta=-u_t\ ,\ u=\upsilon\ ,\ \delta_t=\frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}+\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-\frac{\partial\upsilon_t}{\partial\nu}$$

на $\Gamma_2\times(0,\infty)$.

Вторая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе второй главы рассмотрена смешанная задача (12), (13), (3)-(8) с дефокусирующими нелинейными источниками и акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt}-\Delta u+g_1(u_t)+f_1(u)=0 \quad\text{в}\quad \Omega_1\times(0,\infty), \tag{12}$$

$$\upsilon_{tt}-\Delta\upsilon+g_2(\upsilon_t)+f_2(\upsilon)=0 \quad\text{в}\quad \Omega_2\times(0,\infty). \tag{13}$$

Предположено, что выполняются следующие условия:

$$g_i\in C^1(R),\ i=1,2$$

и существуют постоянные k_{i1}, k_{i2}, $k_{i3} > 0$ $(i = 1,2)$ такие, что

$$|g_i(s)| \le k_{i1}|s|^q \text{, если } |s| > 1 \text{ и } |g_i(s)| \le k_{i2}|s| \text{, если } |s| \le 1, \quad (14)$$

где q удовлетворяет неравенству $1 \le q \le \dfrac{n+2}{n-2}$, если $n \ge 3$ и $q \ge 1$, если $n \le 2$;

$$g_i'(s) \ge k_{i3} > 0 \text{ для } \forall s \in R; \quad (15)$$

$$f_i \in C^1(R), \ i = 1,2$$

и существуют постоянные c_{i1}, c_{i2}, $\bar{c}_{i1}, \bar{c}_{i2} > 0$ $(i = 1,2)$ такие, что

$$|f_i(s)| \le c_{i1}|s|^p + c_{i2}, \quad |f_i'(s)| \le \bar{c}_{i1}|s|^{p-1} + \bar{c}_{i2}, \quad (16)$$

где p удовлетворяет неравенству $1 \le p \le \dfrac{n}{n-2}$, если $n \ge 3$ и $p \ge 1$, если $n \le 2$;

$$0 \le F_i(s) = \int_0^s f_i(s)ds \le \frac{1}{l_i + 1} s f_i(s) \quad (17)$$

для $\forall s \in R^+$, $l_i > 1, i = 1,2$.

Доказана следующая теорема о существовании и единственности глобальных сильных решений для задачи (12), (13), (3)-(8).

Теорема 5. Пусть выполнены условия (9), (14)-(17). Предположим, что

$$u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1),\ u_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap L^{2q}(\Omega_1),$$

$$\upsilon_0 \in H^2(\Omega_2),\ \upsilon_1 \in H^1(\Omega_2) \cap L^{2q}(\Omega_2),\ \delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2).$$

Тогда для любого $T > 0$ существует единственное сильное решение задачи (12), (13), (3)-(8), т. е. решение (u, υ, δ) такое, что

$$u, u_t \in L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)),\ u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_1)),$$

$$\upsilon, \upsilon_t \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega_2)),\ \upsilon_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_2)),$$

$$u(t,\cdot) \in H(\Delta, \Omega_1),\ \upsilon(t,\cdot) \in H(\Delta, \Omega_2) \text{ п. в. на } (0,T),$$

$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty\left(0,T; L^2(\Gamma_2)\right)$$

и

$$u_{tt} - \Delta u + g_1(u_t) + f_1(u) = 0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_1 \times (0,T),$$

$$\upsilon_{tt} - \Delta \upsilon + g_2(\upsilon_t) + f_2(\upsilon) = 0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_2 \times (0,T),$$

$$\gamma_0(u_t) + M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = 0, \ \gamma_0(u) = \gamma_0(\upsilon) \ \text{п. в. на} \ \Gamma_2 \times (0,T),$$

$$\left\langle \gamma_1(u(t) - \upsilon(t)), \gamma_0(\varphi) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} = \left(\delta_t(t), \gamma_0(\varphi)\right)_{\Gamma_2}$$

для $\forall \varphi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ п. в. на $(0,T)$,

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{п. в. в} \ \Omega_1,$$

$$\upsilon(x,0) = \upsilon_0(x), \ \upsilon_t(x,0) = \upsilon_1(x) \ \text{п. в. в} \ \Omega_2,$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \ \delta_t(x,0) = \delta_1(x) \ \text{п. в. на} \ \Gamma_2.$$

Во втором параграфе второй главы установлен следующий результат об экспоненциальном убывании глобальных сильных решений задачи (12), (13), (3)-(8).

Теорема 6. Пусть (u, υ, δ) - глобальное сильное решение задачи (12)-(13), (3)-(8) и

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\upsilon_t\|_2^2 + \|\nabla \upsilon\|_2^2 +$$

$$+ (F_1(u),1)_1 + (F_2(\upsilon),1)_2 + \left\|\sqrt{M}\,\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\,\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\Big].$$

Тогда при выполнении условий Теоремы 5 существуют положительные константы a и b такие, что

$$E(t) \le a \exp(-bt)$$

для всех $t \ge 0$.

В третьем параграфе второй главы рассмотрена следующая смешанная задача с акустическими условиями сопряжения в области $\Omega \subset R^3$:

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha_1 u_t + u + f_1(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1 \times (0,\infty), \tag{18}$$

$$\upsilon_{tt} - \Delta \upsilon + \alpha_2 \upsilon_t + \upsilon + f_2(\upsilon) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2 \times (0,\infty), \tag{19}$$

$$\delta_{tt} + \beta\delta_t + \delta = -u_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,\infty), \tag{20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \tag{21}$$

$$u = \upsilon, \ \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} \quad \text{на} \ \Gamma_2 \times (0, \infty), \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega_1, \\ \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\ \upsilon_t(x,0) = \upsilon_1(x), x \in \Omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x),\ \delta_t(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial \upsilon_0}{\partial \nu} \equiv \delta_1(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{24}$$

где $\alpha_i > 0$ $(i = 1,2)$ и $\beta > 0$ – некоторые постоянные;

$f_i: \ R \to R \ (i = 1,2)$ – заданные функции; предположено, что

$$f_i \in C^1(R), \ i = 1, 2$$

и существуют постоянные $c_{1i} \geq 0$, $i = 1, 2$, при которых имеют место оценки

$$|f_i'(s)| \leq c_{1i}\left(1 + s^2\right), \tag{25}$$

а также что выполняются неравенства

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{f_i(s)}{s} > -1, i = 1, 2; \tag{26}$$

для доказательства гладкости решения вместо непрерывной дифференцируемости функций f_i и оценок (25) использованы более сильные предположения:

$$f_i \in C^2(R), \ i = 1, 2$$

и существуют постоянные $c_{2i} \geq 0$, $i = 1, 2$, при которых имеют место оценки

$$|f_i''(s)| \leq c_{2i}(1 + |s|), \ c_{2i} \geq 0. \tag{27}$$

Введено фазовое пространство

$$V = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6): w_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1), w_2 \in L^2(\Omega_1),$$
$$w_3 \in H^1(\Omega_2), w_4 \in L^2(\Omega_2), w_5 \in L^2(\Gamma_2), w_6 \in L^2(\Gamma_2), w_1|_{\Gamma_2} = w_3|_{\Gamma_2}\},$$

которое является гильбертовым относительно нормы, определяемой равенством

$$\|w\|_V^2 = \|w_1\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)}^2 + \|w_2\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|w_3\|_{H^1(\Omega_2)}^2 + \|w_4\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + $$
$$+ \|w_5\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \|w_6\|_{L^2(\Gamma_2)}^2$$

для $\forall w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \in V$ и начально-краевая задача (18)-(24) сформулирована в следующей форме

$$\begin{cases} w_t = Aw + \Phi(w), \\ w(0) = w_0 \,, \end{cases} \tag{28}$$

где $w = (u, u_t, \upsilon, \upsilon_t, \delta, \delta_t)$, $w_0 = (u_0, u_1, \upsilon_0, \upsilon_1, \delta_0, \delta_1)$,

$$A : D(A) \subset V \to V \,,$$

$$Aw = \Big(w_2 \,, \Delta w_1 - w_1 - \alpha_1 w_2 \,, w_4, \Delta w_3 - w_3 - \alpha_2 w_4 \,,$$
$$w_6 \,, - w_2\big|_{\Gamma_2} - w_5 - \beta w_6\Big),$$

$$D(A) = \Big\{ w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \in V : \Delta w_1 \in L^2(\Omega_1), w_2 \in H^1(\Omega_1),$$
$$\Delta w_3 \in L^2(\Omega_2), w_4 \in H^1(\Omega_2), w_2\big|_{\Gamma_2} = w_4\big|_{\Gamma_2}, w_6 = w_{1\nu}\big|_{\Gamma_2} - w_{3\nu}\big|_{\Gamma_2} \Big\},$$

где $w_{i\nu}$ $(i = 1{,}2)$ – производная функции w_i по нормали ν (условие $w_6 = w_{1\nu}\big|_{\Gamma_2} - w_{3\nu}\big|_{\Gamma_2}$ интерпретируется в слабом смысле – как выполнение равенства

$$\int_{\Omega_1} (\Delta w_1 \varphi + \nabla w_1 \nabla \varphi) dx + \int_{\Omega_2} (\Delta w_3 \psi + \nabla w_3 \nabla \psi) dx = \int_{\Gamma_2} w_6 \varphi \, d\Gamma_2$$

для всех $\varphi \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $\psi \in H^1(\Omega_2)$ таких, что $\varphi\big|_{\Gamma_2} = \psi\big|_{\Gamma_2}$),

$$\Phi : V \to V \,, \quad \Phi(w) = (0, - f_1(w_1), 0, - f_2(w_3), 0, 0) \text{ для } \forall w \in V \,.$$

Чтобы рассматривать сильные решения, введено также фазовое пространство

$$V_1 = \Big\{ w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \in \big(H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)\big) \times$$
$$\times H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2) \times H^1(\Omega_2) \times H^{1/2}(\Gamma_2) \times H^{1/2}(\Gamma_2) :$$
$$w_1\big|_{\Gamma_2} = w_3\big|_{\Gamma_2}, w_2\big|_{\Gamma_2} = w_4\big|_{\Gamma_2}, w_6 = w_{1\nu}\big|_{\Gamma_2} - w_{3\nu}\big|_{\Gamma_2} \Big\} \,,$$

которое является гильбертовым относительно нормы

$$\|w\|_{V_1}^2 = \|w_1\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)\cap H^2(\Omega_1)}^2 + \|w_2\|_{H^1(\Omega_1)}^2 + \|w_3\|_{H^2(\Omega_2)}^2 + \|w_4\|_{H^1(\Omega_2)}^2 +$$

$$+\|w_5\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}^2 + \|w_6\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}^2.$$

Введено определение слабого решения задачи (28).

Определение 8. Пусть $w_0 = (u_0, u_1, \upsilon_0, \upsilon_1, \delta_0, \delta_1) \in V$. Функция $w \in C^0([0,\infty);V)$ называется слабым решением задачи (28), если справедливо равенство

$$w(t) = e^{At} w_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \Phi(w(s)) ds$$

для $\forall t \geq 0$.

Введен функционал

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\|w\|_V^2 + \int_{\Omega_1} F_1(w_1) dx + \int_{\Omega_2} F_2(w_3) dx, \qquad (29)$$

где $F_i(s) = \int_0^s f_i(s) ds$, $i = 1,2$.

Основные результаты для задачи (28) или (18)-(24) установлены в следующих теоремах (метод, использованный при доказательстве существования глобального аттрактора, опирается на использование подходящего энергетического уравнения).

Теорема 7. Пусть выполнены условия (25), (26) и $w_0 \in V$. Тогда существует единственное слабое решение $w \in C^0([0,\infty);V)$ задачи (28). Кроме того, если $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ - решения задачи (28), соответствующие двум начальным данным $\overline{w}_{10}$ и $\overline{w}_{20}$ с $\|\overline{w}_{10}\|_V \leq r$, $\|\overline{w}_{20}\|_V \leq r$ $(r > 0)$, то существует положительное число θ, зависящее от r такое, что

$$\|\overline{w}_2(t) - \overline{w}_1(t)\|_V \leq e^{\theta t}\|\overline{w}_{20} - \overline{w}_{10}\|_V$$

для всех $t \geq 0$. Если дополнительно предположить, что функции f_i, $i = 1,2$ удовлетворяют условиям (27) и что $w_0 \in V_1$, то соответствующее слабое решение обладает свойством регулярности

$$w \in C^1\left(\left[0,\infty\right);V\right)\bigcap C^0\left(\left[0,\infty\right);V_1\right)$$

(и называется ”сильным” решением).

Доказано, что для каждого слабого решения $w=\left(u,u_t,\upsilon,\upsilon_t,\delta,\delta_t\right)$ задачи (28) справедливо энергетическое уравнение

$$\frac{dE_w}{dt}=-\alpha_1\left\|u_t\right\|_1^2-\alpha_2\left\|\upsilon_t\right\|_2^2-\beta\left\|\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 \quad (\,E_w\left(\cdot\right)\in C^1\left(\left[0,\infty\right)\right)),$$

где функционал $E_w\left(t\right)$ введен в (29).

Следствие 1. При выполнении условий (25), (26) система (28) порождает сильно непрерывную полугруппу

$$S\left(t\right)=S_{\alpha_1,\alpha_2\,\beta}\left(t\right)$$

в фазовом пространстве V, которая определяется формулой

$$S\left(t\right)\left(u_0,u_1,\upsilon_0,\upsilon_1,\delta_0,\delta_1\right)=\left(u,u_t,\upsilon,\upsilon_t,\delta,\delta_t\right),$$

где $\left(u,u_t,\upsilon,\upsilon_t,\delta,\delta_t\right)\in C^0\left(\left[0,\infty\right);V\right)$ - слабое решение задачи (28), соответствующее начальному данному $\left(u_0,u_1,\upsilon_0,\upsilon_1,\delta_0,\delta_1\right)\in V$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия (25), (26). Тогда существует постоянная $R_0>0$ со следующим свойством: для каждого $R>0$ существует число $t_0=t_0\left(R\right)>0$ такое, что справедливо неравенство

$$\left\|S\left(t\right)w_0\right\|_V\le R_0$$

для любого $w_0\in V$ такого, что $\left\|w_0\right\|_V\le R$, и для всех $t\ge t_0$; следовательно, для полугруппы $S\left(t\right)$ в V множество

$$B_0=\left\{z\in V:\left\|z\right\|_V\le R_0\right\}$$

является ограниченным поглощающим.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (25), (26) и $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. Тогда полугруппа $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\ge 0}$ является асимптотически компактной.

Теорема 10. Пусть выполнены условия (25), (26) и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Тогда задача (18)-(24) обладает минимальным глобальным аттрактором в фазовом пространстве V, который инвариантен и компактен.

Третья глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе третьей главы рассмотрена следующая смешанная задача в области $Q = \Omega \times (0,T)$ ($\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[u + \mathsf{F}(u)\right] - \Delta u + |u|^p u = f \,, \tag{30}$$

$$u = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \tag{31}$$

$$\left[u + \mathsf{F}(u)\right]\Big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)}, \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^{(1)} \,, \tag{32}$$

где $p > 0$; $f : Q \to R$, $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $w^{(0)}$: $\Omega \to R$ - заданные функции и нелинейный оператор F действует из пространства $\mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left([0,T]\right)\right)$ в $\mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left([0,T]\right)\right)$.

Предположено, что F является запоминающим оператором; то есть, выход $\left[\mathsf{F}(u)\right](t)$ в любой момент времени t может зависеть не только от $u(t)$, но и от предыдущих изменений u до момента t. Предположено также, что этот оператор действует в каждой точке $x \in \Omega$ независимо (то есть $\left[\mathsf{F}(u(x,\cdot))\right](t)$ зависит от $u(x,\cdot)\big|_{[0,t]}$ и не зависит от $u(y,\cdot)\big|_{[0,t]}$ для любого $y \neq x$) и выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \left[\mathsf{F}(\upsilon_1)\right](\cdot,t) = \left[\mathsf{F}(\upsilon_2)\right](\cdot,t) \text{ п.в.в } \Omega, \\ \text{для } \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in \mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left([0,T]\right)\right) \text{ таких, что } \upsilon_1 = \upsilon_2 \\ \text{на } [0,t] \text{ для } \forall\, t \in [0,T]; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \text{если } \upsilon_n \to \upsilon \text{ равномерно в } \mathrm{M}\left(\Omega; C^0\left([0,T]\right)\right), \\ \text{то } \mathsf{F}(\upsilon_n) \to \mathsf{F}(\upsilon) \text{ равномерно на } [0,T], \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} \text{существуют число } L > 0 \text{ и функция } g \in L^2(\Omega) \text{ такие,} \\ \text{что } \|[\mathsf{F}(\upsilon)](x,\cdot)\|_{C^0([0,T])} \le L\|\upsilon(x,\cdot)\|_{C^0([0,T])} + g(x) \text{ п.в.в } \Omega \\ \text{для } \forall\, \upsilon \in M(\Omega; C^0([0,T])); \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} \text{если функция } \upsilon \in M(\Omega; C^0([0,T])) \text{ является} \\ \text{аффинной в } [t_1,t_2] \text{ для } \forall\, [t_1,t_2] \subset [0,T], \text{ п.в.в } \Omega, \text{ то} \\ \{[\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_2) - [\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_1)\}[\upsilon(x,t_2) - \upsilon(x,t_1)] \ge 0 \text{ п.в.в } \Omega; \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} \text{существует число } 0 < L_1 < 1 \text{ такое, что} \\ |[\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_2) - [\mathsf{F}(\upsilon)](x,t_1)| \le L_1|\upsilon(x,t_2) - \upsilon(x,t_1)| \\ \text{п.в. в } \Omega, \text{для любой функции } \upsilon \in M(\Omega; C^0([0,T])), \\ \text{которая является аффинной в } [t_1,t_2] \\ \text{для } \forall [t_1,t_2] \subset [0,T], \text{ п.в. в } \Omega, \end{cases} \tag{37}$$

$$u^{(0)} \in V,\ w^{(0)} \in L^2(\Omega),\ u^{(1)} \in L^2(\Omega), \tag{38}$$

$$f = f_1 + f_2,\quad f_1 \in L^2(Q),\quad f_2 \in W^{1,1}(0,T;V'), \tag{39}$$

где $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$.

Определение 9. Функция $u \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ такая, что $\mathsf{F}(u) \in L^2(Q)$ и удовлетворяющая равенству

$$\iint_Q \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} - [u + \mathsf{F}(u)]\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \upsilon + |u|^p u\upsilon \right\} dxdt =$$

$$= \int_0^T {}_{V'}\langle f, \upsilon \rangle_V\, dt + \int_\Omega \left[u^{(0)}(x) + w^{(0)}(x) + u^{(1)}(x)\right] \upsilon(x,0)dx$$

для любого $\upsilon \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ $(\upsilon(\cdot,T) = 0$ п. в. в $\Omega)$, называется решением задачи (30)-(32).

В следующих теоремах установлены результаты о существовании и единственности решений задачи (30)-(32).

Теорема 11. Пусть выполнены условия (33)-(39). Тогда задача (30)-(32) имеет по крайней мере одно решение u, для которого справедливы включения

$$u \in W^{1,\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^\infty(0,T;V), \ \mathsf{F}(u) \in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Теорема 12. Пусть выполнены условия Теоремы 11. Предположим, что

$$p \leq \frac{2}{N-2}, \qquad N \geq 3 \tag{40}$$

и

$$\left\{[\mathsf{F}(\upsilon_1)](x,t) - [\mathsf{F}(\upsilon_2)](x,t)\right\}[\upsilon_1(x,t) - \upsilon_2(x,t)] \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega, \tag{41}$$

для $\forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in M\left(\Omega; C^0([0,T])\right)$ и $\forall t \in (0,T)$. Тогда решение задачи (30)-(32) единственно.

Теорема 13. Пусть выполнены условия (33)-(39), (40)-(41). Тогда задача (30)-(32) имеет единственное решение $u \in C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ для всех $T > 0$.

Далее в том же параграфе рассмотрена задача (30)-(32) для случая

$$f = h(x), \ h \in L^2(\Omega). \tag{42}$$

При выполнении условия (40) справедливо равенство $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Тогда при выполнении условий Теоремы 13, задаче (30)-(32) (с (42)) соответствует полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в пространстве $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, определяемая формулой

$$S(t)\left(u^{(0)}, u^{(1)}, w^{(0)}\right) = (u, u_t, w),$$

где u - единственное решение этой задачи.

Используя метод дискретизации по переменному t доказана следующая теорема о существовании ограниченного поглощающего множества для полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, порожденной задачей (30)-(32) (с $f = h(x)$).

Теорема 14. Задача (30)-(32) (с $f = h(x)$), имеет ограниченное поглощающее множество в пространстве E при выполнении условий (33)-(38), (40)-(42).

Далее доказана лемма о том, что при выполнении условий Теоремы 14 полугруппа $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, порожденная задачей (30)-(32) (с $f = h(x)$), является асимптотически компактной в пространстве E, и впоследствии доказана сдедующая теорема о существовании минимального глобального аттрактора для этой задачи.

Теорема 15. Пусть выполнены условия Теоремы 14. Тогда задача (30)-(32) (с $f = h(x)$) имеет минимальный глобальный аттрактор в пространстве E, который инвариантен и компактен.

Во втором параграфе третьей главы рассмотрена следующая смешанная задача в области $Q = \Omega \times (0,T)$ для квазилинейного параболического уравнения ($\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ):

$$\frac{\partial}{\partial t}[u + \mathsf{F}(u)] - \Delta u + |u|^p u = f \ , \tag{43}$$

$$u = 0,\ (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{44}$$

$$[u + \mathsf{F}(u)]\big|_{t=0} = u^0 + w^0, \tag{45}$$

где $0 < p \leq \dfrac{2}{2-N}$, если $N \geq 3$ и $p > 0$, если $N = 1,2$; $f : \Omega \times (0,T) \to R$ и нелинейный оператор F действует из пространства $\mathrm{M}(\Omega; C^0([0,T]))$ в $\mathrm{M}(\Omega; C^0([0,T]))$.

Предположено, что F является запоминающим оператором, который действует в каждой точке $x \in \Omega$ независимо и удовлетворяет условиям (33)-(36) и

$$u^0 \in V,\ w^0 \in L^2(\Omega), \tag{46}$$

$$f = f_1 + f_2,\ f_1 \in L^2(Q),\ f_2 \in W^{1,1}(0,T;V'), \tag{47}$$

где $V = H_0^1(\Omega)$.

Определение 10. Функция $u \in M\left(\Omega; C^0\left(\left[0,T\right]\right)\right) \cap$ $\cap L^2\left(0,T;V\right)$ такая, что $\mathsf{F}(u) \in L^2(Q)$ и удовлетворяющая равенству

$$\iint_Q \left\{ -\left[u + \mathsf{F}(u)\right]\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \upsilon + |u|^p u \upsilon \right\} dxdt =$$

$$= \int_0^T {}_{V'}\langle f, \upsilon \rangle_V \, dt + \int_\Omega \left[u^0(x) + w^0(x)\right] \upsilon(x,0) dx$$

для любого $\upsilon \in L^2(0,T;V) \cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ $\left(\upsilon(\cdot,T) = 0 \text{ п.в. в } \Omega\right)$, называется решением задачи (43)-(45).

Для задачи (43)-(45) доказана следующая теорема, используя метод дискретизации по переменному t.

Теорема 16. Пусть выполнены условия (33)-(36), (46), (47) и

$$0 < p \le \frac{2}{2-N} \text{ если } N \ge 3 \text{ и } p > 0 \text{ если } N = 1, 2.$$

Тогда задача (43)-(45) имеет по крайней мере одно решение u, для которого справедливы включения

$$u \in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^\infty(0,T;V), \ \mathsf{F}(u) \in L^2\left(\Omega; C^0\left(\left[0,T\right]\right)\right). \quad (48)$$

Рассмотрена также задача (43)-(45) при дополнительном условии, что F является гистерезисной нелинейностью типа обобщенного люфта.

Пусть для неубывающих функций $\gamma_l(\sigma), \gamma_r(\sigma) \in C^0(R)$ выполняется условие

$$\gamma_r(\sigma) \le \gamma_l(\sigma) \quad (49)$$

для любого $\sigma \in R$. Пусть u является непрерывной, частично линейной функцией на $[0,T]$, причем u является линейной на $[t_{i-1}, t_i]$ для $i = 1, 2, \ldots, N$. Для заданного $\xi^0 \in R$, оператор $w = E\left(u, \xi^0\right): [0,T] \to R$ называется гистерезисной нелинейностью типа обобщенного люфта, если

$$w(t)=\begin{cases}\min\left\{\gamma_l(u(0)),\max\left\{\gamma_r(u(0)),\xi^0\right\}\right\}, \text{ если } t=0,\\ \min\left\{\gamma_l(u(t)),\max\left\{\gamma_r(u(t)),t_{i-1}\right\}\right\}, \text{ если } t\in\left(t_{i-1},t_i\right]\end{cases}$$

$(i=1,\dots,N)$, причем $w(0)=\xi^0$ лишь тогда, когда $\gamma_r(u(0))\le\xi^0\le\gamma_l(u(0))$.

Предположено, что

$$[\mathsf{F}(u)](x,t)=\left[E\left(u(x,\cdot),\xi^0(x)\right)\right](t) \text{ п. в. в } \Omega, \qquad (50)$$

для любого $u\in M\left(\Omega;C^0\left(\left[0,T\right]\right)\right)$ и для любого $t\in[0,T]$; где $\xi^0\in L^1(\Omega)$ и E - гистерезисный оператор типа обобщенного люфта.

Для задачи (43)-(45) доказаны следующие теоремы.

Теорема 17. Пусть

$$u_i,\xi_i^0\in L^2(\Omega),\ h_i(x)\in L^2(\Omega)\ \ (i=1,2);$$

$\gamma_l(\sigma),\gamma_r(\sigma)\in C^0(R)$ - липшицево непрерывные, аффинно ограниченные функции и удовлетворяют условию (49). Определим F как в (50) и предположим, что

$$w_i^0=\min\left\{\max\left\{\xi_i^0,\gamma_r(u_i^0)\right\},\gamma_l(u_i^0)\right\} \text{ п. в. в } \Omega\ \ (i=1,2).$$

Если $u_i\in W^{1,1}\left(0,T;L^1(\Omega)\right)\bigcap L^2\left(0,T;V\right)$ - соответствующие решения задачи (43)-(45) с $f=h_i$ и $w_i=\mathsf{F}(u_i)$ $(i=1,2)$, то справедливо неравенство

$$\int_\Omega\left[\left(u_1-u_2\right)^+(x,t)+\left(w_1-w_2\right)^+(x,t)\right]dx\le$$

$$\le\int_\Omega\left[\left(u_1^0-u_2^0\right)^+(x)+\left(w_1^0-w_2^0\right)^+(x)\right]dx+T\int_\Omega\left(h_1-h_2\right)^+dx$$

для любого $t\in[0,T]$, где $(\,\cdot\,)^+=\max\left\{(\,\cdot\,),0\right\}$.

Теорема 18. Пусть

$$u^0\in V,\ \xi^0\in L^2(\Omega),\ h\in L^2(\Omega),$$

функции $\gamma_l(\sigma),\gamma_r(\sigma)\in C^0(R)$ липшицево непрерывны, аффинно ограничены и удовлетворяют условию (49), а F определяется как в (50). Тогда задача (43)-(45) (с $f = h(x)$), имеет единственное решение, которое удовлетворяет условию (48).

Пусть $X = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Тогда при выполнении условий Теоремы 18 задаче (43)-(45) (с $f = h(x)$) соответствует полугруппа $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ в пространстве X, определяемая формулой $S(t)(u^{(0)}, w^0) = (u, \mathsf{F}(u))$, где u - единственное решение этой задачи.

Теорема 19. Задача (43)-(45) (с $f = h(x)$) имеет ограниченное поглощающее множество в пространстве X при выполнении условий Теоремы 18.

В третьем параграфе третьей главы рассмотрена следующая смешанная задача в области $Q = \Omega\times(0,T)$ ($\Omega\subset R^N(N\geq 1)$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}[u + \mathsf{F}(u)] + \Delta^2 u + |u|^p u = f\,, \tag{51}$$

$$u = 0,\ \Delta u = 0,\ \ (x,t)\in\Gamma\times[0,T], \tag{52}$$

$$[u + \mathsf{F}(u)]\big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)}\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^{(1)}\,, \tag{53}$$

где $p > 0$; $f: Q\to R$, $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $w^{(0)}$: $\Omega\to R$ - заданные функции и нелинейный оператор F действует из пространства $\mathrm{M}(\Omega; C^0([0,T]))$ в $\mathrm{M}(\Omega; C^0([0,T]))$.

Предположено, что F является запоминающим оператором, который действует в каждой точке $x\in\Omega$ независимо и удовлетворяет условиям (33)-(37) и

$$u^{(0)}\in V,\ w^{(0)}\in L^2(\Omega),\ u^{(1)}\in L^2(\Omega)\,, \tag{54}$$

где $V = H_0^2(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega)$.

Определение 11. Функция $u\in L^2(0,T;V)\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ такая, что $\mathsf{F}(u)\in L^2(Q)$ и удовлетворяющая равенству

$$\iint\limits_{Q}\left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial t}-\left[u+\mathsf{F}(u)\right]\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\Delta u\cdot\Delta\upsilon+|u|^{p}u\upsilon\right\}dxdt=$$

$$=\int\limits_{0}^{T}{}_{V'}\langle f,\upsilon\rangle_{V}\,dt+\int\limits_{\Omega}\left[u^{(0)}(x)+w^{(0)}(x)+u^{(1)}(x)\right]\,\upsilon(x,0)dx,$$

для любого $\upsilon\in L^{2}(0,T;V)\bigcap H^{1}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)$ $\left(\upsilon(\,\cdot\,,T)=0\ \text{ п.в. в } \Omega\right)$, называется решением задачи (51)-(53).

В следующих теоремах установлены результаты о существовании и единственности решений задачи (51)-(53).

Теорема 20. Пусть выполнены условия (33)-(37), (39), (54). Тогда задача (51)-(53) имеет по крайней мере одно решение u, для которого справедливы включения

$$u\in W^{1,\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)\bigcap L^{\infty}(0,T;V),\ \mathsf{F}(u)\in H^{1}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right).$$

Теорема 21. Пусть выполнены условия Теоремы 20. Предположим, что

$$p\le\frac{2}{N-2},\qquad N\ge 3 \tag{55}$$

и

$$\left\{\left[\mathsf{F}(\upsilon_1)\right](x,t)-\left[\mathsf{F}(\upsilon_2)\right](x,t)\right\}\left[\upsilon_1(x,t)-\upsilon_2(x,t)\right]\ge 0 \ \text{ п.в. в } \Omega, \tag{56}$$

для $\forall\upsilon_1,\upsilon_2\in M\left(\Omega;C^{0}([0,T])\right)$ и $\forall t\in(0,T)$. Тогда решение задачи (51)-(53) единственно.

Доказаны следующие теоремы о существовании ограниченного поглощающего множества и о существовании минимального глобального аттрактора для задачи (51)-(53) для случая $f=h(x)$:

$$h\in L^{2}(\Omega). \tag{57}$$

Теорема 22. Задача (51)-(53) (с $f=h(x)$) имеет ограниченное поглощающее множество в пространстве $E=H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ при выполнении условий (33)-(37), (54)-(57).

Теорема 23. Пусть выполнены условия Теоремы 22. Тогда задача (51)-(53) (с $f=h(x)$) имеет минимальный глобальный аттрактор в пространстве E, который инвариантен и компактен.

Четвертая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе четвертой главы рассмотрена следующая смешанная задача в области $Q=\Omega\times(0,T)$ $(\Omega\subset R^N(N\geq 1)$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ) для системы полулинейных гиперболических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial}{\partial t}\left[u+\mathsf{F}_1(\upsilon)\right]-\Delta u=f_1,\\ \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}+\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\upsilon+\mathsf{F}_2(u)\right]-\Delta \upsilon=f_2,\end{cases} \tag{58}$$

$$u=0,\ \upsilon=0,\ (x,t)\in\Gamma\times[0,T], \tag{59}$$

$$\left[u+\mathsf{F}_1(\upsilon)\right]\Big|_{t=0}=u^{(0)}+w_1^{(0)},\ \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u^{(1)}, \tag{60}$$

$$\left[\upsilon+\mathsf{F}_2(u)\right]\Big|_{t=0}=\upsilon^{(0)}+w_2^{(0)},\ \ \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Big|_{t=0}=\upsilon^{(1)}, \tag{61}$$

где нелинейные операторы F_1, F_2 действуют из пространства $\mathrm{M}(\Omega;C^0([0,T]))$ в $\mathrm{M}(\Omega;C^0([0,T]))$.

Предположено, что операторы F_i $(i=1,2)$ являются запоминающими операторами, которые действуют в каждой точке $x\in\Omega$ независимо и удовлетворяют условиям (33)-(37) и

$$u^{(0)}\in H_0^1(\Omega),\ w_1^{(0)}\in L^2(\Omega),\ u^{(1)}\in L^2(\Omega),\ f_1\in L^2(Q), \tag{62}$$

$$\upsilon^{(0)}\in H_0^1(\Omega),\ w_2^{(0)}\in L^2(\Omega),\ \upsilon^{(1)}\in L^2(\Omega),\ f_2\in L^2(Q). \tag{63}$$

Определение 12. Пара функций (u,υ) такая, что

$$u,\upsilon\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

$$\mathsf{F}_1(\upsilon)\in L^2(Q),\ \mathsf{F}_2(u)\in L^2(Q)$$

и удовлетворяющая равенствам

$$\iint_Q \left\{-\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial \overline{\upsilon}}{\partial t}-\left[u+\mathsf{F}_1(\upsilon)\right]\frac{\partial \overline{\upsilon}}{\partial t}+\nabla u\cdot\nabla\overline{\upsilon}\right\}dxdt=$$

$$=\iint_Q f_1\overline{\upsilon}dxdt+\int_\Omega\left[u^{(0)}(x)+w_1^{(0)}(x)+u^{(1)}(x)\right]\,\overline{\upsilon}(x,0)dx,$$

$$\iint_Q \left\{-\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \overline{\upsilon}}{\partial t}-\left[\upsilon+\mathsf{F}_2(u)\right]\frac{\partial \overline{\upsilon}}{\partial t}+\nabla \upsilon\cdot\nabla\overline{\upsilon}\right\}dxdt=$$

$$=\iint_Q f_2\overline{\upsilon}dxdt+\int_\Omega\left[\upsilon^{(0)}(x)+w_2^{(0)}(x)+\upsilon^{(1)}(x)\right]\,\overline{\upsilon}(x,0)dx,$$

для любого $\overline{\upsilon}\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ $\left(\overline{\upsilon}(\,\cdot\,,T)=0\right.$ п.в. в $\left.\Omega\right)$, называется решением задачи (58)-(61).

В следующих теоремах установлены результаты о существовании и единственности решений задачи (58)-(61).

Теорема 24. Пусть выполнены условия (33)-(37), (62)-(63). Тогда задача (58)-(61) имеет по крайней мере одно решение (u,υ), для которого справедливы включения

$$u,\upsilon\in W^{1,\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$
$$\mathsf{F}_1(\upsilon),\,\mathsf{F}_2(u)\in H^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Теорема 25. Пусть выполнены условия Теоремы 24 и условия

$$\begin{cases}\text{для } \forall r>0 \text{ существует число } L_{2i}(r)>0 \text{ такое, что}\\ \left\|\mathsf{F}_i(u)-\mathsf{F}_i(\upsilon)\right\|_{L^2\left(\Omega;C^0([0,t])\right)}\le L_{2i}(r)\left\|u-\upsilon\right\|_{L^2\left(\Omega;L^2([0,t])\right)} \text{ п.в. в } \Omega,\\ \text{для } \forall t\in(0,T] \text{ и } \forall u,\upsilon\in\left\{\tilde{u}\in L^2(Q_t):\left\|\tilde{u}\right\|_{L^2(Q_t)}\le r\right\},\end{cases}$$

$i=1,2$. Тогда решение задачи (58)-(61) единственно.

Во втором параграфе четвертой главы рассмотрена следующая смешанная задача в области $Q=(0,L)\times(0,T)$ ($(0,L)\subset R^1$) для системы Тимошенко с запоминающим оператором, которая возникает в теории поперечных колебаний струны:

$$\rho_1\varphi_{tt} - a(\varphi_x + \psi)_x = 0, \tag{64}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + a(\varphi_x + \psi) + \mathsf{F}(\psi) = 0, \tag{65}$$

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=L} = 0,\ \psi\big|_{x=0} = \psi\big|_{x=L} = 0 \ \text{ на } (0,T), \tag{66}$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi^{(0)}, \varphi_t\big|_{t=0} = \varphi^{(1)}, \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)}, \psi_t\big|_{t=0} = \psi^{(1)},\ \mathsf{F}(\psi)\big|_{t=0} = w^{(0)} \tag{67}$$

на $(0,L)$, где t - переменная времени, x - координата точки струны длиной L в положении её равновесия; $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \psi^{(0)}, \psi^{(1)}, w^{(0)}: \quad (0,L) \to R$ - заданные функции, ρ_1, ρ_2, a, b - положительные константы.

Предположено, что оператор F действует из пространства $\mathrm{M}(0,L;C^0([0,T]))$ в $\mathrm{M}(0,L;C^0([0,T]))$, где $\mathrm{M}(0,L;C^0([0,T]))$ - пространство измеримых функций, действующих из $(0,L)$ в $C^0([0,T])$, и что F является запоминающим оператором, который действует в каждой точке $x \in (0,L)$ независимо, то есть $[\mathsf{F}(\psi(x,\cdot))](\mathrm{t})$ зависит от $\psi(x,\cdot)\big|_{[0,t]}$ и не зависит от $\psi(y,\cdot)\big|_{[0,t]}$ для $y \neq x$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} [\mathsf{F}(\upsilon_1)](\cdot,t) = [\mathsf{F}(\upsilon_2)](\cdot,t) \ \text{п.в.на } (0,L), \\ \text{для } \forall\, \upsilon_1, \upsilon_2 \in \mathrm{M}(0,L;C^0([0,T])) \text{ таких, что } \upsilon_1 = \upsilon_2 \\ \text{на } [0,t] \text{ для } \forall\, t \in [0,T]; \end{cases} \tag{68}$$

$$\begin{cases} \text{если } \upsilon_{\text{n}} \to \upsilon \text{ равномерно в } \mathrm{M}(0,L;C^0([0,T])), \\ \text{то } \mathsf{F}(\upsilon_n) \to \mathsf{F}(\upsilon) \text{ равномерно на } [0,T], \text{п.в. на } (0,L); \end{cases} \tag{69}$$

$$\begin{cases} \text{существуют число } L_1 > 0 \text{ и функция } g \in L^2(0,L) \text{ такие,} \\ \text{что } \|[\mathsf{F}(\upsilon)](x,\cdot)\|_{C^0([0,T])} \le L_1 \|\upsilon(x,\cdot)\|_{C^0([0,T])} + g(x) \\ \text{для } \forall\, \upsilon \in M(0,L;C^0([0,T])), \text{ п.в.на } (0,L); \end{cases} \tag{70}$$

$$\begin{cases} \text{если функция } \upsilon \in M\left(0, L; C^0\left(\left[0, T\right]\right)\right) \text{ является} \\ \text{аффинной в } \left[t_1, t_2\right] \text{ для } \forall \left[t_1, t_2\right] \subset \left[0, T\right], \text{ п.в.на } \left(0, L\right), \text{то} \\ \left\{\left[\mathsf{F}(\upsilon)\right](x, t_2) - \left[\mathsf{F}(\upsilon)\right](x, t_1)\right\}\left[\upsilon(x, t_2) - \upsilon(x, t_1)\right] \geq 0, \text{п.в.на} \left(0, L\right), \end{cases} \tag{71}$$

$$\varphi^{(0)}, \psi^{(0)} \in H_0^1(0, L),\ \varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, w^{(0)} \in L^2(0, L). \tag{72}$$

Определение 13. Пара функций (φ, ψ), для которых справедливы соотношения

$$\varphi, \psi \in L^2\left(0, T; H_0^1(0, L)\right) \cap H^1\left(0, T; L^2(0, L)\right),\ \mathsf{F}(\psi) \in L^2(Q);$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi^{(0)},\ \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)},\ \mathsf{F}(\psi)\big|_{t=0} = w^{(0)} \text{ на } (0, L)$$

и равенства

$$\iint_Q \left\{-\rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + a\varphi_x \upsilon_x - a\psi_x \upsilon\right\} dxdt = -\rho_1 \int_0^L \varphi^{(1)}(x)\upsilon(x, 0)dx,$$

$$\iint_Q \left\{-\rho_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + b\psi_x \upsilon_x + a\varphi_x \upsilon + a\psi\upsilon + \mathsf{F}(\psi)\upsilon\right\} dxdt =$$

$$= -\rho_2 \int_0^L \psi^{(1)}(x)\upsilon(x, 0)dx$$

для любого $\upsilon \in L^2\left(0, T; H_0^1(0, L)\right) \cap H^1\left(0, T; L^2(0, L)\right)$ $\left(\upsilon(\cdot, T) = 0\right.$ п.в. на $(0, L)$), называется решением задачи (64)-(67).

В следующих теоремах установлены результаты о существовании и единственности решений задачи (64)-(67).

Теорема 26. Пусть выполнены условия (68)-(72). Тогда задача (64)-(67) имеет по крайней мере одно решение (φ, ψ), для которого справедливы включения

$$\left.\begin{aligned} \varphi, \psi \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(0, L)\right) \cap H^1\left(0, T; L^2(0, L)\right), \\ \mathsf{F}(\psi) \in L^2\left(0, L; C^0\left(\left[0, T\right]\right)\right). \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Теорема 27. Пусть выполнены условия теоремы 26 и оператор F удовлетворяет ещё и условию глобальной Липшицевой непрерывности:

$$\exists L_2 > 0:\ \forall t \in (0,T],\ \forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in L^2\big(0,L;C^0([0,t])\big),$$
$$\| \mathsf{F}(\upsilon_1) - \mathsf{F}(\upsilon_2) \|_{L^2(0,L;C^0([0,t]))} \le L_2 \| \upsilon_1 - \upsilon_2 \|_{L^2(0,L;C^0([0,t]))}.$$

Тогда решение задачи (64)-(67) (которое удовлетворяет условию (73)) единственно.

В третьем параграфе четвертой главы в области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрено квазилинейное гиперболическое уравнение:

$$u_{tt} + [u + \mathsf{F}(u)]_t - \Delta u = f \qquad (74)$$

с граничными условиями

$$u = 0,\quad (x,t) \in \Gamma_0 \times [0,T], \qquad (75)$$

$$u_t + p z_{tt} + l z_t + r z = 0,\quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T], \qquad (76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = z_t,\quad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T] \qquad (77)$$

и с начальными условиями

$$[u + \mathsf{F}(u)]\big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)},\ \ u_t\big|_{t=0} = u^{(1)},\ x \in \Omega, \qquad (78)$$

$$z\big|_{t=0} = z^{(0)},\ z_t\big|_{t=0} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \nu} \equiv z^{(1)},\ x \in \Gamma_1, \qquad (79)$$

где $\Omega \subset R^N\ (N \ge 1)$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, причем $\Gamma_0 \bigcap \Gamma_1 = \varnothing$; $p,l,r:\ \Gamma_1 \to R$ – известные функции, $\nu(x)$ – внешняя единичная нормаль границы Γ в точке $x \in \Gamma$ и нелинейный оператор F действует из пространства $\mathrm{M}\big(\Omega; C^0([0,T])\big)$ в $\mathrm{M}\big(\Omega; C^0([0,T])\big)$. Предположено, что F является запоминающим оператором, который действует в каждой точке $x \in \Omega$ независимо и выполнены условия (33)-(37). Также предположено, что

$$u^{(0)} \in \widehat{H},\ w^{(0)} \in L^2(\Omega),\ u^{(1)} \in L^2(\Omega),\ z^{(0)}, z^{(1)} \in L^2(\Gamma_1), \qquad (80)$$

$$f \in L^2(Q), \qquad (81)$$

где $\widehat{H} = \{ u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \text{ п.в. на } \Gamma_0 \}$.

Введено понятие слабого решения задачи (74)-(79).

Определение 14. Пара функций $(u(x,t), z(x,t))$ называется слабым решением задачи (74)-(79), если

$$u \in L^2(0,T;\widehat{H}),\ u_t \in L^2(Q),\ z \in L^2(\Gamma_1),\ z_t \in L^2(\Gamma_1),$$

$$\mathsf{F}(u) \in L^2(Q)$$

и выполнены следующие равенства:

$$\tfrac{d}{dt}(u_t, \upsilon)_{L^2(\Omega)} + \tfrac{d}{dt}(u + \mathsf{F}(u), \upsilon)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla \upsilon)_{L^2(\Omega)} -$$
$$-(z_t, \gamma_0(\upsilon))_{L^2(\Gamma_1)} = (f, \upsilon)_{L^2(\Omega)}$$

для $\forall \upsilon \in \widehat{H}$, в смысле распределений в $D'(0,T)$, и

$$\tfrac{d}{dt}(\gamma_0(u) + p z_t, e)_{L^2(\Omega)} + (l z_t + r z, e)_{L^2(\Gamma_1)} = 0$$

для $\forall e \in L^2(\Gamma_1)$, в смысле распределений в $D'(0,T)$; а также:

$$[u + \mathsf{F}(u)]\big|_{t=0} = u^{(0)} + w^{(0)},\ \ u_t\big|_{t=0} = u^{(1)} \text{ п. в. в } \Omega,$$

$$z\big|_{t=0} = z^{(0)},\ z_t\big|_{t=0} = z^{(1)} \text{ п. в. на } \Gamma_1.$$

В следующей теореме установлен результат о существовании слабых решений задачи (74)-(79), используя метод дискретизации по переменному t.

Теорема 28. Пусть выполнены условия (33)-(37), (80)-(81) и

$$p, l, r \in C(\Gamma_1),$$

$$p(x) \geq 0,\ l(x) > 0,\ r(x) \geq 0 \text{ для } x \in \Gamma_1.$$

Тогда задача (74)-(79) имеет слабое решение (u, z).

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованиям смешанных задач с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений, а также начально-краевых задач для нелинейных гиперболических и параболических уравнений с запоминающими операторами и гистерезисными нелинейностями.

В диссертации получены следующие основные результаты:

- доказаны теоремы о существовании глобальных слабых решений смешанной задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с фокусирующими источниками, если $p \le \min\{q_1, q_2\}$ и о разрушении слабых решений этой задачи за конечный промежуток времени, если $p > \max\{q_1, q_2\}$;
- доказано существование, единственность и экспоненциальное убывание глобальных сильных решений смешанной задачи с акустическими условиями сопряжения для нелинейных волновых уравнений с дефокусирующими источниками; получен результат о существовании минимального глобального аттрактора для такой задачи;
- доказано существование и единственность решений начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором, получен результат о существовании минимального глобального аттрактора;
- получены результаты о существовании решений смешанных задач для системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами и для системы Тимошенко с запоминающим оператором; получен результат о существовании слабых решений смешанной задачи с акустическими граничными условиями для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка с запоминающим оператором // – Баку: Известия БГУ, серия физ.-мат. наук, – 2015. №3, – с. 88-98.
2. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором с акустическими граничными условиями // – Баку: Известия БГУ, серия физ.-мат. наук, – 2017. №1, – с. 34-43.
3. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами // – Елец: CONTINUUM Математика, Информатика, Образование, – 2018. №2 (10), – с. 35-40.
4. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного квазилинейного параболического уравнения с гистерезисом // – Екатеринбург: Международный научно-исследовательский журнал, часть I, – 2018. №9 (75), – р. 24-31.
5. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одной системы с акустическими условиями сопряжения // – Сыктывкар: Вестник Сыктывкарского Университета, Серия 1: Математика, Механика, Информатика, Образование, – 2018. №4 (29), – с. 34-42.
6. Исаева, С.Э. Существование глобального аттрактора для одной задачи с запоминающим оператором // Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию института математики и механики НАН Азербайджана, – Баку: – 2009. – с. 150-151.
7. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного квазилинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором // Материалы четвертой международной научной конференции "Функционально - дифференциальные уравнения и их приложения", – Махачкала: – 21 – 24 сентября, – 2009. – с. 127-128.
8. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного квазилинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором //

Тезисы Международной конференции, посвященной 80-летнему юбилею академика Ф. Г. Максудова “Спектральная теория и ее приложения“, – Баку: – 2010. – с. 173-175.
9. Исаева, С.Э. Смешанная задача для квазилинейного гиперболического уравнения // Тезисы II Международной школы-семинар “Нелинейный анализ и экстремальные задачи“, – Иркутск: – 28 июня – 4 июля, – 2010. – с. 32-33.
10. Исаева, С.Э. Существование ограниченного поглощающего множества для одной смешанной задачи с запоминающим оператором // Функциональный анализ и его приложения. Материалы Международной конференции, посвященной 100 летнему юбилею академика З.И.Халилова, – Баку: – 2011. – с. 156-159.
11. Исаева, С.Э. Существование ограниченного поглощающего множества для одной проблемы с гистеризисом // Материалы VI Международной научной конференции “Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения“, – Махачкала: – 23 – 26 сентября, – 2013. – с. 135-137.
12. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором // Актуальные проблемы математики и механики, Материалы Международной конференции, посвященной 55-летию института математики и механики НАН Азербайджана, – Баку: – 2014. – с. 180-182.
13. Исаева, С.Э. Асимптотическая компактность полугруппы, порожденной смешанной задачей для полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором // Материалы международной конференции “Прикладные отрасли математики и ИКТ. Новые учебные технологии”, – Гянджа: – 2014. – с. 94-101.
14. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка с запоминающим оператором // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 20 – 21 мая, – 2015. – с. 48-49.

15. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающим оператором // Материалы республикан-ской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 17 – 18 мая, – 2017. – с. 175-177.
16. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором с акустическими граничными условиями // Материалы V Международной научной конференции “Международные Колмогоровские чтения - XIV, посвященные 100-летию проф. З.А.Скопеца“, – Коряжма: – 12 – 15 сентября, – 2017. – с. 40-43.
17. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одной системы с акустическими граничными условиями // Материалы XII Международной конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики“, – Махачкала: – 19 – 22 сентября, – 2017. – с. 118-119.
18. Исаева, С.Э. Система полулинейных гиперболических уравнений с запоминающим оператором // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 2 – 3 ноября, – 2017. – с. 192-194.
19. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающим оператором // Материалы Международной Конференции посвященной 100-летию со дня рождения С.Г.Крейна, – Воронеж: – 13 – 19 ноября, – 2017. – с. 103-105.
20. Исаева, С.Э. Смешанная задача для одного квазилинейного параболического уравнения с гистерезисом // Новейшие достижения и успехи развития технических наук, Выпуск III, Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции, – Краснодар: июнь, – 2018. – с. 41-43.
21. Исаева, С.Э. Существование локальных решений смешанной задачи для волновых уравнений с акустическими условиями сопряжения // Материалы Международной научно-практической

конференции “Современная математика и ее приложения“, Чеченский Государственный Педагогический Университет, – Грозный: – 21 – 23 октября, – 2018. – с. 70-72.
22. Исаева, С.Э. Существование локальных решений для нелинейных волновых уравнений с акустическими условиями сопряжения // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 17 – 18 мая, – 2019. – с. 97-98.
23. Исаева, С.Э. Существование локальных решений для нелинейных гиперболических уравнений с акустическими условиями сопряжения // “Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики“, Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук, – Махачкала: – 16 – 20 сентября, – 2019. – с. 74-76.
24. Исаева, С.Э. Существование локальных решений для одного нелинейного уравнения с акустическими условиями сопряжения // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 20 – 21 мая, – 2020. – с. 135-136.
25. Исаева, С.Э. Существование локальных решений для одного нелинейного уравнения с акустическими условиями сопряжения // IV Всероссийская конференция с международным участием “Математическое моделирование и информационные технологии”, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, – Сыктывкар: – 12 – 14 ноября, – 2020. – с. 53.
26. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. The existence and behavior of global solutions to a mixed problem with acoustic transmission conditions for nonlinear hyperbolic equations with nonlinear dissipation // – Moscow: Doklady Mathematics, – 2018. 98 (3), – p. 555-558.
27. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear transmission acoustic problem // Turkish Journal of Mathematics, – 2018. 42 (6), – p. 3211-3231.

28. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. A qlobal attractor for one semilinear hyperbolic equation with memory operator // – Moscow: Computational Mathematics and Mathematical Physics, – 2015. vol. 55, №11, – p. 1823-1835.
29. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Exponential stability of the nonlinear transmission acoustic problem // Mathematical Methods in the Applied Sciences, – 2018. 41 (16), – p. 7055-7073.
30. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Attractors for Semilinear Wave Equations with Acoustic Transmission Conditions // – Moscow: Differential Equations, – 2020. 56, – p. 447-461.
31. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear transmission acoustic problem // Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industiral Applications, Volume II, – Baku: – 11 – 13 july, – 2018. – p. 56-58.
32. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Existence of local solutions for nonlinear wave equations with transmission acoustic conditions // "Modern problems of innovative technologies in oiland gas production and applied mathematics", Proceedings of the International Conference dedicated to 90th anniversary of acad. Azad Mirzajanzade, ANAS, Az. State Oil and Industry University, – Baku: – 13 – 14 december, – 2018. – p. 123-125.
33. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Attractor for nonlinear transmission acoustic problem // Spectral Theory and its Applications, International Workshop dedicated to 80th anniversary of acad. Mirabbas Geogja oglu Gasymov, IMM of NAS of Azerbaijan, – Baku: – 7 – 8 june, – 2019. – p. 31-33.
34. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. Attractor for nonlinear transmission acoustic problem // 8th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications Dedicated to the 100th Anniversary of Baku State University (IECMSA-2019), Book of Abstracts, – Baku: – 27 – 30 august, – 2019. – p. 99-100.
35. Isayeva, S.E. The mixed problem for one semilinear hyperbolic equation with memory // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2010. vol. XXX, № 1, – p. 105-112.

36. Isayeva, S.E. The mixed problem for quasilinear parabolic equation with memory // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2010. vol. XXXII, №1, – p. 111-118.
37. Isayeva, S.E. The existence of an absorbing set for one mixed problem with memory operator // – Baku: Transactions issue mathematics and mechanics series of physical-technical and mathematical sciences, – 2011. vol. XXXI, №4, – p. 85-94.
38. Isayeva, S.E. The existence of an absorbing set for one mixed problem with hysteresis // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, – 2013. vol. XXXIII, № 1, – p. 27-34.
39. Isayeva, S.E., Şukurova G. D. The initial-boundary value problem for one fourth order hyperbolic equation with memory operator // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, – 2016. vol. XXXVI, № 1, – p. 64-73.
40. Isayeva, S.E. The initial-boundary value problem for one system of semilinear hyperbolic equations with memory operator // – Baku: News of BSU, series of phus.-math. sciences, – 2018. №2, – p. 26-36.
41. Isayeva, S.E. Existence of local solutions for nonlinear wave equations with transmission acoustic conditions // – Baku: News of BSU, series of phus.-math. sciences, – 2018. №3, – p. 28-44.
42. Isayeva, S.E. The existence of a global attractor for one fourth order hyperbolic equation with memory operator // Universal Journal of Mathematics and Applications, – 2019. vol. II, Issue I, ISSN 2619-9653, – p. 36-41.
43. Isayeva, S.E., Rzayeva, N.A. Timoshenko systems with memory in external force // Applied Mathematical Sciences, HIKARI Ltd, – 2019. vol. 13, №2, – p. 87-101.
44. Isayeva, S.E. Existence of solutions of nonlinear strongly dissipative wave equations with acoustic transmission conditions // – Moscow: Computational Mathematics and Mathematical Physics, – 2020. 60, – p. 286-301.
45. Isayeva, S.E. Nonlinear wave equations with nonlinear transmission acoustic condition // – Baku: Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, – 2021. vol. 47, №2, – p. 232-249.

46. Isayeva, S.E. Existence of a bounded adsorbing set for one problem with hysteresis // Тезисы Международной конференции по физике, математике и технических наук, – Нахичевань: – 2008. – с. 99-100.
47. Isayeva, S.E. Existence of a bonded absorbing set for one problem with hysteresis // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, – Almaty: – june 30 – july 4, vol. 1, – 2009. – p. 217.
48. Isayeva, S.E., Rzayeva N.A. Timoshenko systems with memory operator in shear force // Материалы международной научной конференции “Теоретические и прикладные проблемы математики”, – Сумгаит: – 25 – 26 мая, – 2017. – с. 119-120.
49. Isayeva, S.E. The existence of a global attractor for one fourth order hyperbolic equation with memory operator // Abstracts of VI congress of the Turkic world mathematical society, – Astana: – 2 – 5 october, – 2017. – p. 71.
50. Isayeva, S.E. The existence and uniqueness of global solutions for the nonlinear transmission acoustic problem // Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы математики и механики”, – Баку: – 17 – 18 мая, – 2018. – с. 55-58.
51. Isayeva, S.E. Existence of global solutions of one nonlinear transmission acoustic problem // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference, International conference dedicated to Hamlet Isaxanli’s 70th anniversary, Khazar University, – Baku: – 21 – 24 may, – 2018. – p. 103-105.
52. Isayeva, S.E. Asymptotic behaviour of solutions of one fourth order hyperbolic equation with memory operator // IX International Conference of the Georgian Mathematical Union, – Batumi – Tbilisi: – 3 – 8 september, – 2018. – p. 135.
53. Isayeva, S.E. The existence of a global attractor for one fourth order hyperbolic equation with memory operator // Материалы Пятой Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения Л.Д.Кудрявцева “Функциональные пространства“, Российский Университет Дружбы Народов (РУДН), – Москва: – 26 – 29 ноября, – 2018. – с. 97-98.

Защита диссертации состоится **6 мая 2022 года в 14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04, действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещены на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **30 марта 2022** года.

Подписано в печать: 25.02.2022
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 77646
Тираж: 70