АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ФРЕЙМОВЫ СВОЙСТВА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ТИПА СИСТЕМЫ КОСТЮЧЕНКО И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Специальность: 1202.01-Анализ и функциональный анализ

Область науки: Математика

Соискатель: **Айдын Шукюр оглы Шукюров**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора наук

Баку-2022

Диссертационная работа выполнена в Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

Научный консультант: член–корр. НАНА,д.ф.–м.н., профессор
Билал Тельман оглы Билалов

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор

Идаят Магомед оглы Гусейнов

доктор физико-математических наук, профессор

Рагим Микаил оглы Рзаев

доктор математических наук, доцент

Ровшан Алифага оглы Бандалиев

доктор математических наук, профессор

Эльнур Гасан оглы Халилов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президента Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики НАНА.

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_____ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.,

_____ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

_____ **Гамидулла Исрафил оглы Асланов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. Теория базисов, как самостоятельная область исследований, была изучена в многочисленных исследованиях. Темы этих исследований включают в частности критериев базисности систем в разных пространствах, исследование базисности систем в некотором смысле близкой к базису, изучение некоторых свойств операторов, действующих в пространствах с базисами, исследования абстрактных условий на пространство, под которым он обладает базисами и т. д. В качестве примера научных публикаций посвященных теории базисов приведем монографии И. Сингера, Р. Юнга, А. М. Седлецкого, С. Хейла, Б.Т. Билалова и др. и обзорные работы В.Д.Мильмана, Н.К.Бари, И.Гохберга и А.Маркуса и др.

Представленная выше информация, описывающая лишь очень небольшую часть общей картины, призвана показать, что внутренние теоретические вопросы теории базисов сами по себе также представляют большой интерес. Тем не менее, применение этой теории для решения проблем, возникающих в других областях математики и других естественных наук, показывает важность этой теории также с точки зрения применения.

Следует отметить, что обычно во внутренних задачах теории базисов рассматриваются свойства базисности систем, удовлетворяющих некоторым условиям, не связанным непосредственно с их формой; но в задачах прикладного характера возникает необходимость изучения базисности систем определенного вида в некоторых конкретных пространствах. В этих задачах вид рассматриваемой системы меняется в зависимости от задачи, порождающей систему. В качестве примера таких задач прикладного характера может быть показана необходимость исследования базисности систем, возникающих при обосновании метода Фурье, широко используемого в теории дифференциальных уравнений.

В связи с приложениями в той или иной задаче широко изучены свойства базисности классической системы экспонент $\left\{e^{i\,nt}\right\}_{n\in Z}$, синусов $\{\sin nt\}_{n\in N}$ и косинусов $\{\cos nt\}_{n\in Z^+}$ в различных пространствах. Однако некоторые проблемы математики теоретического характера и проблемы, возникающие в приложениях, требуют исследования базисности не только этих систем, но и базисности различных модификаций этих систем. Например, такие модифицированные системы изучались в связи с изучением свойств базисности собственных функций некоторых дифференциальных операторов в некоторых весовых пространствах. В качестве примера такой теоретической проблемы можно также привести результат К.И.Бабенко: Бабенко привел пример $\{|t|^{\alpha}\, e^{int}\}_{n\in Z}$, где $|\alpha|<\dfrac{1}{2}$ и $\alpha\neq 0$, утвердительно отвечая на вопрос Бари о существовании нормированного базиса в $L_2(-\pi,\pi)$, который не является базисом Рисса.

Начиная с этого результата, многие работы были посвящены также исследованию свойств базисности (полноты, минимальности и базисности Шаудера) систем вида

$$\left\{\prod_{j=1}^{r}\left|t-t_j\right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in \mathrm{Z}},$$

$$\left\{\prod_{j=1}^{r}\left|t-t_j\right|^{\alpha_j} \cos nt\right\}_{n\in \mathrm{Z}_+},$$

$$\left\{\prod_{j=1}^{r}\left|t-t_j\right|^{\alpha_j} \sin nt\right\}_{n\in N}.$$

Например, системы вышеупомянутого вида изучались в связи с изучением свойств базисности собственных функций некоторых дифференциальных операторов в некоторых весовых пространствах.

Упомянутый результат Бабенко был затем расширен В.Ф.Гапошкиным в его знаменитой работе, где, в частности, было дано некоторое достаточное условие (на весовую функции $\omega(t)$), чтобы система $\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z}$ была базисом в $L_2(-\pi,\pi)$. В конце концов, было получено необходимое и достаточное условие в терминах весовой функции $\omega(t)$, которая обеспечивает базисность Шаудера экспоненциальной системы $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ в весовом пространстве Лебега $L_{p,\omega()}(-\pi,\pi)$; таким условием является условие Макенхаупта относительно весовой функции $\omega(t)$:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-\frac{1}{p-1}}(t)dt\right)^{p-1} < \infty,$$

где sup берется по всем интервалам $I \subset [-\pi,\pi]$, а $|I|$ обозначает длину интервала I. <u>В качестве примера работ в этом направлении можно привести работы В.Ф. Гапошкина, R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, W.S. Young и др.</u>

Отметим, что изучение свойств базисности системы в весовых пространствах Лебега $L_{p,\omega()}$ эквивалентно изучению аналогичных свойств этой системы с соответствующим вырожденным коэффициентом в «обычном» пространстве Лебега L_p. Следовательно, указанный критерий можно также рассматривать как необходимое и достаточное условие базисности Шаудера в L_p экспоненциальной системы с вырожденными коэффициентами $\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z}$.

В качестве примера применения теории базиса в других областях математики может быть показана необходимость исследования базисности систем, возникающих в спектральной теории дифференциальных операторов. Например,

необходимость исследования базисности так называемой системы Костюченко

$$S_\alpha^+ \equiv \{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}},$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, вообще говоря, комплексное число, возникает в связи со спектральной задачей для несамосопряженного квадратичного пучка

$$-y''(t)+2\alpha\lambda y'(t)+(\alpha^2+1)\lambda^2 y(t)=0,\ t\in(0,\pi),$$

с граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$.

Задача А.Г. Костюченко, предложенная в 1969 г. с предложением использовать только чисто функциональные методы для исследования полноты и базисности системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$ хорошо известна в спектральной теории пучков дифференциальных операторов. Первый результат в этом направлении был получен в 1971 г. Б.Я. Левиным: он доказал, что система S_α^+ полна в пространстве $L_2(0,\pi)$ для всех $\alpha \in iR$. Следует также отметить, что этот результат был ранее получен М.Г.Джавадовым с использованием другого подхода.

Начиная с статьи М.Г. Джавадова многие работы были посвящены исследованию базисных свойств (базисность, полнота, минимальность) системы S_α^+ в пространствах $L_p(0,\pi)$, $1 \le p < +\infty$. Некоторые результаты, полученные в этом направлении, таковы: в случае, когда $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\}$ получены критерии полноты и минимальности системы S_α^+ в $L_2(0,\pi)$. В частности, оно является полным и минимальным в $L_2(0,\pi)$ для $\forall\alpha \in i\mathbb{R}$, то есть для всех мнимых α.

В целом, полнота и минимальность упомянутой системы S_α^+ изучались во многих работах, и можно сказать, что полнота и минимальность этой системы были изучены практически полностью. Однако изучение базисности Шаудера системы

Костюченко S_α^+ представляет собой ряд трудностей по нескольким причинам по сравнению с исследованием полноты и минимальности этой системы. Существует очень мало результатов в этом направлении по сравнению с результатами полноты и минимальности. Отметим некоторые из этих результатов: используя результаты общего характера для базисности корневых векторов пучков квадратичных операторов, А.А.Шкаликов доказал, что если

$$\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

то S_α^+ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Л.В. Крицков доказал, что если $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, то S_α^+ не является равномерно минимальной и следовательно, базисом Шаудера в пространстве $L_2(0,\pi)$. Наиболее исчерпывающий результат в изучении базисности Шаудера системы Костюченко принадлежит Б. Билалову; Б.Т.Билалов получил критерий базисности системы S_α^+ в пространстве $L_2(0,\pi)$ относительно параметра, входящего в систему.

Следует отметить, что система S_α^+ также представляет интерес с точки зрения ее применения в практических задачах. Например, изучение базисных свойств системы Костюченко интересно с точки зрения теории оптимального управления. Подобные проблемы также встречаются и в контексте затухающих колебаний больших механических систем. Задачами такого рода можно познакомится, например, в работах А. Г. Бутковского, Л.А. Муравя.

Понятие фрейма, как нам известно, было введено в работе R.J. Duffin и A.C. Schaeffer в связи с изучением некоторых вопросов негармонических рядов Фурье относительно возмущенных систем экспонент. В этой работе установлены некоторые свойства фреймов из систем экспонент.

В этой работе также было введено понятие абстрактного фрейма в гильбертовом пространстве и перенесены на этот случай некоторые свойства фреймов из экспонент.

В 80-ые годы прошлого века были найдены применения вейвлетов в различных областях естествознания. Вейвлеты широко применяются в задачах обработки и кодирования сигналов, изображений различной природы (речь, спутниковые изображения, рентгенограммы внутренних органов и т.п.), распознавания образов, при изучении свойств поверхностей кристаллов и нанообьектов и во многих других областях.

В связи с многочисленными приложениями в различных областях естествознания теория фрейма бурно развивается и к ней интерес возрастает с каждым днем. В качестве примера научных публикаций, посвященных теории фреймов, приведем монографии Ch. Chui, Y.Meyer, I.Daubechies, S.Mallat, R.Young, Ch. Heil, O.Christensen и др. и обзорные работы P. Cazassa и др.

Исследование свойств фреймовости для семейств элементов, полученных с помощью итераций операторов, является одной из центральных проблем "динамической выборки", которая является относительно новой темой исследования в прикладном гармоническом анализе. Это новое направление исследований привлекло значительное внимание в последние годы (см., например, работы A. Aldroubi, O.Christensen, C. Cabrelli, A. Cakmak, U.Molter, M. Hasannasab, F. Philipp, D. Stoeva, и т.д.).

Известно, что понятия ортогональных и ортонормированных систем играют важную роль при изучении ряда проблем, связанных с гильбертовыми пространствами. Это относится к изучению свойств самих этих систем, а также к идентификации свойств различных объектов через эти системы. К этому кругу вопросов относится, например, известная характеристика Рингроуза компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, в терминах ортонормированных систем. Эта характеристика компактных операторов утверждает, что линейный ограниченный оператор,

действующий в гильбертовом пространстве H, компактен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет $\|Ae_n\| \to 0$ для каждой ортонормированной последовательности $\{e_n\}$ в H. В этом направлении есть работы Дж.Р. Рингроуза, П.А. Филлмор и Дж. П. Уильямса, Дж. Х. Андерсон и Дж. Г. Стампфли, К. Мурои и К. Тамаки, Д. Бакич и Б. Гуляс.

Хорошо известно, что в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис Шаудера, т.е. базис Шаудера $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\|x_n\| = 1$ и $(x_n, x_m) = 0$ для любых $n, m \in N, n \neq m.$ Тот факт, что существует базис, где здесь 1 заменена на любое другое положительное число, тривиален. Поэтому, естественно возникает вопрос о существовании базиса, где углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю, т.е. 0 заменена на другое число. Первый, известный нам, результат в этом направлении принадлежит Т.Е. Хмылеву и И.П. Бухтиной. М.А.Садыбеков и А.М. Сарсенби, изучая вопрос о безусловной базисности, получили аналогичный результат для почти нормированных последовательностей. Несмотря на существование различных абстрактных критериев базисности, иногда проверка того, является ли данная последовательность базисной или нет для конкретных последовательностей элементов, представляет значительную трудность. Следовательно, получение легко проверяемых условий является весьма актуальной задачей, и работы указанных авторов интересны и с этой точки зрения.

Диссертационная работа в целом посвящена выше приведенному кругу вопросов теорий базисов и фреймов. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет научный интерес.

Объект и предмет исследования. Пространства Лебега, пространство непрерывных функций, весовые экспоненциальные и весовые тригонометрические системы,

ортонормированные системы и системы ортонормированного типа, системы типа Костюченко, системы степеней, итерации оператора умножения.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является характеризация весов относительно базисных свойств тригонометрических систем в лебеговых пространствах, получение необходимых условий относительно базисных свойств систем типа системы Костюченко в лебеговых пространствах, получение некоторых свойств последовательностей ортонормированного типа, характеризация компактных операторов на языке ортонормированной системы, исследование фреймовости систем из итераций оператора умножения.

Методы исследования. При получении основных результатов применяются методы функционального анализа, теории базисов, теории фреймов, теории функций комплексного переменного, теории аппроксимации и гармонического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Характеризация весов, относительно которых экспоненциальные и тригонометрические системы являются полными и минимальными в лебеговых пространствах;

2. Характеризация весов, относительно которых система экспонент и тригонометрическая система имеют избытки, равный 1.

3. Получение необходимых условий для базисности систем типа системы Костюченко

$$\left\{\varphi^{n}(t)\sin nt\right\}_{n\in N}$$

и

$$\left\{\varphi^{n}(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$$

в пространствах L_p $(1\le p<+\infty)$.

4. Вопросы базисности систем вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $L_p[a,b]$ и $C[a,b]$.

5. Вопросы псевдо-базисности системы степеней $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ в $C[a,b]$.

6. Вопросы фреймовости орбит $\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оператора умножения $T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t),\ f \in L_2(a,b)$, в пространстве $L_2(a,b)$.

7. Некоторые вопросы, связанные с базисными свойствами псевдоортогональных систем в гильбертовом пространстве.

8. Характеризация компактных операторов на языке ортонормированных систем.

Научная новизна исследования.

1. Полностью исследуются полнота и минимальность в пространствах L_p систем вида

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}$$

когда две из степеней α_j не удовлетворяют условию Макенгаупта.

2. Определен класс всех функций $\omega(t) \in L_p(-\pi,\pi)$ $\left(\omega(t) \in L_p(0,\pi)\right)$ для которых система $\{\omega(t)e^{int}\}_Z$ $\left(\{\omega(t)\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\right)$ становится полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi), 1 < p < \infty,$ когда исключается ровно один из ее членов.

3. Показано, что когда система $\{\varphi_n(t)\}$ является классической системой синусов, при естественном условии

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0,$$

из того, что $\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p$ для любого n, следует полнота $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ в пространстве L_p. Кроме того, доказывается, что этот факт, аналоги которого хорошо известны для классических экспоненциальных и косинусных систем, в общем случае неверен для произвольных полных или полных ортонормированных систем;

4. Приведен пример весовой функции $\omega(\cdot) \in L_p(0,\pi)$, для которой система $\{\omega(t)\cos nt\}_{Z_+}$ является полной в $L_p(0,\pi)$, но ни эта система, ни система, полученная исключением какого-либо конечного числа ее элементов, не является полной и минимальной в $L_p(0,\pi)$.

5. Получено необходимое условие базисности систем типа системы Костюченко $\left\{\varphi^n(t)\sin nt\right\}_{n\in N}$ и $\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$ в пространствах L_p $(1 \le p < +\infty)$. В частности, из этого результата находим необходимое условие базисности системы Костюченко

$$\{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\in\mathrm{N}}$$

в L_p $(1 \le p < +\infty)$.

6. Показано, что

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

не является базисом в пространстве $L_p[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая измеримая почти всюду конечная функция на $[a,b]$.

7. Показано, что

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

не является базисом в пространстве $C[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая (действительная или комплексная) непрерывная функция на $[a,b]$.

8. Показано, что система вида

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

не может быть псевдобазисом в $C[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая (действительная или комплекснозначная) непрерывная функция на $[a,b]$.

9. Исследуются вопросы фреймовости орбит

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

и

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

оператора умножения

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t),\ f \in L_2(a,b),$$

в пространстве $L_2(a,b)$. Показано, что орбита

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

оператора умножения T_φ не может образовывать фрейм для пространства $L_2(a,b)$ для любого измеримого генератора $\varphi(t)$ и любого $f \in L_2(a,b)$. Характеризованы все фреймы вида

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

являющихся итерациями оператора умножения T_φ. Показано, что эта проблема может быть сведена к следующей: *Найдите (или опишите класс) всех вещественных функций* $\alpha(t)$, *для которых*

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

является фреймом в $L_2(a,b)$. Дается частичный ответ на эту проблему.

10. Исследуется базисность последовательностей элементов в гильбертовом пространстве, для которых углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю

и базисность последовательностей $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих ограниченную подпоследовательность $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что

$$\left|\left(e_{n_k}, e_{n_m}\right)\right| = \alpha > 0$$

для всех достаточно больших $k, m \in N,\ k \neq m.$

11. Дано краткое, более простое и элементарное доказательство одной характеристики компактных операторов с помощью ортонормированных последовательностей; приведенное доказательство показывает, что этот факт справедлив также для операторов, действующих из гильбертова пространства в некоторое банахово (не обязательно гильбертово) пространство.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории аппроксимации, в теории фреймов, в спектральной теории дифференциальных операторов, для обоснования метода Фурье при решении дифференциальных уравнений и т.п.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах отдела «Негармонический анализ» ИММ НАН Азербайджана (руководитель доктор физико-математических наук, чл. корр. НАН Азербайджана, профессор Б.Т. Билалов), на семинарах отдела «Функциональный анализ» (руководитель доктор физико-математических наук, профессор Н.Ш. Искендеров), на общеинститутских семинарах Института Математики и Механики и НАН Азербайджана и апробированы на различных международных научных конференциях.

Личный вклад автора. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются личным вкладом автора.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 27 работах.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена в отделе "Негармонический анализ" Института Математики и Механики НАН Азербайджана.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).

Общий объем диссертационной работы – 378927 знаков (титульная страница – 433 знаков, содержание – 2494 знаков, введение – 66000 знаков, первая глава – 68000 знаков, вторая глава – 122000 знаков, третья глава –54000 знаков, четвертая глава-38000 знаков, пятая глава–26000 знаков, выводы –2000 знаков). Список используемой литературы состоит из 139 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, дается обзор работ, примыкающих к теме диссертации, и излагается краткое содержание работы.

Прежде чем перейти к описанию параграфов, напомним некоторые определения:

Определение 1. *Последовательность векторов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *называется базисом Шаудера для* X*, если каждому вектору* x *соответствует единственная последовательность скаляров* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \ldots$$

в норме пространства X *.*

Определение 2. *Последовательность векторов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *называется базисной последовательностью, если она является базисом Шаудера для замыкания своей линейной оболочки.*

Определение 3. *Пусть* $\{x_n\}_{n\in N}$ *- система элементов в банаховом пространстве* B. *Обозначим через* B_k *замыкание линейной оболочки* $\{x_n\}_{n\in N, n\neq k}$. *Если существует* $\delta > 0$ *такой, что*

$$\inf_{y\in B_k} \|x_k - y\| \geq \delta \|x_k\|$$

для всех $k \in N$, *то* $\{x_n\}_{n\in N}$ *называется равномерно минимальной системой в* B.

Определение 4. *Пусть в банаховом пространстве* B *задана «двойная» система элементов* $\{x_n^+, x_n^-\}_{n\geq 0}$. *Система* $\{x_n^+, x_n^-\}_{n\geq 0}$ *называется базисом для* B, *если для каждого* $x \in B$ *существует единственная последовательность чисел* $\{a_n^+, a_n^-\}_{n\geq 0}$ *такая, что*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N^+} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} a_n^- x_n^- - x \right\| \to 0 \text{ при } N^+, N^- \to \infty.$$

Определение 5. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *с* $x_n \neq 0$ *называется псевдобазисом (или системой представления) для* X, *если каждому вектору x в пространстве соответствует последовательность скаляров* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *такая, что*

$$x = \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_n x_n + \ldots .$$

Очевидно, что всякий базис Шаудера является псевдобазисом, но обратное, вообще говоря, неверно. В частности, известно, что каждое сепарабельное банахово пространство содержит псевдо-

базис; но хорошо известно, что не каждое сепарабельное банахово пространство имеет базис Шаудера.

Определение 6. *Последовательность* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *в гильбертовом пространстве* H *является фреймом для* H, *если существуют такие константы* $A, B > 0$, *что*

$$A\|x\|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \le B\|x\|^2$$

для всех $x \in H$; *если* $A = B$, *то фрейм* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *называется* A-*жестким фреймом.*

Глава I посвящена изучению свойств базисности (полноты, минимальности, базисност Шаудера) вырожденных экспоненциальных систем конкретного вида в пространствах Лебега.

Эта глава состоит из трех параграфов.

Параграф 1.1 посвящен исследованию полноты и минимальности системы вида

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} |t - t_j|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}.$$

В этом параграфе мы рассмотрим систему вида

$$\left\{ \omega(t) e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in Z}, \qquad (1)$$

где

$$\omega(t) = |t - t_1|^{\alpha_1} |t - t_2|^{\alpha_2} \prod_{j=3}^{r} |t - t_j|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}},$$

$$t_j \in [-\pi, \pi]$$

для всех $1 \le j \le r$ и

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q} \right),$$

$$\alpha_j \in \left(-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

для всех $3 \le j \le r$.

Обозначим через Q множество всех рациональных чисел.

Сначала доказывается следующий факт о полноте и минимальности системы

$$\left\{|t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z},$$

где

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{1}{q}, 1+\frac{1}{q}\right).$$

Теорема 1. *Рассмотрим систему*

$$\left\{|t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z},$$

где $t_1, t_2 \in [-\pi, \pi]$ *и*

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \left[\frac{1}{q}, 1+\frac{1}{q}\right).$$

При условиях

1) $\dfrac{t_2 - t_1}{\pi} \notin Q$;

2) $|t_2 - t_1| = 2\pi$;

3) $t_2 - t_1 = 2\pi \dfrac{k}{m}$, *где* $m \ne 1$ *и* $НОД(k,m) = 1$,

справедливы следующие результаты:

1) *система*

$$\left\{|t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2} e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *для любого выбора индексов* k_1 *и* k_2*;*

2) система

$$\left\{|t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2}e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *для любого целого* k_0*;*

3) *система*

$$\left\{|t-t_1|^{\alpha_1}|t-t_2|^{\alpha_2}e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $k_2 \neq k_1 (\mathrm{mod}\, m)$.

Доказательство этой теоремы, представленное в диссертации, показывает, что верно и следующее более общее утверждение:

Теорема 2. *Рассмотрим систему* (1). *Следующие утверждения верны:*

1) *Если* $\dfrac{t_2-t_1}{\pi} \notin Q$, *то система*

$$\left\{\omega(t)\cdot e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *для любого выбора индексов* k_1 *и* k_2*;*

2) *Если* $|t_2-t_1| = 2\pi$, *то система*

$$\left\{\omega(t)\cdot e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *для любого целого* k_0 *;*

3) *Если* $t_2-t_1 = 2\pi\dfrac{k}{m}$, *где* $m \neq 1$ *и* $НОД\,(k,m)=1$, *то система*

$$\left\{\omega(t)\cdot e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_1;k_2\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда* $k_2 \neq k_1 (\mathrm{mod}\, m)$.

Параграф 1.2 посвящен определению класса всех функций $\omega(t) \in L_p(-\pi,\pi),$ для которых система

$$\left\{\omega(t)e^{\text{int}}\right\}_{n\in Z}$$

становится полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi),$ $1 < p < \infty,$ когда исключается ровно один из ее членов.

Цель этого параграфа - доказать следующий факт.

Теорема 3. *Пусть* k_0 *любое целое число. Система*

$$\left\{\omega(t)e^{\text{int}}\right\}_{n\in Z/\{k_0\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi),$ $1 < p < \infty,$ *тогда и только тогда когда*

$$\omega(t) \in L_p(-\pi,\pi),\ \frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(-\pi,\pi)$$

и кроме того,

1) *существует (единственная) точка* $t_0 \in [-\pi,\pi],$ *такая, что*

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in L_q(-\pi,\pi);$$

или

2) $\dfrac{(t-\pi)(t+\pi)}{\omega(t)} \in L_q(-\pi,\pi).$

Из этой теоремы непосредственно следует следующее

Следствие 1. *Если система*

$$\left\{\omega(t)e^{\text{int}}\right\}_{n\in Z}$$

становится полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ *когда исключается один из ее членов, то она также становится полной и минимальной в* $L_p(-\pi,\pi)$ *когда исключается любой из ее членов.*

Параграф 1.3 посвящен изучению базисности Шаудера системы

$$\left\{\omega(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$$

после исключения некоторого числа ее элементов в лебеговых пространствах.

Целью данного параграфа является доказательство следующего предложения.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая функция, а* $n_1,...,n_k$ *- любые целые числа. Тогда система*

$$\{\omega(t)e^{int}\}_{n\in Z/\{n_1,...,n_k\}}$$

не является базисом Шаудера в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$.

Следует отметить, что, несмотря на независимость доказательств, приведенных в этой диссертации, утверждение этой теоремы и теоремы из Параграфа 2.3 следуют из более общего аналогичного результата, приведенного в ранее опубликованных статьях К.С.Казаряна и этот результат не указан в списке представленных положений для защиты этой диссертации и приводится здесь только для прояснения вопроса о базисности вырожденной системы экспоненциальных и тригонометрических систем с избытком, который естественно возникает после обсуждения полноты и минимальности таких систем.

Глава II посвящена исследованию базисных свойств (полноты, минимальности и базисности Шаудера) весовых тригонометрических (синус, косинус) систем с общим весом.

Эта глава состоит из четырех параграфов.

Параграф 2.1 посвящен исследованию полноты вырожденной системы синусов.

Теорема 5. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая измеримая функция на* $(0,\pi)$ *такая, что*

1) $mes\{t:\omega(t)=0\}=0$

и

2) $\omega(t) sinnt \in L_p(0,\pi), \forall n \in N$.

Тогда система

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

является полной в пространстве $L_p(0,\pi)$.

Следует отметить, что приведенное выше утверждение и хорошо известный аналогичный результат для системы косинусов и системы экспонент показывают, что система $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$, где $\{\varphi_n(t)\}$ экспоненциальные или тригонометрические (косинус или синус) системы, становится полной в соответствующем пространстве Лебега $L_p(-\pi,\pi)$ или $L_p(0,\pi)$, соответственно, всякий раз, когда

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0$$

и $\omega(t)\varphi_n(t)$ принадлежит соответствующему пространству Лебега для всех индексов n. Этот вывод может создать впечатление, что если функция $\omega(t)$ такова, что

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0$$

и

$$\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p(a,b)$$

для всех индексов n, где $\{\varphi_n(t)\}$ любая полная система в $L_p(a,b)$, то система $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ также является полной в пространстве $L_p(a,b)$. Результаты, полученные в этой диссертации, показывают, что в общем случае это не так.

Теорема 6. *Существует полная система* $\{\varphi_n(t)\}$ *в пространстве* $L_p(-\pi,\pi)$ *и измеримая функция* $\omega(t)$, *такая что*

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0$$

и

$$\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p(-\pi,\pi)$$

для всех индексов n, *но система* $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ *не является полной в* $L_p(-\pi,\pi)$.

Используя доказательство этой теоремы и применяя процесс ортогонализации Шмидта к системе, приведенной в доказательстве этой теоремы, мы сразу получаем справедливость следующего факта.

Теорема 7. *Существует полная ортонормированная система* $\{\varphi_n(t)\}$ *в пространстве* $L_2(-\pi,\pi)$ *и измеримая функция* $\omega(t)$, *такая что*

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0$$

и

$$\omega(t)\varphi_n(t)\in L_2(-\pi,\pi)$$

для всех индексов n, *но система* $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ *не является полной в* $L_2(-\pi,\pi)$.

Помимо этих результатов получаются следующие описания наибольшего набора функций $\omega(t)$, для которых система

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

является полной системой в $L_p(0,\pi)$:

Теорема 8. *Система*

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

является полной в $L_p(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда*

$$t(t-\pi)\omega(t)\in L_p(0,\pi)$$

и

$$mes\{t:\omega(t)=0\}=0.$$

Теорема 9. *Система*

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N}$$

является полной системой в $L_p(0,\pi)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\omega(t)\sin t \in L_p(0,\pi)$$

и

$$mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0.$$

Основной целью параграфа 2.2 является определение класса всех функций $\omega(t)$, для которых система $\{\omega(t)\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ становится полной и минимальной в пространстве $L_p(0,\pi)$, $1 < p < \infty$, при исключении одного из ее членов.

Для простоты мы используем обозначение

$$R_k = \{t : t \in [0,\pi],\ \cos kt = 0\}.$$

Основная цель этого параграфа - доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть* $k_0 \in Z_+$ *– произвольное число. Система*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n \in Z_+ / \{k_0\}}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(0,\pi)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда*

$$\omega(t) \in L_p(0,\pi),$$

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(0,\pi)$$

и, кроме того,

1) $\dfrac{t^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$;

или

2) $\dfrac{(t-\pi)^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$;

или

3) *существует (единственная) точка* $t_0 \in (0,\pi)$ *такая, что* $t_0 \notin R_{k_0}$ *и*

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi).$$

Предложение 1. *Пусть функция* $\omega(t) \in L_p(0,\pi)$ *и точка* $t_0 \in (0,\pi)$ *таковы, что*

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(0,\pi)$$

и

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi).$$

Если $t_0 \in R_{k_0}$, *то система*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+/\{k_0\}}$$

не является ни полной, ни минимальной в $L_p(0,\pi)$.

В качестве следствия этих утверждений получаем справедливость следующего следствия, которое описывает множество всех функций $\omega(t)$, для которых система $\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$ становится полной и минимальной в пространстве $L_p(0,\pi)$, когда исключается какой-либо из ее членов.

Следствие 2. *Система*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$$

является полной и минимальной в пространстве $L_p(0,\pi)$, $1<p<\infty$, *когда любой из членов исключается тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{\omega(t)} \notin L_q(0,\pi)$$

и помимо этого

1) $\dfrac{t^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$;

или

2) $\dfrac{(t-\pi)^2}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi)$;

или

3) *существует точка* $t_0 \in (0,\pi)$ *такая, что* $t_0 \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R_k$ *и*

$$\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in L_q(0,\pi).$$

Параграф 2.3 посвящена базисности Шаудера вырождающихся тригонометрических систем с общим весом, имеющих избыток.

Для доказательства основного результата первой части этого параграфа, мы используем некоторые вспомогательные факты. Одним из таких фактов является следующая

Лемма 1. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая нетривиальная измеримая функция из* $L_p(0,\pi)$, $1 \le p < \infty$. *Тогда*

$$\inf_{n \in Z_+} \|\omega(t)\cos nt\|_{L_p} \ne 0.$$

Теорема 11. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая функция, а* $k_0 \in Z_+$ *- любое целое число. Тогда система*

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n \in Z_+ / \{k_0\}}$$

не является базисом Шаудера в пространстве $L_p(0,\pi)$, $1 < p < \infty$.

Вторая часть параграфа 2.3 посвящена исследованию базисности Шаудера вырождающихся системы синусов.

Для доказательства основного результата этой части этого параграфа, воспользуемся следующим вспомогательным фактом.

Лемма 2. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая нетривиальная измеримая функция на* $[0,\pi]$ *такая, что*

$$\omega(t)\sin nt \in L_p(0,\pi),\ 1 < p < \infty,$$

для всех $n \in N$. *Тогда*

$$\inf_{n\in N}\left\|\omega(t)\sin nt\right\|_{L_p(0,\pi)} \neq 0.$$

Основным утверждением этой части является следующая

Теорема 12. *Пусть* $\omega(t)$ *- любая измеримая функция, а* k_0 *- любое натуральное число. Тогда система*

$$\{\omega(t)\sin nt\}_{n\in N/\{k_0\}}$$

не является базисом Шаудера в пространстве $L_p(0,\pi)$.

В параграфе 2.4 дано пример весовой функции $\omega(t) \in L_p(0,\pi)$, для которой система $\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$ является полной системой в $L_p(0,\pi)$, но ни эта система, ни система, полученная путем исключения какого-либо конечного числа ее элементов, не является полной и в то же время минимальной в $L_p(0,\pi)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 13. *Пусть* $\omega(t)$*- любая непрерывная функция, определенная на* $[0,\pi]$*, которая бесконечно дифференцируема в нуле,* $\omega(t) \neq 0$ *почти всюду и*

$$\omega^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in Z_+.$$

Тогда система

$$\{\omega(t)\cos nt\}_{n\in Z_+}$$

полна, но не минимальна и не может быть сделана полной и минимальной в $L_p(0,\pi)$ *путем исключения конечного числа ее членов.*

Известно, что множество функций $\omega(t)$, которые непрерывны на $[0,\pi]$, бесконечно дифференцируемы в нуле, $\omega(t)\neq 0$ почти везде и

$$\omega^{(n)}(0)=0,\ \forall n\in Z_{+}.$$

не пусто. Например, следующая функция

$$\omega(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & если\ \ t\neq 0; \\ 0, & если\ \ t=0. \end{cases}$$

удовлетворяет всем этим условиям.

Глава III диссертации посвящена изучению базисных свойств (полноты, минимальности, базисности и т. д.) систем вида

$$\left\{\varphi^{n}(t)\sin nt\right\}_{n\in N},$$

$$\left\{\varphi^{n}(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}},$$

где $\varphi:[a,b]\to C$ измеримая, почти всюду конечная функция и a,b некоторые вещественные числа, и двойной системы функций вида

$$\left\{A(t)\varphi^{n}(t);B(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0},$$

в пространствах Лебега $L_p=L_p(a,b)$, $1\leq p<\infty$, и некоторые базисные свойства систем вида

$$\left\{\varphi^{n}(t)\right\}_{n\in N}$$

в пространствах Лебега и пространствах непрерывных функций.

Эта глава состоит из пяти параграфов.

Параграф 3.1 посвящен исследованию необходимых условий базисности степенных систем вида

$$\left\{A(t)\varphi^{n}(t);B(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0},$$

в пространствах Лебега.

Рассмотрим следующую систему функций

$$\left\{A(t)\varphi^{n}(t); B(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0}. \qquad (2)$$

Предположим, что комплексные функции $A(t)$, $B(t)$, и $\varphi(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Функции $|A(t)|, |B(t)|$ измеримы на (a,b); кроме того

$$\sup vrai\left\{|A(t)|^{\pm 1}, |B(t)|^{\pm 1}\right\} < \infty;$$

2) $\varphi(t)$ является непрерывной функцией на $[a,b]$.

Теорема 14. *Предположим, что функции* $A(t)$, $B(t)$, и $\varphi(t)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2). *Если система* (2) *является базисом в* L_p, *то* $|\varphi(t)| \equiv const$ *на* $[a,b]$.

Пусть, символы I или J обозначают пустое или конечное множество. Положим

$$A_1(t) = A(t)\prod_{i\in I}|t-\xi_i|^{\alpha_i},\ t\in[a,b],$$

$$B_1(t) = B(t)\prod_{j\in J}|t-\theta_j|^{\beta_j},\ t\in[a,b],$$

где $A(t)$, $B(t)$ удовлетворяет условию 1), $\xi_i\,(i\in I)$, $\theta_j\,(j\in J)$ - некоторые точки в $[a,b]$ и $\alpha_i (i\in I)$, $\beta_j\,(j\in J)$ - некоторые скаляры.

Справедливо следующее обобщение Теоремы 14.

Теорема 15. *Если система*

$$\left\{A_1(t)\varphi^{n}(t); B_1(t)\overline{\varphi}^{n}(t)\right\}_{n\geq 0}$$

является базисом в L_p, *то* $|\varphi(t)| \equiv const$ *на* $[a,b]$.

Эти результаты позволяют получить аналогичные результаты для весовых пространств $L_{p,\rho(t)}(a,b)$, где $1\leq p<\infty$, и $\rho(t)$ - неотрицательная непрерывная функция с конечным числом вырождений, точнее

$$\rho(t) \equiv \prod_{i\in I}|t-\mu_i|^{\omega_i},$$

где μ_i - некоторые точки в $[a,b]$ и ω_i - некоторые скаляры.

Справедлива следующая

Теорема 16. *Если система* (2) *является базисом в* $L_{p,\rho(t)}(a,b)$, *то* $|\varphi(t)| \equiv const$ *на* $[a,b]$.

Следует отметить, что подход, использованный в параграфе 3.3 показывает, что результаты параграфа 3.1 остаются в силе при более общих предположениях. А именно, в параграфе 3.1 функция $\varphi(t)$ предполагается непрерывной функцией; но на самом деле все результаты этого параграфа верны при более слабом ограничении на $\varphi(t)$ - при условии, что $\varphi(t)$ - просто измеримая и почти всюду конечная функция.

Параграф 3.2 посвящен исследованию необходимых условий базисности системы Костюченко

$$\left\{e^{i\alpha nt}\sin nt\right\}_{n\in N},$$

и систем более общего вида

$$\left\{\varphi^{n}(t)\sin nt\right\}_{n\in N},$$

где $\varphi:[a,b]\to C$ - измеримая, почти всюду конечная функция, а $a,\ b$ - некоторые вещественные числа, в пространствах Лебега $L_p = L_p(a,b)$, $1\le p<\infty$.

Одним из результатов этого параграфа является следующая

Теорема 17. *Если система*

$$\left\{\varphi^{n}(t)\sin nt\right\}_{n\in N}$$

является базисом в L_p, *то* $|\varphi(t)| \equiv const$ *почти везде на* $[a,b]$.

Для доказательства этой теоремы используется следующая

Лемма 3. *Пусть* $E\subset[a,b]$ - *измеримое по Лебегу подмножество* $[a,b]$. *Если существует подпоследовательность* $\{n_k\}$ *натуральных чисел и такое число* p $(1\le p<\infty)$, *что*

$$\int_E |\sin n_k t|^p \, dt \to 0 \ \ при \ \ k \to \infty,$$

то $mesE = 0.$

Отметим, что аналогичная лемма верна относительно системы косинусов.

Лемма 4. *Пусть* $E \subset [a,b]$ *- измеримое по Лебегу подмножество* $[a,b]$. *Если существует подпоследовательность* $\{n_k\}$ *натуральных чисел, такая, что*

$$\int_E |\cos n_k t|^p \, dt \to 0 \ \ при \ \ k \to \infty,$$

то $mesE = 0.$

Используя Лемму 4 вместо Леммы 3, легко заметить, что аналогичное утверждение верно и для системы

$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}}.$$

Теорема 18. *Если система*

$$\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}}$$

является базисом в L_p, *то* $|\varphi(t)| \equiv const,$ *почти везде на* $[a,b]$.

Из этих результатов получаем, в частности, следующий результат для систем S_α^+ и

$$C_\alpha^+ = \left\{e^{i\alpha nt}\cos nt\right\}_{n \in N \cup \{0\}},$$

который охватывает случаи всех пространств L_p.

Следствие 3. *Если* $\operatorname{Im}\alpha \neq 0,$ *то системы* S_α^+ *и* C_α^+ *не являются базисами в пространстве* L_p.

Параграф 3.3 посвящен исследованию базисности системы степеней $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах Лебега L_p.

Основное утверждение этого параграфа заключается в следующем.

Теорема 19. *Пусть* $\varphi(t)$ *- любая измеримая почти всюду конечная функция на* $[a,b]$. *Тогда*

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

не является базисом в пространстве L_p.

Следует отметить, что подход, использованный в этом пункте, показывает, что результаты параграфа 3.1 остаются в силе при более общих предположениях. А именно, в параграфе 3.1. функция $\varphi(t)$должна быть непрерывной функцией; но на самом деле все результаты этого параграфа верны при более слабом допущении - при условии, что $\varphi(t)$- просто измеримая и почти всюду конечная функция.

Параграф 3.4 посвящен исследованию базисности Шаудера систем вида $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$.

Точная формулировка основного утверждения выглядит следующим образом:

Теорема 20. *Пусть* $\varphi(t)$ *- любая непрерывная функция на отрезке* $[a,b]$. *Тогда система*

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

не является базисом в пространстве непрерывных функций $C[a,b]$.

Цель параграфа 3.5 - доказать, что в самом общем случае любой непрерывной функции $\varphi(t)$, определенной в сегменте $[a,b]$, система степеней $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$ даже не может быть псевдо-базисом в $C[a,b]$.

Теорема 21. *Пусть* $\varphi(t)$ *- любая (действительная или комплексная) непрерывная функция на* $[a,b]$. *Тогда*

$$\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

не является псевдо-базисом в $C[a,b]$.

Четвертая глава посвящена изучению фреймовых свойств итераций оператора умножения

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t) f(t), \ f \in L_2(a,b).$$

Эта глава состоит из двух параграфов.

Цель параграфа 4.1 - показать, что орбита

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

не может образовывать фрейм для пространства $L_2(a,b)$ для любого измеримого генератора $\varphi(t)$ и любого $f \in L_2(a,b)$.

Следующие предложения играют решающую роль при доказательстве основного результата этого параграфа.

Лемма 5. *Пусть φ и f - любые измеримые функции. Если система*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

является псевдо-базисом в $L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$, то $|\varphi(t)| \equiv const$ почти всюду на $[a,b]$.

Лемма 6. *Пусть φ и f - любые измеримые функции. Если система*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

является фреймом в $L_2(a,b)$, то $|\varphi(t)| \equiv 1$, почти всюду на $[a,b]$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 22. *Пусть $\varphi(t)$ - любая измеримая функция, а f - любая квадратично-суммируемая функция на $[a,b]$. Система*

$$\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$$

не может быть фреймом в $L_2(a,b)$.

Из этой теоремы следует, в частности, что система вида $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=0}^{\infty}$ не может быть фреймом в $L_2(a,b)$. Классическая экспоненциальная система показывает, что ситуация полностью

меняется, если рассматривать системы вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ вместо $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Параграф 4.2 посвящен задаче характеризации фреймов вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Одним из основных результатов параграфа 4.2 является следующая

Теорема 23. *Пусть* $\varphi(t)$ *- измеримая функция на* $[a,b]$. *Если*

$$\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

- фрейм в $L_2(a,b)$, *то* $|\varphi(t)|=1$, *почти всюду на* $[a,b]$, *т.е. функция* $\varphi(t)$ *- экспоненциальная функция вида*

$$\varphi(t)=e^{i\alpha(t)},$$

где $\alpha(t)$ *- вещественная функция.*

Это предложение показывает, что характеризация фреймов вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ в пространстве $L_2(a,b)$ эквивалентна определению класса всех вещественных функций $\alpha(t)$ для которых система $\{e^{in\alpha(t)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ является фреймом в $L_2(a,b)$.

Даем частичный ответ на эту задачу, предоставляя достаточное условие для функции $\alpha(t)$ при которой система $\{e^{in\alpha(t)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ является фреймом в $L_2(a,b)$.

Теорема 24. *Пусть функция* $\alpha(t)$, *определенная на* $[a,b]$, *является обратимой функцией, обратная* $\xi:[p,q]\to[a,b]$ *которой удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\xi(t)$ *абсолютно непрерывная, строго возрастающая функция на* $[p,q]$, $\xi(p)=a$ *и* $\xi(q)=b$;

2) *существуют такие константы* $A, B > 0$, *что* $A \le \xi'(t) \le B$ *п.в. на* $[p,q]$;

3) $|p-q| \le 2\pi$;

Тогда система

$$\left\{e^{in\alpha(t)}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

является фреймом в $L_2(a,b)$.

Пример 1. Пусть $a=0, b=2\pi$ и $\alpha(t)=\sqrt{t+1}$. Тогда можно легко проверить, что все условия, налагаемые на функцию $\alpha(t)$ выполнены. Следовательно, система

$$\left\{e^{in\sqrt{t+1}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

является фреймом в $L_2(0,2\pi)$.

Следующий пример показывает существенность условия 2) в Теореме 24.

Пример 2. Система

$$\left\{e^{in\sqrt{t}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

для которой условие 2) не выполняется, не является фреймом в $L_2(0,2\pi)$.

Следующий пример показывает существенность условия 3) в теореме.

Пример 3. Система экспонент

$$\left\{e^{in(2t+1)}\right\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

для которой условие 3) не выполняется, не является полной и следовательно, не является фреймом в $L_2(0,2\pi)$.

Глава V посвящена исследованию свойств базисности и свойств представления некоторых систем ортонормированного типа и характеризации компактных операторов с помощью ортонормированных последовательностей.

Эта глава состоит из трех параграфов.

Параграф 5.1 посвящен исследованию базисных свойств последовательности элементов в гильбертовом пространстве, для которых углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю.

В этом параграфе предлагаем некоторые уточнения формулировки результата Хмылевой и Бухтиной. Дано более короткое и простое доказательство, позволяющее получить обобщение этого результата.

Сначала сформулируем некоторые факты, которые также представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть* H *– гильбертово пространство,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность элементов пространства* H, *удовлетворяющая условиям:*

a) $\|x_n\| = 1$ *для любого* $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$, $n, m \in N, n \neq m$, *где* a *некоторое число, такое что* $a \neq 1$.

Тогда система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ω *- линейно независима.*

Предложение 3. *Пусть* H *– гильбертово пространство,* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность элементов пространства* H, *удовлетворяющая условиям:*

a) $\|x_n\| = 1$ *для любого* $n \in N$,

b) $(x_n, x_m) = a$ *при* $n, m \in N, n \neq m$.

Тогда число a *неотрицательно.*

Теорема 25. *Пусть* H *- гильбертово пространство, а* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность элементов в* H *со следующими свойствами:*

1) $\|x_n\| = 1$ *для всех* $n \in N$;

2) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N, n \neq m$.

Тогда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не является базисной последовательностью в* H.

Доказательство этой теоремы, приведенное в диссертации, показывает справедливость следующего более общего результата.

Теорема 26. *Пусть* H *- гильбертово пространство, а* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность элементов в* H *со следующими свойствами:*

1) $\|x_n\| = 1$ *для всех* $n \in N$ *;*

2) $(x_n, x_m) = a$, $a \neq 0$, $n, m \in N, n \neq m.$

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не является системой представления в подпространстве* H*, порожденной этими элементами (и, следовательно, также в пространстве* H *).*

Параграф 5.2 посвящен исследованию базисности в гильбертовых пространствах последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих ограниченную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что $\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$ для всех достаточно больших $k, m \in N, k \neq m.$

Основным результатом параграфа 5.2 является следующая

Теорема 27. *Пусть* H *- гильбертово пространство и ограниченная последовательность его элементов* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет*

$$\left|(x_n, x_m)\right| = a > 0$$

для $n, m \in N, n \neq m.$ *Тогда* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не является базисной последовательностью и, следовательно, базисом Шаудера в* H *.*

Доказательство Теоремы 27 показывает, что верен следующий более общий результат.

Теорема 28. *Пусть* H *- гильбертово пространство и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет ограниченную подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *такую, что*

$$\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$$

для всех достаточно больших $k, m \in N, k \neq m$. *Тогда* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не является базисной последовательностью и, следовательно, базисом Шаудера в* H .

Следует отметить, что есть конкретные примеры последовательностей, демонстрирующих, что в отличие от аналогичного результата предыдущего параграфа, последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве, имеющая ограниченную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что $\left|\left(x_{n_k}, x_{n_m}\right)\right| = a > 0$ для всех достаточно больших $k, m \in N, k \neq m,$ может быть системой представления в подпространстве H, порожденное этими элементами (и, следовательно, также в пространстве H).

Параграф 5.3 посвящен характеристике компактных операторов с помощью ортонормированных последовательностей.

Известная характеристика Рингроуза компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, утверждает, что линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, компактен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет $\|Ae_n\| \to 0$ для каждой ортонормированной последовательности $\{e_n\}$ в H.

Отметим, что известные доказательства этой теоремы не позволяют сформулировать аналогичное утверждение для операторов, действующих из гильбертова пространства в некоторое банахово пространство, которое не обязательно является гильбертовым пространством.

В этом параграфе мы продемонстрируем краткое и простое доказательство характеристики Рингроуза компактных операторов. Следует отметить, что приведенное нами доказательство показывает, что утверждение этой теоремы остается в силе и для операторов, действующих из гильбертова пространства в банахово пространство (которое не обязательно является гильбертовым пространством).

Теорема 29. *Линейный (не обязательно ограниченный) оператор, действующий из гильбертова пространства H в банахово пространство B, компактен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет $\|Ae_n\| \to 0$ для каждой ортонормированной последовательности $\{e_n\}$ в H.*

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность своему научному консультанту – чл.-корреспонденту НАН Азербайджана, профессору Б.Т.Билалову за ценные советы, постоянное внимание к работе и оказание всесторонней поддержки при выполнении диссертационной работы.

ВЫВОДЫ

Основной целью диссертационной работы является характеризация весов относительно базисных свойств тригонометрических систем в лебеговых пространствах, получение необходимых условий относительно базисных свойств систем типа системы Костюченко в лебеговых пространствах, получение некоторых свойств последовательностей ортонормированного типа, характеризация компактных операторов на языке ортонормированной системы, исследование фреймовости систем из итераций оператора умножения.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Полностью исследуются полнота и минимальность в пространствах L_p систем вида

$$\left\{ \prod_{j=1}^{r} \left| t - t_j \right|^{\alpha_j} e^{\mathrm{int}} \right\}_{n \in \mathrm{Z}}$$

когда две из степеней α_j не удовлетворяют условию Макенгаупта.

2. Определен класс всех функций $\omega(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ $\left(\omega(t) \in L_p(0, \pi)\right)$ для которых система $\{\omega(t) e^{int}\}_Z$ $\left(\{\omega(t) \cos nt\}_{n=0}^{\infty}\right)$ становится полной и минимальной в пространстве $L_p(-\pi, \pi), 1 < p < \infty,$ когда исключается ровно один из ее членов.

3. Показано, что когда система $\{\varphi_n(t)\}$ является классической системой синусов, при естественном условии $mes\{t : \omega(t) = 0\} = 0,$ из того, что $\omega(t)\varphi_n(t) \in L_p$ для любого n, следует полнота $\{\omega(t)\varphi_n(t)\}$ в пространстве L_p. Кроме того, доказывается, что этот факт, аналоги которого хорошо известны

для классических экспоненциальных и косинусных систем, в общем случае неверен для произвольных полных или полных ортонормированных систем;

4. Приведен пример весовой функции $\omega(\cdot)\in L_p(0,\pi)$, для которой система $\{\omega(t)\cos nt\}_{Z_+}$ является полной в $L_p(0,\pi)$, но ни эта система, ни система, полученная исключением какого-либо конечного числа ее элементов, не является полной и минимальной в $L_p(0,\pi)$.

5. Получено необходимое условие базисности систем типа системы Костюченко $\left\{\varphi^n(t)\sin nt\right\}_{n\in N}$, $\left\{\varphi^n(t)\cos nt\right\}_{n\in N\cup\{0\}}$ в пространствах L_p $(1\le p<+\infty)$. В частности, из этого результата находим необходимое условие базисности системы Костюченко $\{e^{i\alpha nt}\sin nt\}_{n\in\mathrm{N}}$ в L_p $(1\le p<+\infty)$.

6. Показано, что $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ не является базисом в пространстве $L_p[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая измеримая почти всюду конечная функция на $[a,b]$.

7. Показано, что $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ не является базисом в пространстве $C[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая (действительная или комплексная) непрерывная функция на $[a,b]$.

8. Показано, что система вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ не может быть псевдобазисом в $C[a,b]$, где $\varphi(t)$ любая (действительная или комплекснозначная) непрерывная функция на $[a,b]$.

9. Исследуются вопросы фреймовости орбит $\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ оператора умножения $T_\varphi f(t)=\varphi(t)f(t),\ f\in L_2(a,b),$

в пространстве $L_2(a,b)$. Показано, что орбита $\left\{T_\varphi^n f\right\}_{n=0}^{\infty}$ оператора умножения T_φ не может образовывать фрейм для пространства $L_2(a,b)$ для любого измеримого генератора $\varphi(t)$ и любого $f \in L_2(a,b)$. Характеризованы все фреймы вида $\{\varphi^n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ являющихся итерациями оператора умножения T_φ.

10. Исследуется базисность последовательностей элементов в гильбертовом пространстве, для которых углы между любыми двумя элементами одинаковы, но не равны нулю и базисность последовательностей $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих ограниченную подпоследовательность $\left\{e_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что $\left|\left(e_{n_k}, e_{n_m}\right)\right| = \alpha > 0$ для всех достаточно больших $k, m \in N,\ k \neq m.$

11. Дано краткое, более простое и элементарное доказательство одной характеристики компактных операторов с помощью ортонормированных последовательностей; приведенное доказательство показывает, что этот факт справедлив также для операторов, действующих из гильбертова пространства в некоторое банахово (не обязательно гильбертово) пространство.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Shukurov, A.Sh. Necessary condition of basicity of a system of powers in Lebesgue spaces // - Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, - 2009. 29(4), - p.173-178.
2. Shukurov, A. Sh. Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces // - Warsaw: Colloquium Mathematicum, - 2012. 127(1), - p.105-109.
3. Shukurov, A. Sh, Addendum to "Necessary condition for Kostyuchenko type systems to be a basis in Lebesgue spaces" // - Warsaw: Colloquium Mathematicum, - 2014. 137(2), - p.297-298.
4. Shukurov, A. Sh. The power system is never a basis in the space of continuous functions //- Philadelphia: American Mathematical Monthly, - 2015. 122(2), - p.137-137.
5. Shukurov, A.Sh. Simpler proof of the Ringrose's characterization of compact operators // - Bethesda: European Journal of Pure and Applied Mathematics, - 2015. 8(4), - p.499-501.
6. Shukurov, A. Sh. On a paper by Khmyleva and Bukhtina // - Tomsk: Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta- Matematika i Mekhanika, - 2015. 6(38), - p.56–59.
7. Shukurov, A. Sh. About one type of sequences that are not a Schauder basis in Hilbert space // - Izhevsk: Vestnik Udmurtskogo Universiteta - Matematika Mekhanika Kompyuternye Nauki, - 2015. 25(2), - p.244–247.
8. Shukurov, A.Sh. Impossibility of power series expansion for continuous functions // - Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, - 2016. 6(1), - p.122-125.
9. Shukurov, A.Sh. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // -Baku: Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science, 2016, Vol 4, No. 1, p.74-80.
10. Shukurov, A.Sh. A note on the completeness and minimality of weighted trigonometric systems // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, - 2016. 42(2), - p.249-256.

11. Shukurov, A. Sh. Comment on "On the frame properties of degenerate system of sines" // - London: Journal of Function Spaces, - 2017, Art. ID 9257076, 4 pp.
12. Shukurov, A. Sh. On basicity of the degenerate trigonometric system with excess // - Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, - 2017. 21(2), - p.249-257.
13. Shukurov A.Sh., Bilalov B.T. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // The Reports of NAS of Azerbaijan, 2017, Vol. LXXIII, No.1, pp.16-19.
14. Shukurov, A. Sh. On basis properties of weighted exponential systems with excess // - Samara: Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, - 2018. 24(1), - p.14-19.
15. Shukurov, A. Sh., Kasumov, Z.A. On frame properties of iterates of a multiplication operator// -Basel: Results in Mathematics, - 2019. 74(2), - p.74-84.
16. Shukurov, A.Sh. On the uniform minimality of the Kostyuchenko type systems // Proceedings of the International conference "Functions theory and problems of harmonic analysis" devoted to the 100-th annivesary of academician I.I.Ibrahimov, - Baku: - Februrary 28 – March 01, - 2012, - p.269-270.
17. Shukurov, A.Sh., Huseynli, A.A. On the basicity of the weighted trigonometric systems // International workshop on “Non-harmonic analysis and differential operators” –Baku: May 25-27, - 2016, - p.103-104.
18. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z., О некоторых свойствах систем типа системы А.Г.Костюченко // International conference "Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics conference", on the occasion of professor Hamlet Isakhanli’s 70-th birthday, - Baku: - May 21 – 24,- 2018, p..
19. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // International conference dedicated to the 90-th anniversary of academician Azad Mirzajanzade, - Baku: - December 13-14, - 2018.

20. Shukurov, A.Sh., Gadirova, Kh.M. On frames of the form $\left\{\varphi^n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ // International conference dedicated to the 90th anniversary of academician Azad Mirzajanzade, - Baku: -December 13-14, - 2018.
21. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60-th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - October 23-25, - 2019, - p.465-466.
22. Shukurov A.Sh., Jabrailova A.N. On frames that are iterates of a multiplication operator / International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics, - Baku: - October 23-25, - 2019, - p. 285-287.
23. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frame properties of iterates of a multiplication operator // Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference. Khazar University, - Baku: - June 10-14, - 2019, - p.113-115.
24. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z., On frame properties of iterates of a multiplication operator // 2-nd International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2019), - Yildiz Technical University, -İstanbul, Turkey: - May 3-5, - 2019.
25. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z., On frame properties of iterates of a multiplication operator // 3rd İnternational E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2020), Yildiz Technical University, -Turkey: - June 24-27, - 2020.
26. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On the completeness and minimality of the exponential system with degenerate coefficients // 3rd İnternational E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2020), - Istanbul: - June 24-27, - 2020.
27. Shukurov, A.Sh., Garayev, T.Z. On frames of the form $\left\{\varphi^n(t)\right\}$ // 4th International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2021), - Istanbul: - May 26-29, - 2021, - p.53.

Защита диссертации состоится **28 октября 2022** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **23 сентября 2022** года.

Подписано в печать: 15.04.2022
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 78748
Тираж: 70