AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ELLİPTİK TİP OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMA MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru

elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: _____ **Günel Mirbala qızı Qasımova**

Elmi rəhbər: _____ f-r.e.d., professor

Sabir Sultanağa oğlu Mirzəyev

Bakı – 2022

Mündəricat

səh.

Giriş 3

FƏSİL I BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI 23

1.1. Zəruri funksional fəzalar 23

1.2. Birinci sərhəd məsələsinin qoyuluşu 29

1.3. Birinci sərhəd məsələsinin $A_1 = A_2 = 0$ olduqda həll olunması 31

1.4. $W_{2,T}^2(R_+;H)$ fəzasında aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi 38

1.5. $A_j \neq 0,\ j = 1,2,$ olduqda birinci sərhəd məsələsinin həll olunması 45

FƏSİL II BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İKİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI 48

2.1. İkinci sərhəd məsələsinin qoyuluşu 48

2.2. $A_1 = A_2 = 0$ olduqda qoyulan ikinci sərhəd məsələsinin tədqiqi 50

2.3. $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasında aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi 57

2.4. $A_j \neq 0,\ j = 1,2,$ olduqda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunması 62

FƏSİL III BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB BİRCİNS OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN REQULYAR HƏLLƏR FƏZASININ DAXİLİ KOMPAKTLIĞI HAQQINDA 66

3.1. Bircins operator-diferensial tənliyin requlyar həll olunması haqqında 66

3.2. Bircins operator-diferensial tənliyin requlyar həllərinin daxili kompaktlıq xassəsi haqqında 75

Nəticə 84

İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı 85

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Məlumdur ki, operator-diferensial tənliklər üçün müxtəlif məsələlərin öyrənilməsi xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qarışıq məsələlərin, adi diferensial tənliklərin sonsuz sistemlərinin və digər məsələlərin araşdırılması üçün ən effektiv metodlardan biridir. Qeyd edək ki, E.Hille, K.İosida, T.Kato, S.Aqmon, L.Nirinberq və Z.İ.Xəlilovun işlərindən başlayaraq, bir çox riyaziyyatçılar sabit əmsallı xətti operator-diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həll olunma məsələlərini öyrənmişlər. Daha sonra, bu cür tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həll oluna biləcəyini araşdıran işlər ortaya çıxdı. Bu nəticələrin çoxu E.Hille və R.Fillipsin [26], S.G.Kreynin [18], J.-L.Lions və E.Majenesin [19], A.A.Dezinin [15], V.İ.Qorbaçuk və M.L.Qorbaçukun [13], S.Y.Yakubovun [28] və başqalarının kitablarında öz əksini tapmışdır. Qeyd edilməlidir ki, birinci və ikinci tərtib ikihədli operator-diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həll olunma nəzəriyyəsi həm xarici, həm də Azərbaycan riyaziyyatçıları tərəfindən ətraflı tədqiq edilmişdir. Sonralar yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklərlə də bağlı xeyli sayda işlər dərc olunmuşdur. Bu işlər arasına S.Aqmon və L.Nirinberqin [30], M.G.Qasımovun [7], [50], [51], M.G.Qasımov və S.S.Mirzəyevin [52], A.G.Kostyu-cenko və A.A.Şkalikovun [58], M.L.Qorbaçukun [12], A.A.Dezinin [14], [16], S.Y.Yakubovun [71], [72], M.Bayramoğlunun [4], S.S.Mirzəyevin [20], [21], [60], Q.V.Radziyevskinin [68], A.A.Şkalikovun [27], [69], Ə.B.Əliyevin [2], V.V.Vlasovun [5], [6], H.D.Orucovun [67], H.İ.Aslanovun [40] və A.R.Əliyevin [3], [32] məqalələrini aid etmək olar. Qeyd edək ki, həmin məqalələrdə tədqiq olunan tənliklərdə və yaxud tənliklərin baş hissəsində iştirak edən əsas operator əmsal Hilbert fəzasında təsir edən öz-özünə qoşma operatordur. Bir çox praktiki məsələlər isə operator-diferensial tənliklərlə modelləşdiriləndə əsas operator əmsalın daha geniş sinifdən olmasını tələb edir. Digər praktiki məsələlərin operator-diferensial tənliklərin sərhəd məsələləri ilə modelləşdirilməsi zamanı sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorun iştirakı zərurəti meydana gəlir. Başqa praktiki məsələlərdə tənliklər

kəsilən əmsallara malik olur. Bu baxımdan həm əvvəldən, həm də, xüsusən, son zamanlar hər üç səpgidə tədqiqatlar aparılmış və uyğun işlər dərc olunmuşdur. Bunlar arasında L. de Simon və J. Torellinin [43], A.A.Dezinin [44], A.A.Şkalikovun [70], V.V.Kornienkonun [17], S.Y.Yakubov və B.Ə.Əliyevin [29], [73], S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin [22], [34], A.R.Əliyevin [33], [37], S.S.Mirzəyev, A.R.Əliyev və L.Ə.Rüstəmovanın [61], [62], S.S.Mirzəyev və L.Ə.Rüstəmovanın [63], S.S.Mirzəyev və X.V.Yaqubovanın [24], K.Ə.Kərimov və S.S.Mirzəyev [57], Ə.M.Əhmədov və Y.Y.Mustafayevanın [31], B.Ə.Əliyevin [38], B.Ə.Əliyev və Y.Yakubovun [36], B.Ə.Əliyev, V.Z.Kərimov və Y.S.Yakubovun [35], Z.İ.İsmayılovun [55], L.İ.Əmirovanın [39], X.V.Cəfərovanın [56], V.Y.Gülməmmədovun [54], L.Ə.Rüstəmovanın [25] işlərini qeyd etmək olar. Bu işlərin əksəriyyətində tədqiqata təkan verən amil akademik M.G.Qasımovun [7], [50], [51] məqalələrindəki təklif olunan üsul olmuşdur. Gələcəkdə həmin üsul S.S.Mirzəyevin [20], [21] məqalələrində inkişaf etdirilmiş və davamını A.R.Əliyevin kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklərə həsr olunmuş [3], [32] məqalələrində tapmışdır.

Xüsusi qeyd edək ki, həm nəzəri, həm də tətbiq baxımından, sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak edən və baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklərin (yəni hər üç amil eyni zamanda iştirak etdikdə) həll olunması məsələləri böyük elmi maraq doğurur. Təqdim olunan dissertasiya işi də əsasən Hilbert fəzalarında bu cür elliptik tip operator-diferensial tənliklər üçün yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunma məsələlərinə həsr edilmişdir. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, burada biz məsələlərin öyrənilməsində əsasən S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin işlərində işlənib-hazırlanan üsullardan istifadə edirik.

Tədqiqatın obyekti və predmeti.

Dissertasiya işinin tədqiqat obyekti və predmeti sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak etdikdə baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci və ikinci sərhəd məsələləridir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifəsi sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci və ikinci sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtlərini tapmaqdan, aralıq törəmə operatorlarının normalarını müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında qiymətləndirməkdən və onların həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini təyin etməkdən ibarətdir.

Tədqiqat metodları.

Dissertasiya işində funksional analizin, xüsusən, öz-özünə qoşma olan və olmayan operatorların analitik nəzəriyyəsinin, Hilbert fəzasında xətti operatorlar nəzəriyyəsinin, operatorların yarımqruplar nəzəriyyəsinin və ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsinin üsullarından istifadə olunmuşdur. Bundan əlavə işdə abstrakt fəzalarda diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin üsulları da tətbiq olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Müdafiəyə aşağıdakı əsas müddəalar çıxarılır:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin həll olunma şərtlərini tapmaq.

2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunma şərtlərini tapmaq.

3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normalarını qiymətləndirmək və onların tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin həll olunma şərtləri ilə əlaqəsini təyin etmək.

4. Yarımoxda kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin həllərinin xassələrini araşdırmaq.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılıb.

2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılıb.

3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilib.

4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi təyin edilib.

5. Operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunub.

6. Yarımoxda bir sinif kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi araşdırılıb.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.

Dissertasiya işi əsasən nəzəri əhəmiyyət daşıyır. Lakin dissertasiyada alınan nəticələrdən riyazi fizikanın qeyri-bircins mühitdə baxılan bir sıra məsələlərində və mexanikada, məsələn, çoxlaylı cisimlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin məsələlərində istifadə etmək olar.

Aprobasiyası və tətbiqi.

Dissertasiya işinin nəticələri Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. S.S.Mirzəyev), “Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. Ə.M.Əhmədov), “Tətbiqi riyaziyyat” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. H.D.Orucov), “Diferensial və inteqral tənliklər” kafedrasının seminarında (rəhbər prof. N.Ş.İsgəndərov), AMEA–nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun “Funksional analiz” şöbəsinin seminarında (rəhbər prof. H.İ.Aslanov), Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin

“Ümumi və tətbiqi riyaziyyat” kafedrasının seminarlarında (rəhbər prof. A.R. Əliyev) məruzə edilmişdir. Bundan əlavə dissertasiyada alınmış nəticələr aşağıdakı elmi konfranslarda da məruzə edilmişdir: AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akademik A.X.Mirzəcanzadənin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş “Neftqaz sahəsində qeyri-Nyuton sistemlər” Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 21-22 noyabr 2013-cü il), AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunda akademik M.G.Qasımovun 75 illik yubileyinə həsr olunmuş “Diferensial operatorlarının spektral nəzəriyyəsi” Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 8-10 dekabr 2014-cü il), Bakı Dövlət Universitetinin Mexanka-riyaziyyat fakultəsində Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı Respublika elmi konfransında (Bakı, 20-21 May 2015-ci il), Sumqayıt Dövlət Universitetinin yaradılmasının 55 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt, 25-26 may 2017-ci il), Xəzər Universitetində prof. H.A.İsaxanlının 70 illiyinə həsr olunmuş “Operatorlar, funksiyalar və riyazi fizikada sistemlər” adlı Beynəlxalq elmi konfransında (Bakı, 21-24 may 2018-ci il), Başqırd Dövlət Universitetinin Sterlitamak filialında "Proseslərin və sistemlərin riyazi modelləşdirilməsi" adlı IX Beynəlxalq gənclər elmi və praktik konfransında (Sterlitamak, 30 oktyabr - 1 noyabr 2019-cu il).

Müəllifin nəşrləri. Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə (1-i Web of Science Core Collection bazasının SCIE siyahısına, 1-i SCOPUS, 2-si isə Zentralblatt MATH bazalarına daxildir), 1 konfrans materialı və 4 tezis (bütövlükdə 10 iş) nəşr olunmuşdur (bax [1], [8]-[11], [23], [46]-[49]).

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Funksiyalar nəzəriyyəsi və funksional analiz” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 167292 işarədir (titul səhifəsi – 354 işarə, mündəricat – 2264 işarə, giriş – 41212 işarə, birinci

fəsil – 50000 işarə, ikinci fəsil – 36000 işarə, üçüncü fəsil – 36000 işarə, nəticə - 1462). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 73 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

İndi isə dissertasiyanın qısa şərhinə keçək.

Dissertasiya girişdən, üç fəsildən və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Dissertasiyanın girişində mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış və onun işlənmə dərəcəsi göstərilmiş, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri söylənilmiş, elmi yeniliyi verilmiş, nəzəri və praktiki əhəmiyyəti qeyd olunmuş, həmçinin işin aprobasiyası barədə məlumat yer almışdır.

Birinci fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının tədqiqinə həsr olunubdur. Tədqiq olunan operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində müəyyən xassələrə malik olan normal operator, sərhəd şərtində isə məhdud operator iştirak edir. İkitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunur.

Tutaq ki, H separabel Hilbert fəzası, A operatoru $H-$da tərsə malik normal operatordur.

Aydındır ki, $D(A)=D(A^*)$, $A^*A=AA^*$ və A operatorunu $A=UC=CU$ şəklində göstərə bilərik, burada U unitar, C isə $H-$da öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operatordur, belə ki, $D(C)=D(A)$ və

$$\|Ax\|=\|A^*x\|=\|Cx\|, \quad x\in D(A),$$

$$\|A^\gamma x\|=\|C^\gamma x\|, \quad x\in D(A^\gamma)=D(C^\gamma), \gamma\geq 0.$$

Məlumdur ki, C^γ $(\gamma\geq 0)$ operatorunun təyin oblastı skalyar hasilli H Hilbert fəzası olacaq:

$$H_\gamma=D(C^\gamma), (x,y)_\gamma=(C^\gamma x, C^\gamma y), \quad x,y\in H_\gamma.$$

Hesab edirik ki, $\gamma=0$ olduqda $H_0=H$ və

$$(x,y)_0=(x,y),\quad x,y\in H.$$

$L(X,Y)$ ilə X fəzasından Y fəzasına təsir edən xətti məhdud operatorlar fəzasını işarə edək.

Tutaq ki, $-\infty\le a<b<\infty$. $L_2((a,b);H)$ ilə $H-$qiymətli, güclü ölçülən və

$$\int_a^b \|f(t)\|_H^2\,dt<\infty$$

sonlu inteqralına malik olan bütün vektor funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Qeyd edək ki, $L_2((a,b);H)$ çoxluğu

$$(f,g)_{L_2((a,b);H)}=\int_a^b (f(t),g(t))dt$$

skalyar hasilli və norması

$$\|f\|_{L_2((a,b);H)}=\left(\int_a^b \|f(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}$$

olan Hilbert fəzasıdır.

Tutaq ki, $n\ge 1$, $C^n u(t)\in L_2((a,b);H)$ vektor funksiyalar və $u^{(n)}(t)\in L_2((a,b);H)$ onların ümumiləşmiş törəmələridir. Onda aşağıdakı xətti çoxluğu müəyyən etmək olar:

$$W_2^n((a,b);H)=$$
$$=\{u(t):C^n u(t)\in L_2((a,b);H),\ u^{(n)}(t)\in L_2((a,b);H)\}.$$

$W_2^n((a,b);H)$ xətti çoxluğunda skalyar hasili aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(u,\vartheta)_{W_2^n((a,b);H)}=\left(u^{(n)},\vartheta^{(n)}\right)_{L_2((a,b);H)}+\left(C^n u,C^n\vartheta\right)_{L_2((a,b);H)},$$

burada $u,\vartheta\in W_2^n((a,b);H)$. Biz $W_2^n((a,b);H)$ (bax [19]) dolu Hilbert fəzasını alırıq. Aydındır ki,

$$\|u\|_{W_2^n((a,b);H)}=\left(\left\|u^{(n)}\right\|^2_{L_2((a,b);H)}+\left\|C^n u\right\|^2_{L_2((a,b);H)}\right)^{1/2}.$$

Bu normanı aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\|u\|_{W_2^n((a,b);H)} = \left(\left\| u^{(n)} \right\|^2_{L_2((a,b);H)} + \left\| A^n u \right\|^2_{L_2((a,b);H)} \right)^{1/2}.$$

Öncə $R_+ = [0,+\infty)$ müsbət yarımoxda tədqiq olunan kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliyin requlyar həllinin tərifi və bu tənlik üçün öyrənilən birinci sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasının tərifi verilir.

H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t) + A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

$$u(0) = Tu'(0). \tag{2}$$

Burada $f(t), u(t)$ funksiyaları R_+ $-$də təyin olunmuş $H-$qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1) A -nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

2) $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0,1), \\ \beta^2, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$ $\alpha, \beta > 0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha \le \beta$);

3) $T \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$, yəni T operatoru $H_{1/2}$ fəzasından $H_{3/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

4) A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1 = A_1A^{-1}$, $B_2 = A_2A^{-2}$ operatorları $H-$da məhduddurlar.

Tərif 1. $f(t)\in L_2(R_+;H)$ *olduqda* (1) *tənliyini* R_+ *−də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t)\in W_2^2(R_+;H)$ *vektor funksiyası vardırsa, ona* (1) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 2. *İxtiyari* $f(t)\in L_2(R_+;H)$ *üçün* (1) *tənliyinin*

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)-Tu'(t)\|_{3/2}=0$$

mənasında (2) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

$W_2^2(R_+;H)$ fəzasında bir altfəzaya baxaq:

$$W_{2,T}^2(R_+;H)=\{u:u\in W_2^2(R_+;H),\ u(0)=Tu'(0)\}.$$

(1), (2) sərhəd məsələsini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$P_Tu=P_{0,T}u+P_{1,T}u=f, \tag{3}$$

burada $f\in L_2(R_+;H)$, $u\in W_{2,T}^2(R_+;H)$,

$$P_{0,T}u=-\frac{d^2u}{dt^2}+\rho(t)A^2u,\quad u\in W_{2,T}^2(R_+;H),$$

və

$$P_{1,T}u=A_1\frac{du}{dt}+A_2u,\quad u\in W_{2,T}^2(R_+;H).$$

Aşağıdakı hökmlər doğrudur.

Lemma 1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^2(R_+;H)$, *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən məhdud operatordur.*

Teorem 1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və*

$$Q_{\alpha,\beta} = E - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A} + \alpha AT\left(E + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatorunun $H_{1/2}$ *fəzasında məhdud tərsi vardır. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^2(R_+;H)$, *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən izomorfizmdir.*

Bu teoremdən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. $\|u\|_{W_{2,T}^2(R_+;H)}$ *və* $\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}$ *normaları* $W_{2,T}^2(R_+;H)$ *fəzasında ekvivalentdirlər.*

Nəticə 2.

$$N_1(T) = \sup_{0\neq u\in W_{2,T}^2(R_+;H)} \|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}$$

və

$$N_2(T) = \sup_{0\neq u\in W_{2,T}^2(R_+;H)} \|A^2u\|_{L_2(R_+;H)} \|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}$$

normaları sonludur.

Buradan aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi məsələsi meydana gəlir.

Teorem 2. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və* $H_{1/2}-$*də* $\mathrm{Re}UAT \geq 0$ *və* $\mathrm{Re}CT \geq 0$. *Onda ixtiyari* $u(t)\in W_{2,T}^2(R_+;H)$ *üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilir:*

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_1(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)},$$

$$\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_2(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)},$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon)=\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}, & 0\le\varepsilon\le\dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\dfrac{1}{\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\le\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bu teoremlə bağlı iki mühüm qeydi söyləmək olar.

Qeyd 1. *Asanlıqla göstərmək olar ki, $T-$ni müəyyən qayda ilə seçməklə, teorem* 2*-nin şərtindəki hər iki dissipativlik şərtləri ödənilsin.*

Qeyd 2. *Hər iki CT və UAT operatorlarının dissipativlik şərtləri asılı olmayandır.*

Sonda (3) tənliyinin həll olunmasını öyrənirik.

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 2. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir. Onda $P_{0,T}+P_{1,T}$ operatoru $W_{2,T}^2(R_+;H)$ fəzasından $L_2(R_+;H)$ fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

İndi isə yuxarıda alınan nəticələrdən istifadə edərək birinci fəslin əsas teoremini söyləyə bilirik.

Teorem 3. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir, $Q_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{1/2}-$də məhdud tərs operatoru vardır və $H_{1/2}-$də* $\mathrm{Re}UAT\ge 0$ *və* $\mathrm{Re}CT\ge 0$. *Bundan əlavə, B_1 və B_2 operatorları üçün aşağıdakı şərt ödənir:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

burada $c_1(\varepsilon)$ və $c_2(\varepsilon)$ teorem 2*-də təyin olunurlar. Onda* (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Bu teoremdən alınan aşağıdakı iki nəticəni qeyd edək.

Nəticə 3. *Tutaq ki, A öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator, $T=0$ və* 2), 4) *şərtləri yerinə yetirilir. Onda*

$$2^{-1}\alpha^{-1}\|B_1\|+\alpha^{-2}\|B_2\|<1$$

şərti daxilində (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Nəticə 4. *Tutaq ki,* 1), 3), 4) *şərtləri yerinə yetirilir,* $\rho(t)\equiv 1,\ t\in R_+,\ H_{1/2}-$*də* $\mathrm{Re}UAT\geq 0$ *və* $\mathrm{Re}CT\geq 0$*, və bundan əlavə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$\tilde{c}_1(\varepsilon)\|B_1\|+\tilde{c}_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

Burada

$$\tilde{c}_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\cos\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{c}_2(\varepsilon)=\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\leq\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Onda (1), (2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Qeyd edək ki, $\varepsilon=0,\ \rho(t)=1$ və $T=0$ olduqda (1), (2) sərhəd məsələsi M.G.Qasımovun [7], [50] işlərində araşdırılmışdır. Bu işlərdə alınan bəzi nəticələr $T\in L(H_{1/2},H_{3/2})$ şərti daxilində M.G.Qasımov və S.S.Mirzəyevin [52] işində ümumiləşdirilmişdir. $\varepsilon=0,\ T=0$ və $\rho(t)\neq 1$ olduqda 2) şərtini ödəyən (1), (2) məsələsi S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin [22] işində öyrənilmişdir. Yüksək tərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bu halın analoqu [32], [34] işlərində araşdırılmışdır. Daha sonra $\varepsilon=0,\ \rho(t)\neq 1$ və $T\neq 0$ olduqda (1), (2) sərhəd məsələsi [62] işində baxılmışdır. Uyğun məsələlərə $\rho(t)=1$ olduqda [64]-[66] işlərində də rast gəlinir.

Qeyd edək ki, birinci fəsildə $\varepsilon\neq 0, T\neq 0$ və $\rho(t)\neq 1$ və bu məsələ hətta $\rho(t)=1$ olduqda araşdırılmamışdır. Ona görə alınan nəticələr $\rho(t)=1$ halında da yenidir.

İkinci fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının öyrənilməsinə həsr olunubdur. Burada da operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində iştirak edən operator müəyyən xassələrə malik olan normal operatordur, sərhəd şərtində isə qeyri-məhdud

operator iştirak edir. Əsas nəticələr ikitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlərin alınmasından ibarətdir.

Bu fəsildə (1) şəkilli operator-diferensial tənlik aşağıdakı sərhəd şərti ilə öyrənilir:

$$u'(0) = Ku(0). \tag{4}$$

Burada birinci fəsildəki kimi, $f(t)$ və $u(t)$ funksiyaları R_+ –də təyin olunmuş H – qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$1^*)$ A - nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

$2^*)$ $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0,1), \\ \beta^2, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$ $\alpha, \beta > 0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha \le \beta$);

$3^*)$ $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$, yəni K operatoru $H_{3/2}$ fəzasından $H_{1/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

$4^*)$ A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1 = A_1 A^{-1}$ və $B_2 = A_2 A^{-2}$ operatorları $H-$ da məhduddurlar.

Tərif 3. *İxtiyari* $f(t) \in L_2(R_+; H)$ *üçün* (1) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \| u'(t) - Ku(t) \|_{1/2} = 0$$

mənasında (4) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və*

$$\| u \|_{W_2^2(R_+;H)} \le const \| f \|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyəcəyik ki, (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İndi $P_{0,K}$ ilə $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasından $L_2(R_+;H)$ fəzasına aşağıdakı kimi təsir edən operatoru işarə edək:

$$P_{0,K}u(t)=-\frac{d^2u}{dt^2}+\rho(t)A^2u(t),\quad u(t)\in W_{2,K}^2(R_+;H).$$

Qeyd edək ki, burada $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzası $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının altfəzasıdır:

$$W_{2,K}^2(R_+;H)=\{u:u\in W_2^2(R_+;H),u'(0)=Ku(0)\}.$$

Aşağıdakı hökmlər doğrudur.

Lemma 3. 1*)-3*) *şərtləri daxilində* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Teorem 4. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir və*

$$R_{\alpha,\beta}=E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\frac{1}{\alpha}A^{-1}K\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatoru $H_{3/2}$ *fəzasında məhdud tərsə malikdir. Onda* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *və* $L_2(R_+;H)$ *fəzaları arasında izomorfizmdir.*

Birinci fəsildəki nəticə 1 və nəticə 2 kimi teorem 4-dən də uyğun nəticələr alınır. Bu səbəbdən ikinci fəsildə də aşağıdakı kəmiyyətlərin qiymətləndirilməsi ilə məşğul olmaq məsələsi meydana gəlir:

$$N_1(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|Au'\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1},$$

$$N_2(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}.$$

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 5. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir və* $H_{3/2}-$*də* $\operatorname{Re}U^{-1}A^{-1}K \geq 0,\ \ \operatorname{Re}C^{-1}K \geq 0$. *Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:*

$$N_1(K) \leq \frac{2}{2\alpha\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$N_2(K) \leq \frac{1}{\alpha^2}\begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \frac{\pi}{4} \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Nəhayət, (1), (4) sərhəd məsələsinin $A_j \neq 0,\ \ j=1,2,$ olduqda requlyar həll olunması haqqında teoremin alınmasına keçək.

Lemma 4. *Fərz edək ki,* $1^*)-4^*)$ *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,K}+P_{1,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən məhdud operatordur.*

Teorem 6. *Tutaq ki,* $1^*)-4^*)$ *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir,* $H_{3/2}-$*də* $\operatorname{Re}U^{-1}A^{-1}K \geq 0,\ \ \operatorname{Re}C^{-1}K \geq 0$ *və* B_1, B_2 *operatorlarının normaları üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$N_1(K)\|B_1\| + N_2(K)\|B_2\| < 1,$$

burada $N_1(K), N_2(K)-$*lar teorem* 5*-də qiymətləndiriliblər. Onda* (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Tətbiqi məsələlərdə həm birinci fəsildəki hökmlərdə iştirak edən $Q_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{1/2}-$ də məhdud tərs operatora malik olması şərti, həm də ikinci fəsildəki hökmlərdə iştirak edən $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{3/2}-$də məhdud tərs operatora malik olması şərtinin yoxlanılması çətinlik törədir. Qeyd edək ki, məsələn, $\operatorname{Re}A^{-1}K \geq 0$ şərtinin $H_{3/2}-$də ödənilməsi $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{3/2}-$də tərsə malik

olmasını təmin edir. Ona görə də ikinci fəslin hökmlərində $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması əvəzinə $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ şərtinin $H_{3/2}$ −də ödənilməsini tələb etmək olar. Bu şərt öz növbəsində tətbiqi məsələlərdə $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması şərtinə nisbətən daha asan yoxlanılır.

İkinci fəsil ilə bağlı sonda teorem 6-dan alınan aşağıdakı iki nəticəni də qeyd edək.

Nəticə 5. *Tutaq ki,* A *operatoru* H *Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur,* $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$ *və* $H_{3/2}$ *−də* $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$. *Onda*

$$\frac{1}{2\alpha}\|B_1\| + \frac{1}{\alpha^2}\|B_2\| < 1$$

şərti ödənildikdə (1), (4) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Nəticə 6. *Tutaq ki,* A*- nın tərsi* A^{-1} *tamam kəsilməz operator olub, spektri isə* S_ε *bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur, həm də* $H_{3/2}$ *−də* $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$, $\operatorname{Re} C^{-1}K \geq 0$, $\operatorname{Re} U^{-1}A^{-1}K \geq 0$ *və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\| + c_2(\varepsilon)\|B_2\| < 1,$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \frac{\pi}{4} \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Onda (1), (4) *sərhəd məsələsi* $\rho(t) = 1,\ t \in R_+$, *olduqda requlyar həll olunandır.*

Fikrimizcə, birinci fəsildə olduğu kimi, bu fəsildəki sonuncu nəticə də $\rho(t) = 1,\ t \in R_+$, olduqda yenidir.

Qeyd edək ki, [24], [52] işlərində (1), (4) sərhəd məsələsi A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator və $\alpha = \beta = 1$ olduqda tədqiq edilmişdir. Bundan əlavə, $K = 0$ və A normal operator olduqda (1), (4) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması [63] işində baxılmışdır. [61] işində isə A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator və $A_2 = 0$ olan halı araşdırılmışdır.

Üçüncü fəsildə kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins operator-diferensial tənliyin operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində requlyar həll olunması tədqiq olunur. Bundan əlavə, verilmiş tənliyin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi öyrənilir.

Bu fəsildə H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t) + A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = 0, \quad t \in R_+, \tag{5}$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi, \tag{6}$$

burada $u(t)$ funksiyası $R_+ -$də təyin olunmuş $H -$qiymətli vektor funksiya, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə birinci fəsildəki 1)-4) şərtlərini ödəyirlər.

Tərif 4. (5) *tənliyini* $R_+ -$*də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t) \in W_2^2(R_+;H)$ *vektor funksiyasına* (5) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 5. *İxtiyari* $\varphi \in H_{3/2}$ *üçün* (5) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \|u(t) - Tu'(t) - \varphi\|_{3/2} = 0$$

mənasında (6) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|\varphi\|_{3/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (5), (6) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Birinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək, (5), (6) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teoremi isbat olunur.

Teorem 7. *Tutaq ki, teorem* 3*-ün bütün şərtləri ödənilir. Onda* (5), (6) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Analoji olaraq H separabel Hilbert fəzasında əmsalları 1), 2) və 4) şərtlərini ödəyən bircins (5) operator-diferensial tənliyinə qeyri-bircins

$$u'(0) - Ku(0) = \psi \tag{7}$$

sərhəd şərti ilə baxmaq olar. Burada $\psi \in H_{1/2}$, K operatoru isə 3*) şərtini ödəyir.

Tərif 6. *İxtiyari* $\psi \in H_{1/2}$ *üçün* (5) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \left\| u'(t) - Ku(t) - \psi \right\|_{1/2} = 0$$

mənasında (7) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli varsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const \|\psi\|_{1/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (5), (7) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İkinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək (5), (7) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teoremi söyləyə bilərik.

Teorem 8. *Tutaq ki, teorem* 6*-nın bütün şərtləri ödənilir. Onda* (5), (7) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır*.

$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt} \right), R_+ \right)$ ilə (5) tənliyin $W_2^2(R_+;H)$ fəzasından olan həllər çoxluğunu işarə edək:

$$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt} \right), R_+ \right) = \left\{ u(t) : P\left(\frac{d}{dt} \right) u(t) = 0,\ u(t) \in W_2^2(R_+;H) \right\}.$$

Başqa sözlə, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt} \right), R_+ \right)$ (5) tənliyinin requlyar həllər fəzasıdır.

Aydındır ki, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ çoxluğu $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının qapalı altfəzasıdır.

İndi isə $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ ilə $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ fəzasının $W_2^1(R_+;H)$ fəzasının normasına nəzərən qapanmasını işarə edək.

Bu fəslin sonunda $\|u\|_{W_2^1(R_+;H)}$ normasına nəzərən $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi müəyyən olunur.

Tərif 7. *Fərz edək ki,*

$$0 \le a < a' < b' < b < +\infty$$

və $M > 0$ *istənilən ədəddir. Əgər*

$$W_M = \left\{u(t): u(t) \in \mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right), \|u\|_{W_2^1((a,b);H)} \le M\right\}$$

çoxluğu $W_2^1((a',b');H)$ *fəzasının normasına nəzərən kompakt çoxluqdursa, onda deyilir ki,* $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *fəzası* $W_2^1(R_+;H)$ *fəzasının normasına nəzərən daxili kompakt fəzadır.*

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 9. *Tutaq ki,* 1), 2), 4) *şərtləri ödənilir və* $\dot{W}_2^2(R_+;H)$ *fəzasından olan* $u(t)$ *vektor funksiyası üçün*

$$\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)u\right\|_{L_2(R_+;H)} \ge const\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *fəzası daxili kompakt fəzadır və elə* $\chi_0 > 0$ *ədədi var ki, istənilən* $u(t) \in \mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ *üçün*

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\chi_0 t}\left(\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H^2 + \|Cu(t)\|_H^2\right)dt < +\infty$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Burada $\dot{W}_2^2(R_+;H) \subset W_2^2(R_+;H)$ və bu fəza aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\dot{W}_2^2(R_+;H) = \{u(t) : u(t) \in W_2^2(R_+;H),\ u(0) = u'(0) = 0\}.$$

Xatırladaq ki, C isə $H-$da öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur.

Qeyd edək ki, ilk dəfə P.D.Laks sonsuz aralıqda bəzi həllər fəzaları üçün daxili kompaktlığın tərifini vermiş və onun elliptik tənliklərin həlləri üçün Fraqmen-Lindelöf prinsipi ilə sıx əlaqəsini göstərmişdir.

Müəllif müəllimləri, professorlar Sabir Mirzəyevə və Araz Əliyevə məsələlərin qoyuluşuna, alınan nəticələrin müzakirəsinə və işə daimi diqqətlərinə görə dərin hörmətini və səmimi minnətdarlığını bildirir.

FƏSİL I

BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI

Bu fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının tədqiqinə həsr olunubdur. Tədqiq olunan operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində müəyyən xassələrə malik olan normal operator, sərhəd şərtində isə məhdud operator iştirak edir. İkitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunur.

1.1. Zəruri funksional fəzalar

Bu yarımfəsildə gələcəkdə bizə lazım olacaq bəzi funksional fəzalar verilir.

Tutaq ki, H separabel Hilbert fəzası, A operatoru $H-$da tərsi olan normal operatordur.

Aydındır ki, $D(A)=D(A^*)$, $A^*A=AA^*$ və A operatorunu $A=UC=CU$ şəklində göstərə bilərik, burada U unitar, C isə $H-$da öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur, belə ki, $D(C)=D(A)$ və

$$\|Ax\|=\|A^*x\|=\|Cx\|, \quad x\in D(A),$$

$$\|A^\gamma x\|=\|C^\gamma x\|, \quad x\in D(A^\gamma)=D(C^\gamma), \gamma\geq 0.$$

Məlumdur ki, C^γ $(\gamma\geq 0)$ operatorunun təyin oblastı skalyar hasilli H Hilbert fəzası olacaq:

$$H_\gamma = D(C^\gamma), (x,y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y), \quad x,y \in H_\gamma .$$

Biz hesab edirik ki, $\gamma = 0$ olduqda $H_0 = H$ və

$$(x,y)_0 = (x,y), \quad x,y \in H.$$

$L(X,Y)$ ilə X fəzasından Y fəzasına təsir edən xətti məhdud operatorlar fəzasını işarə edək. $X = Y$ olduqda bu fəzanı $L(X)$ ilə işarə edəcəyik.

Əgər B operatoru $H-$ da xətti operatordursa, onda onun spektr çoxluğunu $\sigma(B)$ ilə işarə edəcəyik. Gələcəkdə $R = (-\infty, +\infty)$, $R_+ = [0, +\infty)$ işarələmələrindən istifadə edəcəyik.

Tutaq ki, $-\infty \le a < b < \infty$. $L_2((a,b);H)$ ilə $H-$qiymətli, güclü ölçülən və

$$\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt < \infty$$

sonlu inteqralına malik olan bütün vektor funksiyalar çoxluğunu işarə edək. Qeyd edək ki, $L_2((a,b);H)$ çoxluğu

$$(f,g)_{L_2((a,b);H)} = \int_a^b (f(t), g(t)) dt$$

skalyar hasilli və norması

$$\| f \|_{L_2((a,b);H)} = \left(\int_a^b \| f(t) \|_H^2 \, dt \right)^{1/2}$$

olan Hilbert fəzasıdır.

$a = 0, b = +\infty$ olduqda biz $L_2((0,+\infty);H)$ fəzasını alırıq, hansı ki, $L_2(R_+;H)$ ilə işarə edəcəyik, belə ki,

$$(f,g)_{L_2(R_+;H)} = \int_0^{+\infty} (f(t), g(t)) dt$$

və

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|f(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Tutaq ki, $n\geq 1$, $C^n u(t)\in L_2((a,b);H)$ vektor funksiyalar və $u^{(n)}(t)\in L_2((a,b);H)$ onların ümumiləşmiş törəmələridir. Onda aşağıdakı xətti çoxluğu müəyyən etmək olar:

$$W_2^n((a,b);H)=$$
$$=\{u(t):C^n u(t)\in L_2((a,b);H),\ u^{(n)}(t)\in L_2((a,b);H)\}.$$

$W_2^n((a,b);H)$ xətti çoxluğunda skalyar hasili aşağıdakı kimi təyin edək:

$$(u,\vartheta)_{W_2^n((a,b);H)}=\left(u^{(n)},\vartheta^{(n)}\right)_{L_2((a,b);H)}+\left(C^n u,C^n\vartheta\right)_{L_2((a,b);H)},$$

burada $u,\vartheta\in W_2^n((a,b);H)$. Biz $W_2^n((a,b);H)$ (bax [19]) dolu Hilbert fəzasını alırıq. Aydındır ki,

$$\|u\|_{W_2^n((a,b);H)}=\left(\left\|u^{(n)}\right\|^2_{L_2((a,b);H)}+\left\|C^n u\right\|^2_{L_2((a,b);H)}\right)^{1/2}.$$

Bu normanı aşağıdakı şəkildə də yazmaq olar:

$$\|u\|_{W_2^n((a,b);H)}=\left(\left\|u^{(n)}\right\|^2_{L_2((a,b);H)}+\left\|A^n u\right\|^2_{L_2((a,b);H)}\right)^{1/2}.$$

Xüsusi halda, $(a,b)=(-\infty,+\infty)$ alırıq ki,

$$W_2^n(R;H)=\{u(t):C^n u(t)\in L_2(R;H),\ u^{(n)}(t)\in L_2(R;H)\},$$
$$(u,\vartheta)_{W_2^n(R;H)}=\left(u^{(n)},\vartheta^{(n)}\right)_{L_2(R;H)}+\left(C^n u,C^n\vartheta\right)_{L_2(R;H)},$$

və

$$\|u\|_{W_2^n(R;H)} = \left(\left\| u^{(n)} \right\|^2_{L_2(R;H)} + \left\| C^n u \right\|^2_{L_2(R;H)} \right)^{1/2}.$$

$(a,b) = (0,+\infty) = R_+$ olduqda isə alırıq ki,

$$W_2^n(R_+;H) = \left\{ u(t) : C^n u(t) \in L_2(R_+;H), u^{(n)}(t) \in L_2(R_+;H) \right\},$$

$$(u,\vartheta)_{W_2^n(R_+;H)} = \left(u^{(n)}, \vartheta^{(n)} \right)_{L_2(R_+;H)} + \left(C^n u, C^n \vartheta \right)_{L_2(R_+;H)},$$

$$\|u\|_{W_2^n(R_+;H)} = \left(\left\| u^{(n)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| C^n u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

Qeyd edək ki, kompakt daşıyıcılı sonsuz diferensiallanan funksiyalar sinifi $W_2^n((a,b);H)$ fəzasında sıxdı.

Analoji olaraq,

$$W_2^n((0,1);H), \quad W_2^n((1,\infty);H)$$

fəzalarını təyin edirik.

Dissertasiya boyu biz əsasən $n=2$ halına baxırıq, yəni bizə $W_2^2((a,b);H)$ fəzası $a=0,\ b=+\infty;\ a=0,\ b=1;\ a=1,\ b=+\infty$ olduqda lazım olacaq.

Daha sonra

$$\overset{0}{W}{}_2^2(R_+;H;0) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^2(R_+;H), u(0) = 0 \right\},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(R_+;H;1) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^2(R_+;H), u'(0) = 0 \right\}.$$

Bu fəzaların hər biri $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının Hilbert altfəzaları sayılır.

Aydındır ki, əgər $u(t) \in W_2^n((a,b);H)$ olarsa, onda aralıq törəmələr haqqında teorem (bax [19, səh. 29]) doğrudur, yəni bütün

$$C^{n-j}u^{(j)} \in L_2(R_+;H), \quad j=1,2,\ldots,n-1,$$

və Kolmoqorov tipli bərabərsizliklər

$$\left\|C^{n-j}u^{(j)}\right\|_{L_2((a,b);H)} \le c_j \|u\|_{W_2^n((a,b);H)}, \quad j=1,\ldots,n-1,$$

doğrudur.

$u(t) \in W_2^n((a,b);H)$ vektor funksiyası üçün izlər haqqında teorem doğrudur, yəni əgər $0<a<b<+\infty$ olarsa, onda $u^{(j)}(a)$ və $u^{(j)}(b)$ $(j=0,\ldots,n-1)$ mövcuddur, $u^{(j)}(a),\ u^{(j)}(b) \in H_{n-j-1/2}$ və aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\left\|u^{(j)}(a)\right\|_{H_{n-j-1/2}} \le c_j \|u\|_{W_2^n((a,b);H)}, \quad j=\overline{0,n-1},$$

$$\left\|u^{(j)}(b)\right\|_{H_{n-j-1/2}} \le \tilde{c}_j \|u\|_{W_2^n((a,b);H)}, \quad j=\overline{0,n-1},$$

xüsusilə, $R_+=(0,+\infty)$ olduqda

$$\left\|u^{(j)}(0)\right\|_{H_{n-j-1/2}} \le c_j \|u\|_{W_2^n(R_+;H)}, \quad j=\overline{0,n-1}.$$

Qeyd edək ki, bərabərsizliklərdə iştirak edən c_j əmsalları müxtəlifdirlər. Biz yazıları mürəkkəbləşdirməmək üçün eyni hərfdən istifadə edirik.

Əgər A tərsə malik normal operatordursa və onun spektri

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right\}$$

bucaq sektorunda yerləşirsə, onda A operatoru $H-$da məhdud operatorların $e^{-tA}, t \geq 0$ güclü kəsilməz yarımqrupunu doğurur. Bu yarımqrupun spektral ayrılışı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$e^{-tA} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (\cdot, e_n) e_n.$$

Burada e_n elementleri A operatorunun məxsusi elementlərinin ortonormallaşmış sistemidir, yəni

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \ (e_n, e_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Lemma 1.1.1. *Tutaq ki,* $0 \leq a < b \leq +\infty$. *Onda ixtiyari* $x \in H_{3/2}$ *olduqda*

$$e^{-tA} \in W_2^2((a,b); H).$$

İsbatı. Tutaq ki, $x \in H_{3/2}$. Onda elə $y \in H$ vektoru mövcuddur ki,

$$C^{-3/2} y = x.$$

Buradan alırıq ki,

$$\left\| e^{-tA} x \right\|^2_{W_2^2((a,b);H)} = \left\| A^2 e^{-tA} x \right\|^2_{L_2((a,b);H)} + \left\| C^2 e^{-tA} x \right\|^2_{L_2((a,b);H)} =$$

$$= 2 \left\| C^2 e^{-tA} x \right\|^2_{L_2((a,b);H)} = 2 \left\| C^{1/2} e^{-tA} y \right\|^2_{L_2((a,b);H)} =$$

$$= 2 \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left| (y, e_n) \right|^2 e^{-2\mu_n \cos\varphi_n t} dt =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left| (y, e_n) \right|^2 \int_a^b e^{-2\mu_n \cos\varphi_n t} dt \leq$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left| (y, e_n) \right|^2 \int_a^b e^{-2\mu_n \cos\varepsilon t} dt =$$

$$= \frac{1}{\cos\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left| (y, e_n) \right|^2 \left(e^{-2\mu_n \cos\varepsilon a} - e^{-2\mu_n \cos\varepsilon b} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cos\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left|(y,e_n)\right|^2\left(e^{-2\mu_1\cos\varepsilon a}+e^{-2\mu_1\cos\varepsilon b}\right)=$$

$$=const\|y\|^2=const\|x\|_{3/2}^2$$

(burada $\mu_n=|\lambda_n|$). Lemma isbat olundu.

Lemma 1.1.1-in isbatından xüsusi halda $x\in H_{3/2}$ olduqda aşağıdakı bərabərsizlik alınır:

$$\left\|e^{-tA}x\right\|_{W_2^2(R_+;H)}\leq\frac{1}{\cos\varepsilon}\|x\|_{3/2}^2,\quad 0\leq\varepsilon<\pi/2.$$

1.2. Birinci sərhəd məsələsinin qoyuluşu

Bu yarımfəsildə birinci sərhəd məsələsinin requlyar həlli və requlyar həll olunması tərifləri verilir.

H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\rho(t)A^2u(t)+A_1\frac{du(t)}{dt}+A_2u(t)=f(t),\quad t\in R_+,\tag{1.2.1}$$

$$u(0)=Tu'(0).\tag{1.2.2}$$

Burada $f(t),u(t)$ funksiyaları R_+ – də təyin olunmuş H – qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

2) A- nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon=\left\{\lambda:|\arg\lambda|\leq\varepsilon,\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2}\right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

2) $\rho(t)=\begin{cases}\alpha^2, & t\in(0,1),\\ \beta^2, & t\in(1,+\infty),\end{cases}$ $\alpha,\beta>0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha\le\beta$);

3) $T\in L(H_{1/2},H_{3/2})$, yəni T operatoru $H_{1/2}$ fəzasından $H_{3/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

4) A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1=A_1A^{-1}$, $B_2=A_2A^{-2}$ operatorları $H-$da məhduddurlar.

Tərif 1.2.1. $f(t)\in L_2(R_+;H)$ *olduqda* (1.2.1) *tənliyini* R_+-*də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t)\in W_2^2(R_+;H)$ *vektor funksiyası vardırsa, ona* (1.2.1) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 1.2.2. *İxtiyari* $f(t)\in L_2(R_+;H)$ *üçün* (1.2.1) *tənliyinin*

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)-Tu'(t)\|_{3/2}=0$$

mənasında (1.2.2) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli vardırsa və*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (1.2.1), (1.2.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Qeyd edək ki, $\varepsilon=0$, $\rho(t)=1$ və $T=0$ olduqda (1.2.1), (1.2.2) sərhəd məsələsi M.G.Qasımovun [7], [50] işlərində araşdırılmışdır. Bu işlərdə alınan bəzi nəticələr $T\in L(H_{1/2},H_{3/2})$ şərti daxilində M.G.Qasımov və S.S.Mirzəyevin [52] işində ümumiləşdirilmişdir. $\varepsilon=0$, $T=0$ və $\rho(t)\ne1$ olduqda 2) şərtini ödəyən (1.2.1), (1.2.2) məsələsi S.S.Mirzəyev və A.R.Əliyevin [22] işində öyrənilmişdir. Yüksək tərtibli tənliklər üçün bu halın analoqu [32], [34] işlərində araşdırılmışdır. Daha sonra $\varepsilon=0$, $\rho(t)\ne1$ və $T\ne0$ olduqda (1.2.1), (1.2.2) sərhəd məsələsi [62] işində baxılmışdır. Uyğun məsələlərə $\rho(t)=1$ olduqda [64]-[66] işlərində də rast gəlinir.

Qeyd edək ki, bu fəsildə $\varepsilon \neq 0, T \neq 0$ və $\rho(t) \neq 1$ və bu məsələ hətta $\rho(t) = 1$ olduqda araşdırılmamışdır. Ona görə alınan nəticələr $\rho(t) = 1$ halında da yenidir. Qeyd edək ki, analoji olaraq $0 < \beta \leq \alpha < \infty$ halında da baxmaq olar.

1.3. Birinci sərhəd məsələsinin $A_1 = A_2 = 0$ olduqda həll olunması

Əvvəlcə $W_2^2(R_+; H)$ fəzasında bir altfəzaya baxaq:

$$W_{2,T}^2(R_+; H) = \{u : u \in W_2^2(R_+; H),\ u(0) = Tu'(0)\}.$$

Qeyd edək ki, bu altfəza dolu fəzadır. Bu altfəzanın belə olması aralıq törəmə operatorları və izlər haqqında teoremlərdən çıxır (bax [19]).

(1.2.1), (1.2.2) sərhəd məsələsini aşağıdakı şəkildə yazaq

$$P_T u = P_{0,T} u + P_{1,T} u = f, \tag{1.3.1}$$

burada $f \in L_2(R_+; H)$, $u \in W_{2,T}^2(R_+; H)$,

$$P_{0,T} u = -\frac{d^2 u}{dt^2} + \rho(t) A^2 u, \quad u \in W_{2,T}^2(R_+; H),$$

və

$$P_{1,T} u = A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u, \quad u \in W_{2,T}^2(R_+; H).$$

Əvvəl

$$P_{0,T} u = f \tag{1.3.2}$$

tənliyinin həll olunmasını öyrənirik.

Aşağıdakı lemma doğrudur.

Lemma 1.3.1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^{2}(R_{+};H)$ *fəzasından* $L_2(R_{+};H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Lemmanın **isbatı** $\rho(t)$ funksiyasının məhdudluğundan və aralıq törəmələr haqqında teoremə [19] əsasən alınır.

İndi (1.3.2) tənliyinin həll olunması ilə məşğul olaq.

Aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1.3.1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və*

$$Q_{\alpha,\beta}=E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\alpha AT\left(E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatorunun $H_{1/2}$ *fəzasında məhdud tərsi vardır. Onda* $P_{0,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^{2}(R_{+};H)$ *fəzasından* $L_2(R_{+};H)$ *fəzasına təsir edən izomorfizmdir.*

İsbatı. Göstərək ki, $P_{0,T}$ operatorunun nüvəsi yalnız sıfır elementindən ibarətdir və $P_{0,T}$ operatorunun obrazı $L_2(R_{+};H)$ fəzası ilə üst-üstə düşür. Teoremin hökmü lemma 1.3.1-dən və tərs operator haqqında Banax teoremindən alınır. Aydındır ki, $P_{0,T}u(t)=0$ tənliyinin $W_2^2(R_{+};H)$ fəzasından olan ümumi həlli aşağıdakı şəkildədir:

$$u_0(t)=\begin{cases}\xi_1(t)=e^{-\alpha tA}\varphi_1+e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2, & 0<t<1,\\ \xi_2(t)=e^{-\beta(t-1)A}\varphi_3, & t>1,\ \varphi_j\in H_{3/2},\ j=\overline{1,3}.\end{cases}$$

Daha sonra $u\in W_{2,T}^{2}(R_{+};H)$ şərtindən alınır ki,

$$\xi_1(0)=T\xi_1'(0),$$
$$\xi_1^{(j)}(1-0)=\xi_2^{(j)}(1+0),\ \ j=0,1.$$

Nəticədə biz, φ_1,φ_2 və φ_3-ə nəzərən aşağıdakı tənlikləri alırıq:

$$\varphi_1 + e^{-\alpha A}\varphi_2 = T\left(-\alpha A\varphi_1 + \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_2\right),$$

$$\varphi_3 = e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\beta\varphi_3 = \alpha e^{-\alpha A}\varphi_1 - \alpha\varphi_2.$$

Sonra $\varphi_2 = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}e^{-\alpha A}\varphi_1$ və birinci tənlikdən yaza bilərik, ki

$$\left(E - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A} + \alpha TA\left(E + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)\right)\varphi_1 = 0.$$

Fərz edək ki, $A\varphi_1 = y_1 \in H_{1/2}$, onda aşağıdakı alınır:

$$\left(E - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A} + \alpha AT\left(E + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)\right)y_1 = 0,$$

yəni $Q_{\alpha,\beta}y_1 = 0$. Teoremin şərtinə görə $Q_{\alpha,\beta}$ −nın $H_{1/2}$ −də məhdud tərsi var. Onda $y_1 = 0$. Beləliklə, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,$ yəni $u_0(t) = 0$.

İndi göstərək ki, $P_{0,T}u = f$ tənliyinin ixtiyari $f \in L_2(R_+;H)$ üçün həlli var. Fərz edək ki,

$$u_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\xi^2 E + \alpha^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-is\xi}ds\right)e^{i\xi t}d\xi,\ t \in (0,1),$$

$$u_\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\xi^2 E + \beta^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-is\xi}ds\right)e^{i\xi t}d\xi,\ t \in (1,\infty).$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$u_\alpha(t) \in W_2^2((0,1);H),\quad u_\beta(t) \in W_2^2((1,\infty);H)$$

və $P_{0,T}u(t)=f(t)$ tənliyini (0,1) və $(1,\infty)-$da uyğun olaraq, demək olar ki, hər yerdə ödəyirlər. Sonra biz $P_{0,T}u=f$ tənliyinin həllini aşağıdakı kimi axtaracayıq:

$$u(t)=u_{\alpha}(t)+e^{-\alpha tA}\varphi_1+e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2,\quad t\in(0,1),$$
$$u(t)=u_{\beta}(t)+e^{-\beta(t-1)A}\varphi_3,\quad t\in(1,\infty),$$

Burada φ_1,φ_2 və $\varphi_3\in H_{3/2}$ məlum olmayan vektorlardır. $Q_{\alpha,\beta}-$nın $H_{1/2}-$də tərsinin olmasından və $u(t)\in W_{2,T}^2(R_+;H)$ şərtindən $\varphi_i,\ i=1,2,3$ vektorları birqiymətli təyin olunur. Beləliklə,

$$u_1(t)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha|t-s|A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha tA}\varphi_1+e^{-\alpha(t-s)A}\varphi_2,\quad t\in(0,1),$$
$$u_2(t)=\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta|t-s|A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\beta(t-1)A}\varphi_3,\quad t\in(1,+\infty),$$
$$\begin{cases}u_1(0)=Tu_1'(0),\\ u_1(1)=u_2(1),\\ u_1'(1)=u_2'(1).\end{cases}\tag{1.3.3}$$

Yuxarıdakıları nəzərə alsaq görərik ki,

$$u_1(t)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^t e^{-\alpha|t-s|A}A^{-1}f(s)ds+\frac{1}{2\alpha}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}A^{-1}f(s)ds+$$
$$+e^{-\alpha tA}\varphi_1+e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2,$$
$$u_2(t)=\frac{1}{2\beta}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}A^{-1}f(s)ds+\frac{1}{2\beta}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}A^{-1}f(s)ds+$$
$$+e^{-\beta(t-1)A}\varphi_3,$$
$$u_1'(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)A}f(s)ds+\frac{1}{2\alpha}A^{-1}f(t)+\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}f(s)ds-$$

$$-\frac{1}{2\alpha}A^{-1}f(t)-\alpha Ae^{-\alpha tA}\varphi_1+\alpha Ae^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2,$$

$$u_1'(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)A}f(s)ds+\frac{1}{2}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}f(s)ds-$$

$$-\alpha Ae^{-\alpha tA}\varphi_1+\alpha Ae^{-\alpha(1-t)A}\varphi_2,$$

$$u_2'(t)=-\frac{1}{2}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}f(s)ds+\frac{1}{2\beta}A^{-1}f(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}f(s)ds-\frac{1}{2\beta}A^{-1}f(t)+(-\beta A)e^{-\beta(t-1)A}\varphi_3,$$

$$u_2'(t)=-\frac{1}{2}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}f(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}f(s)ds-\beta Ae^{-\beta(t-1)A}\varphi_3.$$

İndi şərtləri yoxlayaq.

$u_1(0)=Tu_1'(0)$ şərtini nəzərə alaraq $u_1(0)$ və $u_1'(0)-$ı heasablayaq:

$$u_1(0)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds+\varphi_1+e^{-\alpha A}\varphi_2,$$

$$u_1'(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds-\alpha A\varphi_1+\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_2,$$

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds+\varphi_1+e^{-\alpha A}\varphi_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha sA}Tf(s)ds-\alpha AT\varphi_1+\alpha ATe^{-\alpha A}\varphi_2.$$

$u_1(1)=u_2(1)$ şərtini isə nəzərə alaraq aşağıdakıları yaza bilərik:

$$u_1(1)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha A}\varphi_1+\varphi_2,$$

$$u_2(1)=\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\varphi_3,$$

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha A}\varphi_1+\varphi_2=$$

$$=\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\varphi_3.$$

$u_1'(1)=u_2'(1)$ şərtini də nəzərə alaraq $u_1'(1)$ və $u_2'(1)-$i də heasablayaq:

$$u_1'(1)=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds-\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_1+\alpha A\varphi_2,$$

$$u_2'(1)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds-\beta A\varphi_3,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds-\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_1+\alpha A\varphi_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds-\beta A\varphi_3.$$

Beləliklə, (1.3.3)-dəki şərtlərdən aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\begin{cases}\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds+\varphi_1+e^{-\alpha A}\varphi_2=\\ =T\left(\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha sA}f(s)ds-\alpha A\varphi_1+\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_2\right),\\ \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha A}\varphi_1+\varphi_2=\\ =\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\varphi_3,\\ -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds-\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_1+\alpha A\varphi_2=\\ =\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds-\beta A\varphi_3.\end{cases}$$

Bu sistemi aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$\begin{cases} \varphi_1 + e^{-\alpha A}\varphi_2 + \alpha TA\varphi_1 - \alpha TAe^{-\alpha A}\varphi_2 = - \\ -\dfrac{1}{2\alpha}\int\limits_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds + \dfrac{T}{2}\int\limits_0^1 e^{-\alpha sA}f(s)ds, \\ e^{-\alpha A}\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\dfrac{1}{2\alpha}\int\limits_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds + \\ +\dfrac{1}{2\beta}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds, \\ -\alpha Ae^{-\alpha A}\varphi_1 + \alpha A\varphi_2 + \beta A\varphi_3 = \\ = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds. \end{cases}$$

Bu sistemdən uyğun olaraq φ_1, φ_2 və φ_3 taparaq, sonra $u_1(t)$ və $u_2(t)-$nin ifadələrində yerinə qoyub aşağıdakını alırıq:

$$u_1(t) = \frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^1 e^{-\alpha|t-s|A}A^{-1}f(s)ds + Q_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha TA - E)e^{-\alpha(t+1)A} \times$$

$$\times\left[\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int\limits_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds + \frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^1 e^{-\alpha(s-1)A}A^{-1}f(s)ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha+\beta}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds\right] + Q_{\alpha,\beta}^{-1}(E + \alpha TA)e^{-\alpha(1-t)A} \times$$

$$\times\left[\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int\limits_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds + \frac{1}{\alpha+\beta}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds\right] +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha TA - E)e^{-\alpha(2-t)A}\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int\limits_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}f(s)ds,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\beta}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta|t-s|A}A^{-1}f(s)ds + Q_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha TA + E)\frac{e^{-\beta(t-1)A}}{\alpha+\beta} \times$$

$$\times\left[\int\limits_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds + \frac{\beta-\alpha}{2\beta}\int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds\right] +$$

$$+ Q_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha TA - E)e^{-\beta(t-1)A}e^{-2\alpha A} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^1 e^{-\alpha(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty}e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds\right],$$

$$u(t)=\begin{cases}u_1(t), & t\in(0,1),\\ u_2(t), & t\in(1,+\infty).\end{cases}$$

Nəticədə, $u(t)\in W_{2,T}^2(R_+;H)$ və $P_{0,T}u=f$.

Lemma 1.3.1-i də nəzərə alsaq teorem isbat olunur.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 1.3.1. $\|u\|_{W_{2,T}^2(R_+;H)}$ *və* $\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}$ *normaları* $W_{2,T}^2(R_+;H)$ *fəzasında ekvivalentdirlər.*

1.4. $W_{2,T}^2(R_+;H)$ fəzasında aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi

Bu yarımfəsildə biz $W_{2,T}^2(R_+;H)$ fəzasında aralıq törəmələrin operatorların normalarının qiymətləndirilməsini alırıq.

Teorem 1.3.1-dən aşağıdakı nəticə də çıxır.

Nəticə 1.4.1.

$$N_1(T)=\sup_{0\neq u\in W_{2,T}^2(R_+;H)}\|Au'\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1},$$

və

$$N_2(T)=\sup_{0\neq u\in W_{2,T}^2(R_+;H)}\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}$$

normaları sonludur.

İsbatı. Nəticənin isbatı aralıq törəmələr haqqında teoremdən [19] və teorem 1.3.1-dən alınır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1.4.1. *Tutaq ki,* 1)-3) *şərtləri ödənilir və* $H_{1/2}-$ *də* $\operatorname{Re}UAT \geq 0$ *və* $\operatorname{Re}CT \geq 0$. *Onda ixtiyari* $u(t) \in W_{2,T}^{2}(R_{+};H)$ *üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilir:*

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_1(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{1.4.1}$$

$$\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)} \leq c_2(\varepsilon)\|P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{1.4.2}$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}, & 0 \leq \varepsilon \leq \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\dfrac{1}{\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4} \leq \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

İsbatı. Tutaq ki, $u(t) \in W_{2,T}^{2}(R_{+};H)$. Onda

$$P_{0,T}u \equiv -u'' + \rho(t)A^2u$$

ifadəsindən aşağıdakını alırıq:

$$\|\rho^{-1/2}(t)P_{0,T}u\|_{L_2(R_+;H)}^2 = \|-\rho^{-1/2}(t)u'' + \rho^{1/2}(t)A^2u\|_{L_2(R_+;H)}^2 =$$

$$= \|\rho^{-1/2}(t)u''\|_{L_2(R_+;H)}^2 + \|\rho^{1/2}(t)A^2u\|_{L_2(R_+;H)}^2 - 2\operatorname{Re}(u'', A^2u)_{L_2(R_+;H)}. \tag{1.4.3}$$

Digər tərəfdən, hissə-hissə inteqrallasaq və A operatorunun spektral ayrılışını nəzərə alsaq, onda alırıq:

$$-\operatorname{Re}(u'', A^2u)_{L_2(R_+;H)} = -\operatorname{Re}\int_0^\infty (u'', A^2u)dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left(C^{1/2}u'(0), C^{3/2}U^2u(0)\right) + \operatorname{Re}\int_0^\infty \left(A^*u', Au'\right)dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left(u'(0), UATu'(0)\right)_{1/2} + \cos 2\varepsilon\left(Au', Au'\right)_{L_2(R_+;H)} \geq$$

$$\geq \cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (1.4.4)$$

(1.4.4) bərabərsizliyini (1.4.3)-də nəzərə alsaq aşağıdakını əldə edirik:

$$\left\|\rho^{-1/2}(t)P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \left\|\rho^{-1/2}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+\left\|\rho^{1/2}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (1.4.5)$$

Beləliklə, biz alırıq:

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|Cu'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \left(Cu', Cu'\right)_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(Cu', Cu'\right)dt =$$

$$= -\left(C^{1/2}u'(0), C^{3/2}u(0)\right) - \int_0^\infty \left(u'', C^2u\right)dt =$$

$$= -\left(C^{1/2}u'(0), C^{1/2}CTu'(0)\right) - \left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= -\left(u'(0), CTu'(0)\right)_{\frac{1}{2}} - \left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)}. \qquad (1.4.6)$$

Onda (1.4.6) bərabərliyini istifadə edərək alarıq ki,

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|Cu'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = -\operatorname{Re}\left(u'(0), CTu'(0)\right)_{1/2} -$$

$$-\operatorname{Re}\left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)} \leq$$

$$\leq \left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{L_2(R_+;H)} \left\|\rho^{1/2}C^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2}C^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Sonra (1.4.5) bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\cos 2\varepsilon \|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Beləliklə, biz alırıq

$$(1+\cos 2\varepsilon)\|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

yaxud

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\max_t \rho^{-1/2}\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\varepsilon}\frac{1}{\alpha}\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} = c_1(\varepsilon)\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)},$$

burada

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon}, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Nəticədə, (1.4.1) bərabərsizliyi isbat olundu.

(1.4.2) bərabərsizliyinin isbatına keçək. Tutaq ki, $0 \le \varepsilon \le \frac{\pi}{4}$. Onda $\cos 2\varepsilon \ge 0$ və (1.4.5)-dən alınır ki,

$$\left\|\rho^{-1/2}A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Beləliklə, biz alırıq ki,

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le\max_t\rho^{-1/2}(t)\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\frac{1}{\alpha^2}\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Tutaq ki, $\frac{\pi}{4}\le\varepsilon<\frac{\pi}{2}$. Onda $\cos 2\varepsilon\le 0$. Bu halda (1.4.5) bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\ge$$

$$\ge\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+2\cos 2\varepsilon\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\ge\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+2\cos 2\varepsilon\frac{1}{4\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Beləliklə,

$$\left(1-\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\right)\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\ge$$

$$\ge\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Nəticədə,

$$\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\ge\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Beləliklə, biz aşağıdakını alırıq:

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{\alpha}\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\frac{1}{\alpha}\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\frac{1}{\alpha^2}\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd 1.4.1. *Asanlıqla göstərmək olar ki,* $T-$*ni elə qayda ilə seçmək olar ki, teorem* 1.4.1-*in şərtindəki hər iki dissipativlik şərtləri ödənilsin.*

Doğurdan da, tutaq ki, $T = A^{-1}$. Onda

$$C = U^{-1}A,\ CT = U^{-1}AA^{-1} = U^{-1},\ \operatorname{Re}U^{-1} \ge \cos\varepsilon E.$$

Aydındır ki,

$$UAT = UAA^{-1} = U, \quad \operatorname{Re}U > 0.$$

Qeyd 1.4.2. *Hər iki* CT *və* UAT *operatorlarının dissipativlik şərtləri asılı olmayandır.*

Misal 1.4.1. Tutaq ki, $T = A^{-1}U$, onda

$$CT = U^{-1}AA^{-1}U = E > 0$$

və

$$UAT = UAA^{-1}U = U^2$$

$$U^2 y = \sum_{k=1}^{\infty} e^{2i\varphi k}(y, e_k)e_k$$

olduğundan

$$\mathrm{Re}UAT = \mathrm{Re}U^2 y = \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\varphi_k (y, e_k)e_k,$$

$$|\varphi_k| \le \varepsilon < \pi / 2.$$

Buradan alınır ki, $\mathrm{Re}UAT \ne 0$. Əgər $y = e_k$ olarsa, onda $\varphi_k \in \left(\pi/4, \pi/2\right)$ olduqda $\mathrm{Re}UAT = \cos 2\varphi_k < 0$.

Misal 1.4.2. Tutaq ki, $T = A^{-1}U^{-1}$, onda

$$UAT = UAA^{-1}U^{-1} = E$$

və

$$CT = CA^{-1}U^{-1} = U^{-1}AA^{-1}U^{-1} = U^{-2} = \left(U^*\right)^2.$$

Belə ki,

$$\left(U^*\right)^2 y = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2i\varphi}(y, e_k)e_k,$$

onda

$$\mathrm{Re}\left(U^*\right)^2 y = \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\varphi_k (y, e_k)e_k.$$

Beləliklə, $\varphi_k \le \varepsilon < \pi / 2$, onda $\cos 2\varphi_k < 0$ ola bilər. Əgər elə φ_{k_0} var ki, $\cos 2\varphi_{k_0} < 0$, onda

$$\mathrm{Re}\left(\left(U^*\right)^2 e_{k_0}, e_{k_0}\right) = \cos 2\varphi_{k_0} < 0.$$

1.5. $A_j \neq 0,\ j=1,2,$ olduqda birinci sərhəd məsələsinin həll olunması

Aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 1.5.1. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,T}+P_{1,T}$ *operatoru* $W_{2,T}^{2}(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına məhdud təsir edən operatordur.*

Lemma 1.5.1-in isbatı lemma 1.3.1-ə və aralıq törəmələr haqqında teoremə [19] əsaslanır.

İndi isə yuxarıdakı yarımfəsillərdə alınan nəticələrdən istifadə edərək aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1.5.1. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir,* $Q_{\alpha,\beta}$ *operatorunun* $H_{1/2}-$*də məhdud tərs operatoru vardır və* $H_{1/2}-$*də* $\operatorname{Re}UAT\geq 0$ *və* $\operatorname{Re}CT\geq 0$. *Bundan əlavə,* B_1 *və* B_2 *operatorları üçün aşağıdakı şərt ödənir:*

$$q(\varepsilon)=c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

burada $c_1(\varepsilon)$ *və* $c_2(\varepsilon)$ *teorem* 1.4.1-*də təyin olunurlar. Onda* (1.2.1), (1.2.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İsbatı. Fəslin əvvəllərində qeyd etdiyimiz kimi, (1.2.1), (1.2.2) sərhəd məsələsini

$$P_{0,T}u+P_{1,T}u=f$$

operator tənlik şəklində yaza bilərik. Belə ki, $P_{0,T}^{-1}$ izomorfizmdir, $P_{0,T}u=v$ əvəzləməsindən sonra biz

$$v+P_{1,T}P_{0,T}^{-1}v=f$$

tənliyini əldə edirik. Digər tərəfdən, ixtiyari $v\in L_2(R_+;H)$ üçün

$$\left\|P_{1,T}P_{0,T}^{-1}v\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left\|P_{1,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \|B_1\|\left\|Au'\right\|_{L_2(R_+;H)} + \|B_2\|\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \|B_1\|\cdot c_1(\varepsilon)\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} + \|B_2\|\cdot c_2(\varepsilon)\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= q(\varepsilon)\left\|P_{0,T}u\right\|_{L_2(R_+;H)} = q(\varepsilon)\|v\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Burada biz teorem 1.4.1-dəki bərabərsizliklərdən istifadə etdik.

Beləliklə, $q(\varepsilon)<1$. Onda

$$v = \left(E + P_{1,T}P_{0,T}^{-1}\right)^{-1} f$$

və

$$u = P_{0,T}^{-1}\left(E + P_{1,T}P_{0,T}^{-1}\right)^{-1} f,$$

belə ki,

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən alınan aşağıdakı iki nəticəni qeyd edək.

Nəticə 1.5.1. *Tutaq ki, A öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator, $T=0$ və* 2), 4) *şərtləri yerinə yetirilir. Onda*

$$2^{-1}\alpha^{-1}\|B_1\| + \alpha^{-2}\|B_2\| < 1$$

şərti daxilində (1.2.1), (1.2.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Bu nəticə [22], [32], [34] məqalələrində əldə edilmişdir. $\rho(t)\equiv 1$ halında biz M.G.Qasımovun [7] məqaləsindəki nəticəni alırıq.

Nəticə 1.5.2. *Tutaq ki,* 1), 3), 4) *şərtləri yerinə yetirilir,* $\rho(t)\equiv 1,\ t\in R_+,\ H_{1/2}-$*də* $\mathrm{Re}UAT\ge 0$ *və* $\mathrm{Re}CT\ge 0$ *və bundan əlavə aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$\tilde{c}_1(\varepsilon)\|B_1\| + \tilde{c}_2(\varepsilon)\|B_2\| < 1,$$

burada

$$\tilde{c}_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\cos\varepsilon}, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{c}_2(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4} \le \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Onda (1.2.1), (1.2.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Qeyd edək ki, bu son nəticə müstəqildir və demək olar ki, yenidir.

FƏSİL II

BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İKİNCİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI

Bu fəsil kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunmasının öyrənilməsinə həsr olunubdur. Burada da operator-diferensial tənliklərin baş hissəsində iştirak edən operator müəyyən xassələrə malik olan normal operatordur, sərhəd şərtində isə qeyri-məhdud operator iştirak edir. Əsas nəticələr ikitərtibli Sobolev fəzasının müəyyən altfəzasında bu tənliklərin korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlərin alınmasından ibarətdir.

2.1. İkinci sərhəd məsələsinin qoyuluşu

Bu yarımfəsildə ikinci sərhəd məsələsinin requlyar həlli və requlyar həll olunması ilə bağlı tərifləri verilir.

Bu fəsildə aşağıdakı sərhəd məsələsinin həll olunması araşdırılır:

$$-\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\rho(t)A^2u(t)+A_1\frac{du(t)}{dt}+A_2u(t)=f(t),\quad t\in R_+, \tag{2.1.1}$$

$$u'(0)=Ku(0). \tag{2.1.2}$$

Burada $f(t)$ və $u(t)$ funksiyaları R_+-də təyin olunmuş $H-$qiymətli vektor funksiyalar, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$1^*)$ A- nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{ \lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2} \right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

$2^*)$ $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2, & t \in (0,1), \\ \beta^2, & t \in (1,+\infty), \end{cases}$ $\alpha, \beta > 0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha \le \beta$);

$3^*)$ $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$, yəni K operatoru $H_{3/2}$ fəzasından $H_{1/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

$4^*)$ A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1 = A_1 A^{-1}$ və $B_2 = A_2 A^{-2}$ operatorları $H-$ da məhduddurlar.

Tərif 2.1.1. $f(t) \in L_2(R_+; H)$ *olduqda* (2.1.1) *tənliyini* R_+*-də sanki hər yerdə ödəyən* $u(t) \in W_2^2(R_+; H)$ *vektor funksiyası vardırsa, ona* (2.1.1) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 2.1.2. *İxtiyari* $f(t) \in L_2(R_+; H)$ *üçün* (2.1.1) *tənliyinin*

$$\lim_{t \to +0} \| u'(t) - Ku(t) \|_{1/2} = 0$$

mənasında (2.1.2) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli vardırsa və*

$$\| u \|_{W_2^2(R_+;H)} \le const \| f \|_{L_2(R_+;H)}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (2.1.1), (2.1.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Qeyd edək ki, [24], [52] işlərində (2.1.1), (2.1.2) sərhəd məsələsi A operatoru öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operator olduqda və $\alpha = \beta = 1$ tədqiq edilmişdir. Bundan əlavə, $K = 0$ və A normal operator olduqda (2.1.1), (2.1.2) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması [63] işində baxılmışdır. [61] işində isə A operatoru öz-özünə qoşma müsbət-müəyyən operator və $A_2 = 0$ olan halı araşdırılmışdır.

2.2. $A_1 = A_2 = 0$ olduqda qoyulan ikinci sərhəd məsələsinin tədqiqi

$P_{0,K}$ ilə $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasından $L_2(R_+;H)$ fəzasına aşağıdakı kimi təsir edən operatoru işarə edək:

$$P_{0,K}u(t) = -\frac{d^2u}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t), \quad u(t) \in W_{2,K}^2(R_+;H).$$

Qeyd edək ki, burada $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzası $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının altfəzasıdır:

$$W_{2,K}^2(R_+;H) = \{u : u \in W_2^2(R_+;H), u'(0) = Ku(0)\}.$$

$W_{2,K}^2(R_+;H)$ alt fəzası dolu fəzadır. Bunun belə olması aralıq törəmələr və izlər haqqında teoremlərdən çıxır (bax [19]).

Aşağıdakı lemma doğrudur.

Lemma 2.2.1. *$\varphi \in H_{3/2}$ olduqda $A^2e^{-tA}\varphi \in L_2(R_+;H)$, belə ki,*

$$\left\|A^2e^{-tA}\varphi\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{2}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\|\varphi\|_{3/2}, \tag{2.2.1}$$

$$\left\|A^2e^{-tA}\varphi\right\|_{W_2^2(R_+;H)} \le \frac{1}{\cos\varepsilon}\|\varphi\|_{3/2}, \ 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}. \tag{2.2.2}$$

İsbatı. Tutaq ki, $\varphi \in H_{3/2}$. Onda elə $y \in H$ vektoru mövcuddur ki, $C^{3/2}y = \varphi$. Buradan alırıq ki,

$$\left\|A^2e^{-tA}\varphi\right\|^2_{W_2^2(R_+;H)} = \left\|A^4e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|A^2C^2e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\left\|C^4e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = 2\left\|C^{5/2}e^{-tA}y\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^5\left|(y,e_n)\right|^2 e^{-2\mu_n\cos\varphi_n t}dt =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left|(y,e_n)\right|^2\int_0^{+\infty}e^{-2\mu_n\cos\varphi_n t}dt \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left|(y,e_n)\right|^2\int_0^{+\infty}e^{-2\mu_n\cos\varepsilon t}dt =$$

$$= \frac{1}{\cos\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\left|(y,e_n)\right|^2\left(e^{-2\mu_n\cos\varepsilon a} - e^{-2\mu_n\cos\varepsilon b}\right)\le$$

$$\le \frac{1}{\cos\varepsilon}\|y\|^2 = \frac{1}{\cos\varepsilon}\|\varphi\|_{3/2}^2.$$

Analoji şəkildə (2.2.1) bərabərsizliyi isbat olunur. Lemma isbat olundu.

Burada $e^{-tA}(t\ge 0)$ A operatorunun əmələ gətirdiyi xətti məhdud operatorların yarımqrupudur.

Lemma 2.2.2. 1*)-3*) *şərtləri daxilində* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən məhdud operatordur.*

Lemma 1.3.1-in isbatının barəsində söylənilən fikri lemma 2.2.2-yə də aid etmək olar.

Teorem 2.2.1. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir və*

$$R_{\alpha,\beta} = E + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A} + \frac{1}{\alpha}A^{-1}K\left(E - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

operatoru $H_{3/2}$ *fəzasında məhdud tərsə malikdir. Onda* $P_{0,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *və* $L_2(R_+;H)$ *fəzaları arasında izomorfizmdir.*

İsbatı. Əvvəlcə göstərək ki, $P_{0,K}$ operatorunun nüvəsi yalnız sıfır elementindən ibarətdir və $P_{0,K}$ operatorunun obrazı $L_2(R_+;H)$ fəzası ilə üst-üstə düşür. Teoremin hökmü lemma 2.2.2-dən və tərs operator haqqında Banax teoremindən alınır. Aydındır ki, $P_{0,K}u(t)=0$ tənliyinin $W_2^2(R_+;H)$ fəzasından olan ümumi həlli aşağıdakı şəkildədir:

$$u_0(t)=\begin{cases} \eta_1(t)=e^{-\alpha tA}\psi_1+e^{-\alpha(1-t)A}\psi_2, & 0<t<1, \\ \eta_2(t)=e^{-\beta(t-1)A}\psi_3, & t>1,\ \psi_j\in H_{3/2},\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

Daha sonra $u\in W_{2,K}^2(R_+;H)$ şərtindən alınır ki,

$$\eta_1'(0)=K\eta_1(0),$$
$$\eta_1(1-0)=\eta_2(1+0),$$
$$\eta_1'(1-0)=\eta_2'(1+0).$$

Beləliklə, biz ψ_1,ψ_2 və ψ_3 −ə nəzərən aşağıdakı tənlikləri əldə edirik:

$$K\left(\psi_1+e^{-\alpha A}\psi_2\right)=-\alpha A\psi_1+\alpha Ae^{-\alpha A}\psi_2,$$
$$\psi_3=e^{-\alpha A}\psi_1+\psi_2,$$
$$\beta\psi_3=\alpha e^{-\alpha A}\psi_1-\alpha\psi_2.$$

Yuxarıdakı ikinci və üçüncü tənliklərdən $\psi_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}e^{-\alpha A}\psi_1$ ifadəsini taparaq, birinci tənlikdə nəzərə alsaq aşağıdakını yaza bilərik:

$$\left(E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\frac{1}{\alpha}KA^{-1}\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)\right)\psi_1=0.$$

Fərz edək ki, $A\psi_1=y_1\in H_{3/2}$, onda aşağıdakı alınır:

$$\left(E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\frac{1}{\alpha}A^{-1}K\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)\right)y_1=0,$$

yəni $R_{\alpha,\beta}y_1 = 0$. Teoremin şərtindən alınır ki, $R_{\alpha,\beta}$ –nın $H_{3/2}$-də məhdud tərsi var. Onda $y_1 = 0$. Beləliklə, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$, yəni $u_0(t) = 0$.

İndi göstərək ki, $P_{0,K}u = f$ tənliyinin ixtiyari $f \in L_2(R_+; H)$ üçün həlli var. Fərz edək ki,

$$u_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\eta^2 E + \alpha^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-is\eta}ds\right)e^{is\eta}d\eta,\ t \in (0,1),$$

$$u_\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\eta^2 E + \beta^2 A^2\right)^{-1}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-is\eta}ds\right)e^{is\eta}d\eta,\ t \in (1,\infty).,$$

Asanlıqla görmək olar ki,

$$u_\alpha(t) \in W_2^2((0,1); H),\ u_\beta(t) \in W_2^2((1,\infty); H),$$

və $P_{0,K}u(t) = f(t)$ tənliyini (0,1) və $(1,\infty)$-da uyğun olaraq, demək olar ki, hər yerdə ödəyirlər. Sonra biz $P_{0,K}u = f$ tənliyinin həllini aşağıdakı kimi axtaracayıq:

$$u(t) = u_\alpha(t) + e^{-\alpha tA}\psi_1 + e^{-\alpha(1-t)A}\psi_2,\quad t \in (0,1),$$

$$u(t) = u_\beta(t) + e^{-\beta(t-1)A}\psi_3,\quad t \in (1,\infty),$$

burada ψ_1, ψ_2 və $\psi_3 \in H_{3/2}$ məlum olmayan vektorlardır. $R_{\alpha,\beta}$ –nın $H_{3/2}$ –də tərsinin olmasından və $u(t) \in W_{2,K}^2(R_+; H)$ şərtindən ψ_i, $i = 1,2,3$ vektorları birqiymətli təyin olunur. Beləliklə,

$$u_1(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha|t-s|A}A^{-1}f(s)ds + e^{-\alpha tA}\psi_1 + e^{-\alpha(t-s)A}\psi_2,\ t \in (0,1),$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta|t-s|A}A^{-1}f(s)ds + e^{-\beta(t-1)A}\psi_3,\ t \in (1,+\infty),$$

$$\begin{cases} u_1'(0) = Ku_1(0), \\ u_1(1) = u_2(1), \\ u_1'(1) = u_2'(1). \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Yuxarıdakıları nəzərə alsaq görərik ki,

$$u_1(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)A}A^{-1}f(s)ds + \frac{1}{2\alpha}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}A^{-1}f(s)ds +$$

$$+ e^{-\alpha tA}\psi_1 + e^{-\alpha(1-t)A}\psi_2,$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2\beta}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}A^{-1}f(s)ds + \frac{1}{2\beta}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}A^{-1}f(s)ds +$$

$$+ e^{-\beta(t-1)A}\psi_3,$$

$$u_1'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)A}f(s)ds + \frac{1}{2\alpha}A^{-1}f(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}f(s)ds - \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(t-t)A}A^{-1}f(t) -$$

$$- \alpha Ae^{-\alpha tA}\psi_1 + \alpha Ae^{-\alpha(1-t)A}\psi_2,$$

$$u_1'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)A}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^1 e^{-\alpha(s-t)A}f(s)ds -$$

$$- \alpha Ae^{-\alpha tA}\psi_1 + \alpha Ae^{-\alpha(1-t)A}\psi_2,$$

$$u_2'(t) = -\frac{1}{2}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}f(s)ds + \frac{1}{2\beta}A^{-1}f(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}f(s)ds - \frac{1}{2\beta}A^{-1}f(t) + (-\beta A)e^{-\beta(t-1)A}\psi_3,$$

$$u_2'(t) = -\frac{1}{2}\int_1^t e^{-\beta(t-s)A}f(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)A}f(s)ds - \beta Ae^{-\beta(t-1)A}\psi_3.$$

İndi şərtləri yoxlayaq.

$u_1'(0) = Ku_1(0)$ şərtini nəzərə alaraq $u_1(0)$ və $u_1'(0)-$ı hesablayaq:

$$u_1(0)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha s A}A^{-1}f(s)ds+\psi_1+e^{-\alpha A}\psi_2,$$

$$u_1'(0)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha s A}f(s)ds-\alpha A\psi_1+\alpha A e^{-\alpha A}\psi_2,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha s A}f(s)ds-\alpha A\psi_1+\alpha A e^{-\alpha A}\psi_2=$$

$$=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha s A}A^{-1}Kf(s)ds+K\psi_1+e^{-\alpha A}K\psi_2.$$

$u_1(1)=u_2(1)$ şərtini isə nəzərə alaraq aşağıdakıları yaza bilərik:

$$u_1(1)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha A}\psi_1+\psi_2,$$

$$u_2(1)=\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\psi_3,,$$

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds+e^{-\alpha A}\psi_1+\psi_2=$$

$$=\frac{1}{2\beta}\int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+\psi_3.$$

$u_1'(1)=u_2'(1)$ şərtini də nəzərə alaraq $u_1'(1)$ və $u_2'(1)-$ i də hesablayaq:

$$u_1'(1)=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds-\alpha A e^{-\alpha A}\psi_1+\alpha A\psi_2,$$

$$u_2'(1)=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds-\beta A\psi_3,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds-\alpha A e^{-\alpha A}\psi_1+\alpha A\psi_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds-\beta A\psi_3.$$

Beləliklə, (2.2.3)-dəki şərtlərdən aşağıdakı sistemi alırıq:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha s A}A^{-1}Kf(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha s A}f(s)ds+ \\ +(K+\alpha A)\psi_1+(K-\alpha A)e^{-\alpha A}\psi_2=0, \\ \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}f(s)ds-\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}f(s)ds+ \\ +e^{-\alpha A}\psi_1+\psi_2-\psi_3=0, \\ \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}f(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}f(s)ds+ \\ +\alpha A e^{-\alpha A}\psi_1-\alpha A\psi_2-\beta A\psi_3=0. \end{cases}$$

Bu sistemdən uyğun olaraq ψ_1,ψ_2 və ψ_3 taparaq, sonra $u_1(t)$ və $u_2(t)$-nin ifadələrində yerinə qoyub aşağıdakını alırıq:

$$u_1(t)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha|t-s|A}A^{-1}Kf(s)ds+R_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha A-K)e^{-\alpha(t+1)A}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}Kf(s)ds+\frac{1}{2\alpha}\int_0^1 e^{-\alpha(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha+\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds\right]+R_{\alpha,\beta}^{-1}(K+\alpha A)e^{-\alpha(1-t)A}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}Kf(s)ds+\frac{1}{\alpha+\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds\right]+$$

$$+R_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha A-K)e^{-\alpha(2-t)A}\frac{\alpha-\beta}{2\alpha(\alpha+\beta)}\int_0^1 e^{-\alpha sA}A^{-1}Kf(s)ds,$$

$$u_2(t)=\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta|t-s|A}A^{-1}Kf(s)ds+R_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha A+K)\frac{e^{-\beta(t-1)A}}{\alpha+\beta}\times$$

$$\times\left[\int_0^1 e^{-\alpha(1-s)A}A^{-1}Kf(s)ds+\frac{\beta-\alpha}{2\beta}\int_1^{+\infty} e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds\right]+$$

$$+R_{\alpha,\beta}^{-1}(\alpha A-K)e^{-\beta(1-t)A}e^{-2\alpha A}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^1 e^{-\alpha(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds+\frac{1}{2\beta}\int_1^{+\infty}e^{-\beta(s-1)A}A^{-1}Kf(s)ds\right].$$

Nəticədə, $u(t)\in W_{2,T}^2(R_+;H)$ və $P_{0,K}u=f$. Sonra isə lemma 2.2.2-ni nəzərə alaraq və tərs operator haqqında Banax teoremini tətbiq edərək teorem isbat olunur.

Aşağıdakı göstərişdən

$$R_{\alpha,\beta}=\left[\left(E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)\times\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)^{-1}+\frac{1}{\alpha}A^{-1}K\right]\times\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right)$$

və

$$E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}$$

operatorunun $H_{3/2}$ fəzasında tərs operatorunun olmasından istifadə edərək teorem 2.2.1-dən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 2.2.1. *Tutaq ki,* $H_{3/2}$ *fəzasında* $\operatorname{Re}A^{-1}K\geq 0$. *Onda* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}$ *fəzasında tərsə malikdir, yəni teorem* 2.2.1-*in hökmü öz gücündə qalır*.

2.3. $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasında aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi

Teorem 2.2.1-dən alınır ki, əgər $R_{\alpha,\beta}$ operatoru $H_{3/2}-$də tərsə malikdirsə, onda $\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}$ və $\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}$ normaları $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasında ekvivalentdirlər. Onda aralıq törəmələr haqqında teoremə [19] əsasən

$$N_1(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|Au'\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1},$$

$$N_2(K)=\sup_{0\neq u\in W_{2,K}^2(R_+;H)}\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1}.$$

normaları sonludur.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.3.1. *Tutaq ki,* 1*)-3*) *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir və* $H_{3/2}-$*də* $\operatorname{Re}U^{-1}A^{-1}K\geq 0, \operatorname{Re}C^{-1}K\geq 0$. *Onda aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:*

$$N_1(K)\leq\frac{1}{2\alpha\cos\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$N_2(K)\leq\frac{1}{\alpha^2}\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\leq\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

İsbatı. Fərz edək ki, $u(t)\in W_{2,K}^2(R_+;H)$. Onda

$$P_{0,K}u\equiv -u''+\rho(t)A^2u$$

ifadəsindən aşağıdakını yaza bilərik:

$$\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}^2=\left\|-\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''+\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}^2=$$

$$=\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|_{L_2(R_+;H)}^2+\left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}^2-2\operatorname{Re}\left(u'',A^2u\right)_{L_2(R_+;H)}. \qquad (2.3.1)$$

Əgər hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək və A operatorunun spektral ayrılışını nəzərə alsaq, aşağıdakını alarıq:

$$-\operatorname{Re}\left(u'', A^2u\right)_{L_2(R_+;H)} = -\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\left(u'', A^2u\right)dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left(C^{1/2}u'(0), C^{3/2}U^2u(0)\right) + \operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\left(A^*u', Au'\right)dt =$$

$$= \operatorname{Re}\left(U^{-1}A^{-1}Ku(0), u(0)\right)_{3/2} + \cos 2\varepsilon\left(Au', Au'\right)_{L_2(R_+;H)} \geq$$

$$\geq \cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (2.3.2)$$

(2.3.2) bərabərsizliyini (2.3.1)-də nəzərə alsaq, aşağıdakını əldə edirik:

$$\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+ 2\cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \qquad (2.3.3)$$

Onda alırıq ki,

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|Cu'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left(Cu', Cu'\right)_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(Cu', Cu'\right)dt = -\left(C^{1/2}u'(0), C^{3/2}u(0)\right) - \int_0^{+\infty}\left(u'', C^2u\right)dt =$$

$$= -\left(C^{3/2}C^{-1}Ku(0), C^{3/2}u(0)\right) - \left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= -\left(C^{-1}Ku(0), u(0)\right)_{3/2} - \left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)}.$$

Deməli, (2.3.3) bərabərsizliyindən istifadə etsək, aşağıdakını alarıq:

$$\|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)} = \|Cu'\|^2_{L_2(R_+;H)} = -\mathrm{Re}\left(C^{-1}Ku(0), u(0)\right)_{3/2} -$$

$$-\mathrm{Re}\left(\rho^{-1/2}u'', \rho^{1/2}C^2u\right)_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|_{L_2(R_+;H)} \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)C^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{\frac{1}{2}}C^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Daha sonra (2.3.3) bərabərsizliyindən alınır ki,

$$\|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\cos 2\varepsilon \|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Beləliklə, yaza bilirik ki,

$$(1+\cos 2\varepsilon)\|Au'\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

və ya

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\max_t \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\varepsilon}\frac{1}{\alpha}\|P_{0,K}u\|_{L_2(R_+;H)}, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Əgər $0 \le \varepsilon \le \frac{\pi}{4}$, onda $\cos \ge 0$. Bu zaman (2.3.3) bərabərsizliyinə əsasən alınır ki,

$$\left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Onda

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \max_t \rho^{-\frac{1}{2}}(t)\left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{\alpha}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{\alpha^2}\left\|P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Digər tərəfdən $\frac{\pi}{4} \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ olduqda $\cos\varepsilon \le 0$ olur. Onda biz (2.3.3) bərabərsizliyinə əsasən aşağıdakını yaza bilərik:

$$\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+2\cos 2\varepsilon\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+2\cos 2\varepsilon\frac{1}{4\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+\left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Buradan isə alınır ki,

$$\left(1-\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\right)\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge$$

$$\ge \left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Beləliklə,

$$\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Nəticədə,

$$\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{\alpha}\left\|\rho^{\frac{1}{2}}(t)A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|\rho^{-\frac{1}{2}}(t)P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ şərtinin $H_{3/2}-$də ödənilməsi $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{3/2}-$də tərsə malik olmasını təmin edir. Ona görə də teorem 2.3.1-də $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması əvəzinə $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ şərtinin $H_{3/2}-$də ödənilməsini tələb etmək olar. Bu şərt öz növbəsində tətbiqi məsələlərdə $R_{\alpha,\beta}$ operatorunun tərsə malik olması şərtinə nisbətən daha asan yoxlanılır.

2.4. $A_j \neq 0,\ j=1,2,$ olduqda ikinci sərhəd məsələsinin həll olunması

$P_{1,K}$ ilə $W^2_{2,K}(R_+;H)$ fəzasından $L_2(R_+;H)$ fəzasına aşağıdakı kimi təsir edən operatoru işarə edək:

$$P_{1,K}u(t) = A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t),\ u(t)\in W^2_{2,K}(R_+;H).$$

Onda aşağıdakı hökm doğrudur.

Lemma 2.4.1. *Fərz edək ki,* $1^*)-4^*)$ *şərtləri ödənilir. Onda* $P_{0,K}+P_{1,K}$ *operatoru* $W_{2,K}^2(R_+;H)$ *fəzasından* $L_2(R_+;H)$ *fəzasına təsir edən məhdud operatordur.*

Lemmanın isbatı lemma 2.2.2-yə və aralıq törəmələr haqqında teoreminə [19] əsaslanaraq aparılır.

Teorem 2.4.1. *Tutaq ki,* $1^*)-4^*)$ *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatoru* $H_{3/2}-$*də məhdud tərsə malikdir və* $H_{3/2}-$*də* $\operatorname{Re}U^{-1}A^{-1}K\geq 0$, $\operatorname{Re}C^{-1}K\geq 0$ *və* B_1,B_2 *operatorlarının normaları üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir:*

$$N_1(K)\|B_1\|+N_2(K)\|B_2\|<1.$$

Burada $N_1(K)$, $N_2(K)-$*lar teorem* 2.3.1-*də qiymətləndiriliblər. Onda* (2.1.1), (2.1.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İsbatı.

$$\tau(\varepsilon)=N_1(K)\|B_1\|+N_2(K)\|B_2\|$$

əvəzləməsi aparaq. Qeyd edək ki, $P_{0,K}$ operatoru $W_{2,K}^2(R_+;H)$ fəzasını $L_2(R_+;H)$ fəzasına izomorf inikas etdirir. Buna görə, (2.1.1), (2.1.2) məsələsini

$$P_{0,K}u+P_{1,k}u=f$$

operator şəklində yazaq, burada $u\in W_{2,K}^2(R_+;H)$, $f\in L_2(R_+;H)$.

$P_{0,K}u=\omega$ əvəzləməsindən sonra $L_2(R_+;H)$ fəzasında

$$\left(E+P_{1,K}P_{0,K}^{-1}\right)\omega=f$$

tənliyini alırıq. Onda aralıq törəmələr haqqında teoremə əsasən operatorların normalarının qiymətləndirilməsindən alırıq ki,

$$\left\|P_{1,K}P_{0,K}^{-1}\omega\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|P_{1,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\|B_1\|\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\|B_2\|\left\|A^2u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le N_1(K)\|B_1\|\left\|P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+N_2(K)\|B_2\|\left\|P_{0,K}u\right\|_{L_2(R_+;H)}=\tau(\varepsilon)\|\omega\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Belə ki, $\tau(\varepsilon)<1$, onda $E+P_{1,K}P_{0,K}^{-1}$ operatoru $L_2(R_+;H)$ fəzasında tərsə malikdir və

$$u=P_{0,K}^{-1}\left(E+P_{1,K}P_{0,K}^{-1}\right)^{-1}f.$$

Onda

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le$$

$$\le\left\|P_{0,K}^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to W_2^2(R_+;H)}=\left\|\left(E+P_{1,K}P_{0,K}^{-1}\right)^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)}\times$$

$$\times\|f\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Teorem isbat olundu.

Bu teoremden alınır ki, (2.1.1), (2.1.2) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasının dəqiq şərtlərinin tapılması üçün $N_1(K)$ və $N_2(K)$ normaları yuxarıdan qiymətləndirilməli yaxud onların dəqiq qiymətləri tapılmalıdır. Buna isə biz 2.3 yarımfəslində nail olmuşuq.

Xüsusi halda $\varepsilon=0$ olduqda əvvəlki yarımfəslindəki teorem 2.3.1-dən aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 2.4.1. *Tutaq ki, A operatoru H Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur,* $K\in L(H_{3/2},H_{1/2})$ *və* $H_{3/2}$*-də* $\operatorname{Re}A^{-1}K\ge 0$. *Onda*

$$\frac{1}{2\alpha}\|B_1\|+\frac{1}{\alpha^2}\|B_2\|<1$$

şərti ödənildikdə (2.1.1), (2.1.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Nəticə 2.4.2. *Tutaq ki,* A *tərs* A^{-1} *tamam kəsilməz operatora malik, spektri isə* S_ε *bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur, belə ki,* $H_{3/2}$*-də* $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$, $\operatorname{Re} C^{-1}K \geq 0$ *və* $\operatorname{Re} U^{-1}A^{-1}K \geq 0$ *və aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1,$$

burada

$$c_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\cos\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon)=\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq\frac{\pi}{4},\\ \frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \frac{\pi}{4}\leq\varepsilon<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Onda (2.1.1), (2.1.2) *sərhəd məsələsi* $\rho(t)=1,\ t\in R_+$, *olduqda requlyar həll olunandır.*

Fikrimizcə, birinci fəsildə olduğu kimi, bu fəsildəki olan sonuncu nəticə də $\rho(t)=1,\ t\in R_+$, olduqda yenidir.

FƏSİL III

BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI İKİNCİ TƏRTİB BİRCİNS OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN REQULYAR HƏLLƏR FƏZASININ DAXİLİ KOMPAKTLIĞI HAQQINDA

Bu fəsildə kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins operator-diferensial tənliyin operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində requlyar həll olunması tədqiq olunur. Bundan əlavə, verilmiş tənliyin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlığı xassəsi öyrənilir.

3.1. Bircins operator-diferensial tənliyin requlyar həll olunması haqqında

H separabel Hilbert fəzasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) \equiv -\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \rho(t)A^2u(t) + A_1\frac{du(t)}{dt} + A_2u(t) = 0, \quad t \in R_+, \tag{3.1.1}$$

$$u(0) - Tu'(0) = \varphi. \tag{3.1.2}$$

Burada $u(t)$ funksiyası R_+ $-$də təyin olunmuş H $-$qiymətli vektor funksiya, tənliyin və sərhəd şərtinin əmsalları isə aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1) A- nın tərsi A^{-1} tamam kəsilməz operator olub, spektri

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : |\arg\lambda| \le \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right\}$$

bucaq sektorunda yerləşən normal operatordur;

2) $\rho(t)=\begin{cases}\alpha^2, & t\in(0,1),\\ \beta^2, & t\in(1,+\infty),\end{cases}$ $\alpha,\beta>0$ (müəyyənlik üçün fərz edək ki, $\alpha\le\beta$));

3) $T\in L(H_{1/2},H_{3/2})$, yəni T operatoru $H_{1/2}$ fəzasından $H_{3/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur;

4) A_1 və A_2 elə xətti operatorlardır ki, $B_1=A_1A^{-1}$ və $B_2=A_2A^{-2}$ operatorları $H-$da məhduddurlar.

Tərif 3.1.1. (3.1.1) *tənliyini* R_+-*də ödəyən sanki hər yerdə* $u(t)\in W_2^2(R_+;H)$ *vektor funksiyası varsa, ona* (3.1.1) *tənliyinin requlyar həlli deyilir.*

Tərif 3.1.2. *İxtiyari* $\varphi\in H_{3/2}$ *üçün* (3.1.1) *tənliyinin*

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)-Tu'(t)-\varphi\|_{3/2}=0$$

mənasında (3.1.2) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli vardırsa və onun üçün*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|\varphi\|_{3/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (3.1.1), (3.1.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

Birinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək (3.1.1), (3.1.2) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teoremi isbat edək.

Teorem 3.1.1. *Tutaq ki,* 1)-4) *şərtləri ödənilir,* $Q_{\alpha,\beta}$ *operatorunun* $H_{1/2}-$*də məhdud tərs operatoru vardır və* $H_{1/2}-$*də* $\operatorname{Re}UAT\ge0$ *və* $\operatorname{Re}CT\ge0$. *Bundan əlavə,* B_1,B_2 *operatorları üçün aşağıdakı şərt ödənir:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1.$$

Burada

$$Q_{\alpha,\beta}=E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\alpha AT\left(E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right),$$

$$c_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon},\quad 0\le\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha^2}, & 0\le\varepsilon\le\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\dfrac{1}{\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\le\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Onda (3.1.1), (3.1.2) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır*.

İsbatı. Əvvəlcə aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$P_0(d/dt)u(t)\equiv-\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\rho(t)A^2u(t)=0,\quad t\in R_+, \tag{3.1.3}$$

$$u(0)-Tu'(0)=\varphi. \tag{3.1.4}$$

(3.1.3), (3.1.4) sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$u_0(t)=\begin{cases}\xi_{0,1}(t)=e^{-\alpha tA}\varphi_{0,1}+e^{-\alpha(1-t)A}\varphi_{0,2}, & 0<t<1,\\ \xi_{0,2}(t)=e^{-\beta(t-1)A}\varphi_{0,3}, & t>1,\ \varphi_{0,j}\in H_{3/2},\ j=\overline{1,3}.\end{cases}$$

$u_0(t)\in W_2^2(R_+;H)$ olmasını və (3.1.4) sərhəd şərtini nəzərə alaraq

$$\begin{cases}\xi_{0,1}(0)-T\xi'_{0,1}(0)=\varphi,\\ \xi_{0,1}^{(j)}(1-0)=\xi_{0,2}^{(j)}(1+0),\ j=0,1,\end{cases}$$

sisteminin mövcudluğu çıxır. Bu sistemdən isə $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}$ nəzərən aşağıdakı sistem alınır:

$$\begin{cases} \varphi_{0,1} + e^{-\alpha A}\varphi_{0,2} - T\left(-\alpha A\varphi_{0,1} + \alpha A e^{-\alpha A}\varphi_{0,2}\right) = \varphi, \\ e^{-\alpha A}\varphi_{0,1} + \varphi_{0,2} = \varphi_{0,3}, \\ -\alpha A e^{-\alpha A}\varphi_{0,1} + \alpha A\varphi_{0,2} = -\beta A\varphi_{0,3}. \end{cases}$$

Nəticədə

$$\varphi_{0,1} + e^{-\alpha A}\varphi_{0,2} + \alpha TA\varphi_{0,1} - \alpha TAe^{-\alpha A}\varphi_{0,2} = \varphi,$$

$$e^{-\alpha A}\varphi_{0,1} + \varphi_{0,2} - \varphi_{0,3} = 0,$$

$$-\alpha e^{-\alpha A}\varphi_{0,1} + \alpha\varphi_{0,2} + \beta\varphi_{0,3} = 0$$

tənliklərini almış oluruq.

İkinci və üçüncü tənliklərdən alarıq ki,

$$\varphi_{0,2} = -\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \beta} e^{-\alpha A}\varphi_{0,1}.$$

$\varphi_{0,2}$-ni birinci tənlikdə yazdıqdan sonra

$$\left(E - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} e^{-2\alpha A} + \alpha AT\left(E + \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} e^{-2\alpha A}\right)\right) y_{0,1} = \varphi$$

tənliyini əldə etmiş olarıq. Burada

$$y_{0,1} = A\varphi_{0,1}, y_{0,1} \in H_{1/2}.$$

Başqa sözlə,

$$Q_{\alpha,\beta} y_{0,1} = \varphi$$

operator tənliyi alınar. $\varphi \in H_{3/2}$ və teoremin şərtinə görə $Q_{\alpha,\beta}$ operatorunun $H_{1/2}$ −də məhdud tərsi olduğunu nəzərə alsaq

$$\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3} \in H_{3/2}$$

və birqiymətli müəyyən olmasını və beləliklə də $u_0(t)-$nin (3.1.3), (3.1.4) sərhəd məsələsinin requlyar həlli olmasını isbat etmiş oluruq.

İndi isə (3.1.1), (3.1.2) sərhəd məsələsini tədqiq edək və

$$u(t)=u_0(t)+v(t)$$

əvəzləməsini aparaq. Burada $u_0(t)$ funksiyası (3.1.3), (3.1.4) sərhəd məsələsinin requlyar həllidir. Əvəzləmədən göründüyü kimi

$$v(t)=u(t)-u_0(t).$$

Nəzərə alsaq ki,

$$u(0)-Tu'(0)=\varphi,$$
$$u(0)-Tu_0'(0)=\varphi,$$

onda $v(t)$ funksiyası

$$v(0)-Tv'(0)=0$$

şərtini ödəyir. Doğrudan da,

$$v(0)-Tv'(0)=u(0)-u_0(0)-T(u'(0)-u_0'(0))=$$
$$=u(0)-Tu'(0)-(u_0(0)-Tu_0'(0))=\varphi-\varphi=0.$$

Digər tərəfdən (3.1.1) tənliyindən alırıq ki,

$$P(d/dt)u(0)=P(d/dt)(u_0(t)+v(t))=0,$$

yəni

$$(P_0(d/dt)+P_1(d/dt))(u_0(t)+v(t))=0.$$

Burada

$$P_1(d/dt)u(t)\equiv A_1\frac{du(t)}{dt}+A_2u(t).$$

Onda $v(t)$ funksiyasına nəzərən

$$\left(P_0(d/dt)+P_1(d/dt)\right)v(t)=-P_0(d/dt)u_0(t)-P_1(d/dt)u_0(t)$$

tənliyi alınar. Bundan əlavə,

$$P_0(d/dt)u_0(t)=0$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\left(P_0(d/dt)+P_1(d/dt)\right)v(t)=-P_1(d/dt)u_0(t)$$

tənliyini əldə edirik. Bununla da

$$P(d/dt)v(t)=-P_1(d/dt)u_0(t)\equiv g(t),$$
$$v(0)-Tv'(0)=0$$

məsələsini əldə etmiş oluruq.

İndi göstərək ki, $g(t)$ funksiyası $L_2(R_+;H)$ fəzasına daxildir. Doğrudan da,

$$g(t)=-P_1(d/dt)u_0(t)=-A_1\frac{du_0(t)}{dt}-A_2u_0(t)=$$
$$=-A_1A^{-1}A\frac{du_0(t)}{dt}-A_2A^{-2}A^2u_0(t)=-B_1A\frac{du_0(t)}{dt}-B_2A^2u_0(t).$$

Buradan isə B_1 və B_2 operatorlarının $H-$ da məhdud olduqlarından alırıq ki,

$$\|g\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|-B_1A\frac{du_0}{dt}-B_2A^2u_0\right\|_{L_2(R_+;H)}\leq$$
$$\leq\|B_1\|\left\|A\frac{du_0}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}+\|B_2\|\left\|A^2u_0\right\|_{L_2(R_+;H)}. \qquad (3.1.5)$$

Digər tərəfdən, $u_0(t)\in W_2^2(R_+;H)$ şərtini nəzərə alaraq aralıq törəmələr haqqında teoreminə görə

$$\left\|A\frac{du_0}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}, \tag{3.1.6}$$

$$\left\|A^2u_0\right\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}. \tag{3.1.7}$$

(3.1.6) və (3.1.7) bərabərsizliklərini (3.1.5)-də nəzərə alsaq görərik ki,

$$\|g\|_{L_2(R_+;H)}\le const\left(\|B_1\|+\|B_2\|\right)\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}.$$

Bildiyimizə görə

$$\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|\varphi\|_{3/2}$$

doğru olduğu üçün

$$\|g\|_{L_2(R_+;H)}\le const\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|\varphi\|_{3/2}$$

bərabərsizliklərini almış oluruq.

Beləliklə, $v(t)$ funksiyasına nəzərən aşağıdakı sərhəd məsələsinin tədqiqinə gəlirik:

$$P(d/dt)v(t)=g(t),\quad t\in R_+, \tag{3.1.8}$$

$$v(0)-Tv'(0)=0. \tag{3.1.9}$$

Burada $g(t)\in L_2(R_+;H)$, $v(t)\in W_2^2(R_+;H)$. Başqa sözlə biz (3.1.1), (3.1.2) sərhəd məsələsini bircins (3.1.9) sərhəd şərtinə malik qeyri-bircins (3.1.8) operator-diferensial tənliyinə gətirdik. Teoremin şərtləri daxilində birinci fəsildəki teorem 1.5.1-i tətbiq edərək (3.1.8), (3.1.9) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasını, yəni yeganə requlyar həllə malik olmasını hökm edə bilirik. Onda

$$u(t)=u_0(t)+v(t)$$

(3.1.1), (3.1.2) sərhəd məsələsinin requlyar həlli olacaqdır.

Aşkardır ki,

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le \|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)} + \|v\|_{W_2^2(R_+;H)}.$$

Təkrarən, bildiyimizə görə

$$\|u_0\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|\varphi\|_{3/2}$$

doğru olduğu üçün sərhəd məsələsinin requlyar həll olunmasının tərifindən çıxır ki,

$$\|v\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|g\|_{L_2(R_+;H)} \le const\|\varphi\|_{3/2}.$$

Beləliklə,

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|\varphi\|_{3/2}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Teorem isbat olundu.

Analoji olaraq H separabel Hilbert fəzasında əmsalları 1), 2) və 4) şərtlərini ödəyən bircins (3.1.1) operator-diferensial tənliyinə qeyri-bircins

$$u'(0)-Ku(0)=\psi \qquad (3.1.10)$$

sərhəd şərti ilə baxmaq olar. Burada $\psi \in H_{1/2}$, K operatoru isə aşağıdakı şərti ödəyir:

$3^*)$ $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$, yəni K operatoru $H_{3/2}$ fəzasından $H_{1/2}$ fəzasına təsir edən xətti kəsilməz operatordur.

Tərif 3.1.3. *İxtiyari* $\psi \in H_{1/2}$ *üçün* (3.1.1) *tənliyinin*

$$\lim_{t\to+0}\|u'(t)-Ku(t)-\psi\|_{1/2}=0$$

mənasında (3.1.10) *sərhəd şərtini ödəyən requlyar həlli vardırsa və*

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|\psi\|_{1/2}$$

bərabərsizliyi doğrudursa, onda deyilir ki, (3.1.1), (3.1.10) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır.*

İkinci fəsildə alınan nəticələrdən istifadə edərək (3.1.1), (3.1.10) sərhəd məsələsinin requlyar həll olunması haqqında teoremi söyləyə bilərik.

Teorem 3.1.2. *Tutaq ki,* 1), 2), 3*), 4) *şərtləri ödənilir,* $R_{\alpha,\beta}$ *operatorunun* $H_{3/2}$ *–də məhdud tərs operatoru vardır,* $H_{3/2}$ *–də* $\operatorname{Re}U^{-1}A^{-1}K\ge 0$ *və* $\operatorname{Re}C^{-1}K\ge 0$. *Bundan əlavə,* B_1,B_2 *operatorları üçün aşağıdakı şərt ödənir:*

$$c_1(\varepsilon)\|B_1\|+c_2(\varepsilon)\|B_2\|<1.$$

Burada

$$R_{\alpha,\beta}=E+\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}+\frac{1}{\alpha}A^{-1}K\left(E-\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}e^{-2\alpha A}\right),$$

$$c_1(\varepsilon)=\frac{1}{2\alpha}\frac{1}{\cos\varepsilon},\quad 0\le\varepsilon<\frac{\pi}{2},$$

$$c_2(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha^2}, & 0\le\varepsilon\le\dfrac{\pi}{4},\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha^2}\dfrac{1}{\cos\varepsilon}, & \dfrac{\pi}{4}\le\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Onda (3.1.1), (3.1.10) *sərhəd məsələsi requlyar həll olunandır*.

Qeyd edək ki, teorem 3.1.2-nin isbatı teorem 3.1.1-in isbatına uyğun şəkildə aparılır. Burada yalnız əsas fərq ikinci fəslin teorem 2.4.1-in tətbiq olunmasından ibarətdir, bu da təbiidir.

3.2. Bircins operator-diferensial tənliyin requlyar həllərinin daxili kompaktlıq xassəsi haqqında

Xatırladaq ki, $W_2^1((a,b);H)$ $(0 \le a < b < +\infty)$ Hilbert fəzasını aşağıdakı şəkildə təyin etmişik:

$$W_2^1((a,b);H) =$$

$$= \left\{ u(t) : \frac{du(t)}{dt} \in L_2((a,b);H), \quad Cu(t) \in L_2((a,b);H) \right\},$$

$$\|u\|_{W_2^1((a,b);H)} = \left(\left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L_2((a,b);H)} + \|Cu\|^2_{L_2((a,b);H)} \right)^{1/2}$$

(bax [19]), burada C operatoru H separabel Hilbert fəzasında öz-özünə qoşma, müsbət-müəyyən operatordur.

$a = 0,\ b = +\infty$ olduqda bu fəzanı $W_2^1(R_+;H)$ kimi işarə edəcəyik.

Məlumdur ki (bax [19]), $W_2^2((a,b);H)$ fəzası $W_2^1((a,b);H)$ fəzasına sıxlıq çoxluğu kimi daxildir və bu daxil olma kompaktdır.

Aşkardır ki, $W_2^1((a,b);H)$ fəzasının norması $W_2^2((a,b);H)$ fəzasının normasından zəifdir.

H separabel Hilbert fəzasında (3.1.1) tənliyinə baxaq. Burada (3.1.1) tənliyin əmsalları 1), 2) və 4) şərtlərini ödəyirlər.

$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right)$ ilə (3.1.1) tənliyin $W_2^2(R_+;H)$ fəzasından olan həllər çoxluğunu işarə edək:

$$Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right) = \left\{ u(t) : P\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = 0,\ u(t) \in W_2^2(R_+;H) \right\}.$$

Başqa sözlə, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ (3.1.1) tənliyinin requlyar həllər fəzasıdır.

Aydındır ki, $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ çoxluğu $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının qapalı altfəzasıdır. 1), 2) və 4) şərtləri ödənildikdə

$$P\left(\frac{d}{dt}\right):W_2^2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)$$

operatoru kəsilməz olduğundan $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ qapalı fəzadır. Doğrudan da,

$$u_1(t),u_2(t)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$$

olarsa, onda

$$\alpha_1u_1(t)+\alpha_2u_2(t)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)\quad(\alpha_1,\alpha_2-const)$$

və

$$u_n(t)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right),\quad u_n(t)\to u(t)$$

olarsa, onda

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t)\to P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t).$$

Deməli,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u_n(t)=0$$

şərtindən alırıq ki,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)=0,$$

yəni

$$u(t) \in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right).$$

Bu isə $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzasının qapalı olduğunu göstərir.

İndi isə $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ ilə $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzasının $W_2^1(R_+;H)$ fəzasının normasına nəzərən qapanmasını işarə edək.

İlk dəfə P.D.Laksın işində [59] sonsuz aralıqda bəzi həllər fəzaları üçün daxili kompaktlığın tərifi verilmiş və onun elliptik tənliklərin həlləri üçün Fraqmen-Lindelöf prinsipi ilə sıx əlaqəsi göstərilmişdir.

Tutaq ki, $S \subset L_2(R_+;H)$ sürüşməyə nəzərən invariant olan vektor funksiyalar fəzasıdır, yəni $u(t) \in S$ olarsa, onda istənilən $\eta > 0$ olduqda vektor funksiya $u(t+\eta) \in S$. Əgər $u(t) \in S$ olarsa, onda istənilən $-\infty < a < b < +\infty$ üçün

$$\|u\|_{(a,b)}^2 = \int_a^b \|u(t)\|_H^2 dt$$

işarələməsini daxil edək.

Tərif 3.2.1. *İstənilən* $M > 0$ *və* (a', b') *üçün belə ki,*

$$a < a' < b' < b,$$

$\|u\|_{(a',b')}$ *normasında*

$$V_M = \{u(t) : u(t) \in S, \quad \|u\|_{(a,b)} \le M\}$$

nisbi kompakt çoxluq olarsa, onda S *fəzası daxili kompakt fəza adlanır.*

Bu yarımfəsildə $\|u\|_{W_2^1(R_+;H)}$ norması üzrə $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzasının daxili kompaktlıq xassəsini müəyyən edəcəyik.

Tərif 3.2.2. *Fərz edək ki,*

$$0 \le a < a' < b' < b < +\infty$$

və $M > 0$ *istənilən ədəddir. Əgər*

$$W_M = \left\{ u(t) : u(t) \in \mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right), \|u\|_{W_2^1((a,b);H)} \le M \right\}$$

çoxluğu $W_2^1((a',b');H)$ *fəzasının normasına nəzərən kompakt çoxluqdursa, onda deyilir ki,* $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right)$ *fəzası* $W_2^1(R_+;H)$ *fəzasının normasına nəzərən daxili kompakt fəzadır.*

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, daxili kompaktlıq xassəsinin Fraqmen-Lindelöf tipli teoremlərlə sıx əlaqəsi vardır. Məsələn, abstrakt tənliklər üçün bu cür teoremlər [28], [30], [53] işlərində alınmışdır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.2.1. *Tutaq ki,* 1), 2), 4) *şərtləri ödənilir və* $\dot{W}_2^2(R_+;H)$ *fəzasından olan* $u(t)$ *vektor funksiyası üçün*

$$\left\| P\left(\frac{d}{dt}\right) u \right\|_{L_2(R_+;H)} \ge const \|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \tag{3.2.1}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right)$ *fəzası daxili kompakt fəzadır və elə* $\chi_0 > 0$ *ədədi var ki, istənilən* $u(t) \in \mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+ \right)$ *üçün*

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\chi_0 t} \left(\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_H^2 + \|Cu(t)\|_H^2 \right) dt < +\infty$$

qiymətləndirilməsi doğrudur.

Burada $\dot{W}_2^2(R_+;H)$ fəzası $W_2^2(R_+;H)$ fəzasının altfəzasıdır, yəni $\dot{W}_2^2(R_+;H) \subset W_2^2(R_+;H)$ və bu fəza aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\dot{W}_2^2(R_+;H) = \left\{ u(t) : u(t) \in W_2^2(R_+;H),\ u(0) = u'(0) = 0 \right\}.$$

İndi isə teorem 3.2.1-in isbatına keçək.

İsbatı. Tutaq ki, $u(t)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$. Onda aşkardır ki, istənilən $\eta>0$ üçün $u(t+\eta)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$, yəni $Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ fəzası sürüşməyə nəzərən invariant fəzadır. Tutaq ki, $0\le a<b<+\infty$ və $a<a'<b'<b$. Ədədi $\varphi(t)\in C^\infty(a,b)$ funksiyasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\in(a',b'),\\ 0, & t\notin(a',b').\end{cases}$$

Onda $u(t)\in Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right),R_+\right)$ vektor funksiyası üçün

$$v(t)=\varphi(t)u(t)\in \dot{W}_2^2(R_+;H).$$

Buna görə də (3.2.1) bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)v\right\|_{L_2(R_+;H)}\ge const\|v\|_{W_2^2(R_+;H)}.$$

$t\notin(a',b')$ halında $v(t)=0$ olduğundan axırıncı bərabərsizliyi aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)v\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)(\varphi u)\right\|_{L_2(R_+;H)}\ge$$

$$\ge const\|\varphi u\|_{W_2^2(R_+;H)}\ge const\|\varphi u\|_{W_2^2((a,b);H)}=$$

$$=const\left(\int_a^b\left(\left\|\frac{d^2(\varphi u)}{dt^2}\right\|_H^2+\left\|A^2(\varphi u)\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}\ge$$

$$\ge const\left(\int_{a'}^{b'}\left(\left\|\frac{d^2(\varphi u)}{dt^2}\right\|_H^2+\left\|A^2(\varphi u)\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}=$$

$$= const\left(\int_{a'}^{b'}\left(\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_H^2 + \left\|A^2u\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2} = const\|u\|_{W_2^2((a',b');H)}. \qquad (3.2.2)$$

Digər tərəfdən asanlıqla görmək olar ki,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)(\varphi(t)u(t)) = -\frac{d^2(\varphi(t)u(t))}{dt^2} +$$

$$+\rho(t)A^2(\varphi(t)u(t)) + A_1\frac{d(\varphi(t)u(t))}{dt} + A_2(\varphi(t)u(t)) =$$

$$= \varphi(t)P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) - 2\frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{du(t)}{dt} - u(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt}A_1u(t).$$

Bildiyimiz kimi,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0.$$

Onda

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t) = -2\frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{du(t)}{dt} - u(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt}A_1u(t).$$

Buradan isə alırıq ki,

$$\left\|P\left(\frac{d}{dt}\right)v\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|-2\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{dt} - u\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}A_1u\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

$\max_t\left|\varphi^{(s)}(t)\right| \le const,\ \ s = 1,2,$ olduğundan aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\left\|-2\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{dt} - u\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt}A_1u\right\|_{L_2((a,b);H)} \le$$

$$\leq \left\| 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{dt} \right\|_{L_2((a,b);H)} + \left\| u\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right\|_{L_2((a,b);H)} + \left\| \frac{d\varphi}{dt} A_1 u \right\|_{L_2((a,b);H)} \leq$$

$$\leq 2\max_{t\in(a,b)} |\varphi'(t)| \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_2((a,b);H)} + \max_{t\in(a,b)} |\varphi''(t)| \left\| A^{-1}Au \right\|_{L_2((a,b);H)} +$$

$$+ \max_{t\in(a,b)} |\varphi'(t)| \left\| A_1 A^{-1} Au \right\|_{L_2((a,b);H)} \leq const \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_2((a,b);H)} +$$

$$+ const \left\| A^{-1} \right\| \left\| Au \right\|_{L_2((a,b);H)} + const \left\| A_1 A^{-1} \right\| \left\| Au \right\|_{L_2((a,b);H)}.$$

Axırıncı bərabərsizliyə aralıq törəmələr haqqında teoremi tətbiq edərək alınır ki,

$$\left\| -2\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{dt} - u\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} A_1 u \right\|_{L_2((a,b);H)} \leq$$

$$\leq const \left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)} + const \left\| A^{-1} \right\| \left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)} +$$

$$+ const \left\| A_1 A^{-1} \right\| \left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)} \leq const \left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)}. \qquad (3.2.3)$$

Beləliklə, (3.2.2) və (3.2.3) bərabərsizliklərdən

$$\left\| u \right\|_{W_2^2((a',b');H)} \leq const \left\| P\left(\frac{d}{dt}\right) v \right\|_{L_2(R_+;H)} \leq const \left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)}$$

münasibətlərinin doğru olduğunu alırıq.

Buradan isə alırıq ki,

$$\left\| u \right\|_{W_2^1((a,b);H)} \geq const \left\| u \right\|_{W_2^2((a',b');H)} \qquad (3.2.4)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

(3.2.4) bərabərsizliyini istifadə edərək $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzasının daxili kompakt fəza olduğunu göstərək.

Biz isbat etməliyik ki, W_M çoxluğu $W_2^1((a',b');H)$ fəzasının normasında kompakt çoxluqdur, burada $a < a' < b' < b$.

$\widetilde{W}_M$ ilə $W_M \cap Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ kəsişməsini işarə edək, yəni

$$\widetilde{W}_M = W_M \cap Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right).$$

$\widetilde{W}_M$ çoxluğunun $W_2^1((a',b');H)$ fəzasının normasına nəzərən kompakt çoxluq olduğunu göstərək.

$$u(t) \in \widetilde{W}_M \subset Ker\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$$

olduqda

$$\|u\|_{W_2^2((a',b');H)} \le const\|u\|_{W_2^1((a,b);H)}$$

bərabərsizliyi doğrudur. Bu isə o deməkdir ki, $\widetilde{W}_M$ çoxluğu $\|u\|_{W_2^2((a',b');H)}$ norması üzrə məhdud çoxluqdur. A^{-1} operatoru tamam kəsilməz operator olduğundan

$$W_2^2((a',b');H) \subset W_2^1((a',b');H)$$

daxil olması kompakt daxil olmadır (bax [28], [30]). Buna görə də $\widetilde{W}_M$ çoxluğu $W_2^1((a',b');H)$ fəzasında kompakt çoxluqdur.

Beləliklə, $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzası daxili kompakt fəzadır. Buradan isə $\mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ fəzasının sürüşməyə nəzərən invariant fəza olduğundan P.D.Laksın teoreminə (bax [59]) görə çıxır ki, elə $\chi_0 > 0$ ədədi var ki, istənilən $u(t) \in \mathcal{L}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right), R_+\right)$ üçün

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\chi_0 t}\left(\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H^2 + \|Cu(t)\|_H^2\right)dt < +\infty$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, son 15 il ərzində daxili kompaktlıq məsələlərinə maraq artmış və müxtəlif aspektlərdə bir neçə belə tədqiqat aparılmışdır (məsələn, bax [41], [42], [45]).

Nəticə

Dissertasiya işi sərhəd şərtlərində mücərrəd operatorlar iştirak edən və baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı elliptik tip operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunma məsələlərinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakılardan ibarətdir:

1. Sərhəd şərtində məhdud operator iştirak etdiyi halda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda birinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılmışdır.

2. Sərhəd şərtində qeyri-məhdud operator iştirak etdiyi halda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda ikinci sərhəd məsələsinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri tapılmışdır.

3. Normaları operator-diferensial ifadəsi ilə yazılan müəyyən Sobolev tipli vektor funksiyalar fəzalarında aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir.

4. Aralıq törəmə operatorlarının normalarının qiymətləndirilməsi ilə tədqiq olunan sərhəd məsələlərinin korrekt və birqiymətli həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi təyin edilmişdir.

5. Operator əmsallara malik müxtəlif qeyri-bircins sərhəd şərtləri daxilində baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin yarımoxda korrekt və birqiymətli həll olunması haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

6. Yarımoxda baş hissəsi normal operatora malik kəsilən əmsallı ikinci tərtib bircins elliptik operator-diferensial tənliklərin requlyar həllər fəzasının daxili kompaktlıq xassəsi araşdırılmışdır.

İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı

1. Qasımova, G.M. Operator əmsallı elliptik tip operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsi haqqında // Azərbaycan xalqının ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, Bakı Dövlət Universiteti, Mexanka-riyaziyyat fakultəsi, – Bakı: – 20–21 may, – 2015, – s. 66–68.
2. Алиев, А.Б. Почти периодические решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // – Баку: Известия Академии Наук Аз.ССР, серия физико-технических и математических наук, – 1975. № 2, – с. 29–34.
3. Алиев, А.Р. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // – Баку: Доклады Академии Наук Азербайджана, – 1998. т. 54, № 5–6, – с. 9–13.
4. Байрамоглы, М. О самосопряженных расширениях операторного уравнения с особенностью // – Баку: Известия Академии Наук Аз.ССР, серия физико-технических и математических наук, – 1976. № 2, – с. 140–144.
5. Власов, В.В. Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М. В. Келдыша // – Москва: Доклады Академии Наук СССР, – 1982. т. 263, № 6, – с. 1289–1293.
6. Власов, В.В. Корректная разрешимость одного класса функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, – 1995. т. 345, № 6, – с. 733–736.
7. Гасымов, М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков // – Ереван: Известия Академии Наук Армянской ССР, серия математика, – 1971. т. 6, № 2–3, – с. 131–147.
8. Гасымова, Г.М. О краевой задаче для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с оператором в краевом условии // Материалы Международной научной конференции "Неньютоновские системы в

нефтегазовой отрасли”, посвященной 85-летнему юбилею академика Азада Халил оглы Мирзаджанзаде, – Баку: – 21–22 ноября, – 2013, – с. 73–74.

9. Гасымова, Г.М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения второго порядка с операторными коэффициентами // – Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, – 2014. № 4, – с. 29–35.

10. Гасымова, Г.М. О регулярной разрешимости одной краевой задачи для эллиптического дифференциального уравнения // Материалы Международной научной конференции по теоретическим и прикладным проблемам математики, – Сумгаит: – 25–26 мая, – 2017, – с. 70–71.

11. Гасымова, Г.М., Разрешимость краевых задач для одного класса эллиптических операторно-дифференциальных уравнений // Материалы IX Международной молодежной научно-практической конференции “Математическое моделирование процессов и систем”, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, – Стерлитамак: – 30 октября – 1 ноября, – 2019, – с. 128–132.

12. Горбачук М.Л. О корректности задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений в классах аналитических вектор-функций // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, – 2000. т. 374, № 1, – с. 7–9.

13. Горбачук, В.И., Горбачук, М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984, 284 с.

14. Дезин, А.А. Операторы с первой производной по “времени” и нелокальные граничные условия // – Москва: Известия Академии Наук СССР, серия математика, – 1967. т. 31, № 1, – с. 61–86.

15. Дезин, А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. – Москва: Наука, – 1980, – 207 с.

16. Дезин, А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // – Москва: Труды Математического института им. В. А. Стеклова, – 2000. т. 229, – с. 3–175.

17. Корниенко, В.В. О спектре иррегулярных операторов // – Москва: Дифференциальные уравнения, – 1985. т. 21, № 1, – с. 65–77.

18. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – Москва: Наука, – 1967, – 464 с.

19. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – Москва: Мир, – 1971, – 371 с.

20. Мирзоев, С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // – Москва: Доклады Академии Наук СССР, – 1983. т. 273, № 2, – С. 292–295.

21. Мирзоев, С.С. К теории разрешимости операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве / Материалы научной конференции “Вопросы функционального анализа и математической физики”, посвященной 80-летию Бакинского государственного университета: Баку, 1999, с. 307–316.

22. Мирзоев, С.С., Алиев, А.Р. Об одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом // – Баку: Труды Института Математики и Механики АН Азербайджана, – 1997. т. 6(14), – с. 117–121.

23. Мирзоев, С.С., Алиев, А.Р., Гасымова, Г.М. Условия разрешимости одной краевой задачи с операторными коэффициентами и связанные с ними оценки норм операторов промежуточных производных // – Москва: Доклады Российской Академии Наук, – 2016. т. 470, № 5, – с. 511–513.

24. Мирзоев, С.С., Ягубова, Х.В. О разрешимости краевых задач с операторами в краевых условиях для одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // – Баку: Доклады Академии Наук Азербайджана, – 2001. т. 57, № 1–3, – с. 12–17.

25. Рустамова, Л.А. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // – Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, – 2007. № 2, – с.51–60.

26. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – Москва: ИЛ, – 1962, – 829 с.

27. Шкаликов, А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // – Москва: Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1989. № 14, – С. 140–224.

28. Якубов, С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С.Я. Якубов. – Баку: Элм, – 1985, – 220 с.

29. Якубов, С.Я., Алиев, Б.А. Фредгольмовость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // – Москва: Доклады Академии Наук СССР, – 1981. т. 257, № 5, – с. 1071–1074.

30. Agmon, S., Nirenberg, L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Communications on Pure and Applied Mathematics, – 1963. vol. 16, no. 2, – p. 121–239.

31. Akhmedov, A.M., Mustafayeva, Y.Y. On the solvability of some operator-differential equations in complex domain // Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science, – 2008. vol. 32, no. 3, – p. 215–219.

32. Aliev, A.R. Boundary-value problems for a class of operator differential equations of high order with variable coefficients // Mathematical Notes, – 2003. vol. 74, no. 5-6, – p. 761–771.

33. Aliev, A.R. Solvability of a class of boundary value problems for second-order operator-differential equations with a discontinuous coefficient in a weighted space // Differential Equations, – 2007. vol. 43, no. 10, – p. 1459–1463.

34. Aliev, A.R., Mirzoev, S.S. On boundary value problem solvability theory for a class of high-order operator-differential equations // Functional Analysis and Its Applications, – 2010. vol. 44, no. 3, – p. 209–211.

35. Aliev, B.A., Kerimov, V.Z., Yakubov, Y.S. Solvability of a boundary value problem for elliptic differential-operator equations of the second order with a quadratic complex parameter // Differential Equations, – 2020. vol. 56, no. 10, – p. 1306–1317.

36. Aliev, B.A., Yakubov, Y. Solvability of boundary value problems for second-order elliptic differential-operator equations with a spectral parameter and with a discontinuous coefficient at the highest derivative // Differential Equations, – 2014. vol. 50, no. 4, – p. 464–475.

37. Aliyev, A.R. To the theory of solvability of the second order operator-differential equations with discontinuous coefficients // – Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, – 2004. vol. 24, no. 1, – p. 37–44.

38. Aliyev, B.A. Coercive solvability of boundary value problems with the conditions of conjugations for the second order differential operator equations // – Baku: Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2001. vol. 14(22), – p. 14–17.

39. Amirova, L.I. On the solvability of boundary-value problems for a class of second order operator-differential equations // – Baku: Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Academy of Sciences of Azerbaijan, – 1999. vol. 11(19), – p. 16–20.

40. Aslanov, G.I. Differential equations with operator coefficients in Hilbert spaces // Mathematical Notes, – 1993. vol. 53, no. 3, – p. 351–353.

41. Baranov, A.D. Interior-compact subspaces and differentiation in model subspaces // Journal of Mathematical Sciences, – 2006. vol. 139, no. 2, – p. 6369–6373.

42. Chodounský, D., Murtinová, E. Internal normality and internal compactness // Topology and its Applications, – 2008. vol. 155, no. 4, – p. 201–206.

43. De Simon, L., Torelli, G. Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, – 1974. vol. 4, no. 1, – p. 131–154.

44. Dezin, A.A. On weak and strong irregularity // Differential Equations, – 1982. vol. 17, no. 10, – p. 1160–1165.

45. Gasanov, R.G. On intrinsic compactness properties of generalized solutions of a fourth order operator-differential equation on the segment // – Baku: Transactions

of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, – 2006. vol. 26, no. 7, – p. 63–70.

46. Gasimova, G.M. On solvability conditions of a boundary value problem with an operator in the boundary condition for a second order elliptic operator-differential equation // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2014. vol. 40, Special Issue, – p. 172–177.

47. Gasimova, G.M. On well-defined solvability of a boundary value problem for an elliptic differential equation in Hilbert space // – Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, – 2015. vol. 35, no. 1, – p. 31–36.

48. Gasimova, G.M. On a boundary-value problem for an equation with operator coefficients in a Hilbert space // Proceedings of an International conference "Operators, Functions and Systems of Mathematical Physics" dedicated to 70th anniversary of prof. Hamlet Isakhanli, Khazar University, – Baku: – 21–24 May, – 2018, – p. 87–88.

49. Gasimova, G.M. On the internal compactness of the space of regular solutions of one class of second order operator-differential equations with a discontinuous coefficient // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2021. vol. 11, no 1, – p. 90–96.

50. Gasymov, M.G. On the theory of polynomial operator pencils // Soviet Mathematics Doklady, – 1972. vol. 12, – p. 1143–1147.

51. Gasymov, M.G. On the solubility of boundary-value problems for a class of operator differential equations // Soviet Mathematics Doklady, – 1977. vol. 18, – p. 943–947.

52. Gasymov M.G., Mirzoev, S.S. Solvability of boundary value problems for second-order operator-differential equations of elliptic type // Differential Equations, – 1992. vol. 28, no. 4, – p. 528–536.

53. Gorbachuk, M.L. The Phragmén-Lindelöf theorem for solutions of elliptic differential equations in a Banach space // Ukrainian Mathematical Journal, – 2007. vol. 59, no. 5, – p. 708–717.

54. Gulmamedov, V.Ya. On correct solvability of boundary value problems for the even order operator-differential equations // – Baku: Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics and Mechanics, – 1999. vol. 19, no. 1-2, – p. 70–75.

55. Ismailov, Z.I. A three-point normal boundary value problem for an operator-differential equation // Siberian Mathematical Journal, – 1994. vol. 35, no. 5, – p. 941–944.

56. Jafarova, Kh.V. On the normal solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the second order // – Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2011. vol. 1, no 1, – p. 94–102.

57. Kerimov, K.A., Mirzoev, S.S. On a problem for operator-differential second-order equations with nonlocal boundary condition // Mathematical Notes, – 2013. vol. 94, no. 3-4, – p. 330–334.

58. Kostyuchenko, A.G., Shkalikov, A.A. Self-adjoint quadratic operator pencils and elliptic problems // Functional Analysis and Its Applications, – 1983. vol. 17, no. 2, – p. 109–128.

59. Lax, P.D. A Phragmén-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations // Communications on Pure and Applied Mathematics, – 1957. vol. 10, no. 3, – p. 361–389.

60. Mirzoev, S.S. Multiple completeness of root vectors of polynomial operator pencils corresponding to boundary-value problems on the semiaxis // Functional Analysis and Its Applications, – 1983. vol. 17, no. 2, – p. 151–153.

61. Mirzoev, S.S., Aliev, A.R., Rustamova, L.A. Solvability conditions for boundary-value problems for elliptic operator-differential equations with discontinuous coefficient // Mathematical Notes, – 2012. vol. 92, no. 5-6, – p. 722–726.

62. Mirzoev, S.S., Aliev, A.R., Rustamova, L.A. On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equation of second order with discontinuous coefficients // Journal of Mathematical Physics, Analysis Geometry, – 2013. vol. 9, no. 2, – p. 207–226.

63. Mirzoev, S.S., Rustamova, L.A. On a regular solvability of one boundary-value problem for the second order operator-differential equations // Erciyes University Journal of Institute of Science and Technology, – 2009. vol. 25, no. 1-2, – p. 354–373.

64. Mirzoev, S.S., Safarov, R.F. On holomorphic solutions of some boundary-value problems for second-order elliptic operator differential equations // Ukrainian Mathematical Journal, – 2011. vol. 63, no. 3, – p. 480–486.

65. Mirzoev, S.S., Salimov, M.Yu. On the solvability of the boundary-value problem for second-order equations in Hilbert space with an operator coefficient in the boundary condition // Mathematical Notes, – 2012. vol. 91, no. 5-6, – p. 808–815.

66. Mirzoev, S.S., Veliev, S.G. On solutions of one class of second-order operator differential equations in the class of holomorphic vector functions // Ukrainian Mathematical Journal, – 2010. vol. 62, no. 6, – p. 928–942.

67. Orudzhev, G.D. On the solvability of boundary value problems for an abstract polyharmonic equation // Doklady Mathematics, – 1994. vol. 49, no. 1, – p. 88–91.

68. Radzievskii, G.V. The problem of the completeness of root vectors in the spectral theory of operator-valued functions // Russian Mathematical Surveys, – 1982. vol. 37, no. 2, – p. 91–164.

69. Shkalikov, A.A. Some problems in the theory of polynomial operator pencils // Russian Mathematical Surveys, – 1983. vol. 38, no. 3, – p. 151–152.

70. Shkalikov, A.A. Perturbations of self-adjoint and normal operators with discrete spectrum // Russian Mathematical Surveys, – 2016. vol. 71, no. 5, – p. 907–964.

71. Yakubov, S. A nonlocal boundary value problem for elliptic differential-operator equations and applications // Integral Equations and Operator Theory, – 1999. vol. 35, no. 4, – p. 485–506.

72. Yakubov, S.Ya. Fredholm property of elliptic boundary value problems for partial differential and differential-operator equations // Results in Mathematics, – 1993. vol. 24, no. 3–4, – p. 372–388.

73. Yakubov, S.Ya., Aliev, B.A. A boundary-value problem with an operator in the boundary conditions, for a second-order elliptic differential-operator equation // Siberian Mathematical Journal, – 1985. vol. 26, no. 4, – p. 618–628.