АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

О ФРЕЙМОВЫХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Сабина Рагиб кызы Садыгова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора наук

Баку – 2023

Диссертационная работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Научный консультант: чл.-корр. НАН Азербайджана, проф.
Билал Тельман оглы Билалов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Гейбатгулу Сафар оглы Мустафаев
доктор физико-математических наук, профессор
Даниял Магоммед оглы Исрафилов
доктор математических наук, профессор
Бахрам Али оглы Алиев
доктор математических наук, доцент
Мигдад Имдад оглы Исмаилов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики

Председатель диссертационного совета:
член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор
_____ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н.
_____ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

доктор физико-математических наук, профессор
_____ **Идаят Магоммед оглы Гусейнов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки.

Современный гармонический анализ берет свое начало из классических рядов Фурье и охватывает многие направления математики как теория аппроксимации, теория потенциалов, теория сингулярных операторов, теория уравнений в частных производных, абстрактный гармонический анализ и др. При построении теории классических рядов Фурье основную роль играет ортогональность тригонометрических систем. Наряду с этим в последующем появились гармонические анализы, порожденные не ортогональными системами. Возникновения подобных теорий вызваны различными потребностями. Так, в качестве примера можно привести теорию почти-ортогональных (п.о.) функций, которая применяется во многих областях математики и механики, и в том числе при управлении бесконечной системой вибраторов в теории управлении (см. напр. [[1]]). Следует отметить, что теория п.о. функций тесно связана с теорией базисов Рисса в гильбертовых пространствах. В качестве другого примера можно привести теорию почти-периодических (п.п.) функций, созданная в 1924-1926 гг. Г.Бором. В последующем теория Бора существенно развивалась в работах известных математиков как С.Бохнер, Г.Вейл, А. Безикович, Ж.Фабер, Дж.Нейман, В.В.Степанов, Н.Н.Боголюбов и др. Эта теория дала сильный толчок возникновению и развитию гармонического анализа функций на группах (п.п. функции, ряды, интегралы Фурье на группах). В последующем теория п.п. функций развивалась в связи с задачами дифференциальных уравнений, теории устойчивости, динамических систем и т.п. Другим очень важным примером является теория фреймов, созданная в работе Duffin, Schaeffer в 1952 г. в связи с изучением некоторых вопросов

---

[1] А.Г.Бутковский, Методы управления системами с распределенными параметрами, Москва, Наука, 1975, 568 с.

негармонических рядов Фурье относительно возмущенных систем экспонент. К фреймам возрос интерес после того, когда в 80-ые годы прошлого века были найдены применения вейвлетов в различных областях естествознания. Вейвлеты широко применяются в задачах обработки и кодирования сигналов, изображений различной природы (речь, спутниковые изображения, рентгенограммы внутренних органов и т.п.), распознавания образов, при изучении свойств поверхностей кристаллов и нанообьектов и во многих других областях.

Одной из причин возникновения негармонического анализа является решение уравнений в частных производных методом Фурье. Так как, при решении многих уравнений смешанного или же эллиптического типов в специальных областях на комплексной плоскости методом Фурье возникают возмущенные тригонометрические системы вида

$$\{\cos(nt+\alpha(t))\}_{n\in Z_+}, \qquad (1)$$

($N-$натуральные числа и $Z_+=\{0\}\cup N$), где $\alpha:[0,\pi]\to C-$ некоторая, вообще говоря, комплекснозначная функция ($C-$ комплексная плоскость). Относительно подобных задач можно рассмотреть напр., работы С.М. Пономарева [2], Е.И.Моисеева [3] и др.. Естественно, обоснование метода Фурье требует изучение базисных свойств (полнота, минимальность, базисность, базисность Рисса) соответствующих систем вида (1) в надлежащем банаховом пространстве функций.

Диссертационная работа в целом посвящается выше сформулированному направлению и вопросам, касающихся этого направления. Поэтому считаем, что тема диссертационной работы является актуальной и представляет особый научный интерес.

---

[2] Пономарев С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // ДАН СССР, 1979, т.246, №6, с. 1303-1304

[3] Моисеев Е.И. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифф. уравн., 1992, т.28, №1, с. 123-132

А теперь приведем краткую историю касающихся результатов. Изучение базисных свойств систем вида (1) имеет богатую историю. К изучению вопросов, касающихся аппроксимативных свойств подобных систем обратили внимание еще в 1930 г. известные математики Рунге и Уолш (относительно этих результатов можно рассмотреть монографию Уолша [4]). Отметим, что установление базисности системы вида (1) в лебеговых пространствах функций $L_p(0,\pi), 1<p<+\infty$ (в крайних $p=1$ и $p=+\infty$, случаях базисность, вообще говоря, не имеет место), вообще говоря, не является тривиальным. Чтобы принести ясность этому высказыванию, рассмотрим следующий двойной аналог системы (1):

$$\left\{A(t)e^{\mathrm{int}}; B(t)e^{-ikt}\right\}_{n\in Z_+;k\in N}, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ комплекснозначные на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции. Как установлено в работах Б.Т. Билалова [5;6] базисные свойства системы (1) в $L_p(0,\pi)$ устанавливаются используя аналогичные свойства системы (2) в $L_p \equiv L_p(-\pi,\pi)$. Замыкания линейных оболочек частей $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z_+}$, $\left\{e^{-\mathrm{int}}\right\}_{n\in N}$ в $L_p, 1<p<+\infty$, обозначим через L_p^+ и ${}_{-1}L_p^-$, соответственно. Имеет место прямое разложение

$$L_p = L_p^+ \dot{+}_{-1} L_p^-,\ 1<p<+\infty. \tag{3}$$

Пусть $T^{\pm}: L_p \to L_p -$операторы умножения, определенные выражениями

---

[4] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.:, ИЛ, 1961

[5] Билалов Б. Т. Система экспонент со сдвигом и задача А. Г. Костюченко // Сиб. мат. журн. 2009, Т. 50, №2. С. 279–288

[6] Билалов Б.Т. Необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы вида $\left\{A\varphi^n; B\overline{\varphi}^n\right\}$ // Докл. РАН. 1992. Т. 322, №6. С. 1019-1021

$$T^+ f = Af\,;\, T^- f = Bf\,,\ \forall f \in L_p\,.$$

Тогда при условии $A^{\pm 1}; B^{\pm 1} \in L_\infty(-\pi,\pi)$, вопрос базисности системы (2) в L_p сводится к корректной разрешимости следующего уравнения

$$\left(T^+P^+ + T^-P^-\right)f = g\,,\ g \in L_p\,, \tag{4}$$

где $P^+ : L_p \to L_p^+$; $P^- : L_p \to_{-1} L_p^-$ – проекторы, порожденные разложением (3). Справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть* $A^{\pm 1}; B^{\pm 1} \in L_\infty$. *Система (2) образует базис в* L_p $,1 < p < +\infty$, *тогда и только тогда, когда задача (4) корректно разрешима в* L_p.

Дальнейшее изучение требует нахождение условий относительно коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, при выполнении которых задача (4) корректно разрешима в L_p. Задача (4) в свою очередь, благодаря отождествлении $H_p^+ = L_p^+$ и ${}_{-1}H_p^- = {}_{-1}L_p^-$ (классы Харди H_p^+ и ${}_{-1}H_p^-$ будем определять позже) сводится к решению краевой задачи Римана теории аналитических функций в классах Харди $H_p^+ \times_{-1} H_p^-$. Первая такая идея возникла в одной заметке А.В. Бицадзе [7] в 1950 г.. Эта идея открыла дверь к созданию нового метода изучения базисных свойств возмущенных тригонометрических систем функций в лебеговых пространствах. В последующем этой идеей успешно пользовался С.М.Пономарев при решении серии уравнений смешанного типа методом Фурье.

Своеобразное сведение вопроса полноты возмущенной тригонометрической системы в L_p $,1 < p < +\infty$, к тривиальной разрешимости однородной задачи Гильберта теории

---

[7] Бицадзе А.В. Об одной системе функций // УМН, 1950, т.5, в. 4(38), с. 150-151

аналитических функций в классах Харди H_p^+, приведено в работах А.Н. Барменкова и Ю.А. Казмина. Аналогичные вопросы изучены в работе А.А. Шкаликова [8]. Используя метод краевых задач Е.И.Моисеев установил критерий базисности системы синусов $\{\sin[(n+\alpha)t+\beta]\}_{n\in N}$, и экспонент $\{e^{i(n+\alpha\, signn)t}\}_{n\in Z}$, в пространстве $L_p(0,\pi)$ и $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, соответственно, где $\alpha,\beta\in R-$действительные параметры. В последующем, развив этот метод, Б.Т.Билалов установил критерий базисности двойной системы экспонент (2) в $L_p(-\pi,\pi)$ и одинарной системы вида

$$\{a(t)e^{\mathrm{int}}+b(t)e^{-\mathrm{int}}\}_{n\in N},$$

в $L_p(0,\pi)$, $1<p<+\infty$, где $a;b:[0,\pi]\to C-$комплекснозначные функции. Использовав эти результаты им же найдены критерия полноты и минимальности двойных систем степеней $\{A(t)W^n(t);B\overline{W}^n(t)\}_{n\in Z_+}$, и одинарных систем степеней $\{a(t)\varphi^n(t)+b(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n\in Z_+}$, в лебеговых пространствах $L_p(a,b)$, $1\le p\le+\infty$ ($L_\infty(a,b)\equiv C[a,b]$).

В диссертационной работе вышеприведенный метод обобщается на абстрактный случай. Рассматривается прямое разложение банахово пространство по подпространствам и его двойной базис, порожденный этим разложением. Метод краевых задач обобщается на рассматриваемый абстрактный случай и используя этот метод получается абстрактный аналог классической теоремы «$\frac{1}{4}$-Кадеца» о базисности Рисса возмущенной системы экспонент. Метод краевых задач применяется к базисности возмущенной двойной системы.

---

[8] Шкаликов А.А. Об одной системе функций . Математические заметки, 1975, т. 18, в.6, с. 855-860

Рассматриваются некоторые векторнозначные лебеговы классы и классы Харди. Устанавливаются некоторые свойства векторнозначных функций из этих классов и векторнозначные аналоги формул Сохоцкого-Племеля для векторнозначных интегралов типа Коши. Рассматриваются векторнозначные краевые задачи Римана и изучаются их разрешимость. Затем этот подход применяется к абстрактным вопросам базисности абстрактной системы экспонент.

Одним из рассматриваемых вопросов в диссертационной работе является пространство коэффициентов. Термин пространство коэффициентов возник в теории базисов. Суть его состоит в том, что каждый базис порождает соответствующее банахово пространство из скалярных последовательностей, которое изоморфно исходному пространству. В последующем в работах Б.Т.Билалова показано, что каждая невырожденная система в банаховом пространстве (т.е. каждый член системы отличен от нуля) порождает соответствующее банахово пространство коэффициентов с каноническим базисом. Пространство коэффициентов играет исключительную роль в теории аппроксимации. Классические понятия как бесселевы, гильбертовы системы и базисы Рисса, введенные Н.К.Бари, определяются исходя из пространства коэффициентов, где в качестве пространство коэффициентов участвует l_2. На тот факт, что произвольная невырожденная система в B-пространстве порождает соответствующее B-пространство из скалярных последовательностей, обратили внимание также в монографии Ch. Heil [9]. В работе Б.Т.Билалова и З.Г.Гусейнова [10;11] используя понятие пространство коэффициентов все

---

[9] Heil Ch. A Basis Theory Primer. Springer, 2011, 534 p.

[10] Билалов Б.Т., Гусейнов З.Г. Критерий базисности возмущенной системы экспонент в лебеговых пространствах с переменным показателем суммируемости // Доклады Академии Наук, 2011, т.436, №5, с.586-589.

[11] Bilalov B.T., Guseynov Z.G. Basicity of a system of exponents with a piece-wise linear phase in variable spaces // Mediterr. J. Math., 2012, vol. 9 , no. 3, pp. 487–498

результаты Н.К.Бари касающихся бесселевых-гильбертовых систем и базисов Рисса, были перенесены на общий банаховый случай рассматриваемого пространства. Понятие пространство коэффициентов играет особую роль и в теории фреймов. Так как, понятия атомарного разложения и банахового (или же гильбертого) фрейма определяются благодаря пространству коэффициентов из скалярных последовательностей. В случае гильбертового фрейма в качестве пространства коэффициентов берется l_2.

Одним из ключевых вопросов, рассмотренных в диссертационной работе, является фреймы в банаховых пространствах. В связи с многочисленными приложениями в различных областях естествознания теория фреймов бурно развивается и к ней интерес возрастает с каждым днем. Ей посвящены монографии и обзорные статьи разных математиков. В этом направлении получены много результатов в контексте классической теоремы Пэли – Винера о возмущении ортонормированного базиса. Более подробно относительно этих результатов можно познакомиться из монографий O. Christensen и Ch.Heil.

В диссертационной работе рассматриваются атомарные разложения пространств Лебега и классов Харди по вырождающимся системам из косинусов и экспонент. Изучение базисных свойств вырождающихся тригонометрических систем берет свое начало из основополагающей работы К.И. Бабенко относительно системы $\left\{|x|^{\alpha} e^{inx}\right\}_{n\in Z}$. Изучению базисных свойств тригонометрических систем в весовых пространствах посвящены работ авторов Макенхоупт Б., Hunt R.A., Young W.S., Е.И.Моисеев, Казарян К.С., Лизоркин П.И., Б.Т. Билалов, С.С.Пухов, А.М. Седлецкий и др. Во всех этих работах весовые функции удовлетворяют известному условию Макенхоупта. Естественно возникает вопрос о том, что если коэффициент вырождения не удовлетворяет условию Макенхоупта, то что можно сказать относительно базисных свойств рассматриваемой

системы. Видимо впервые подобный случай был рассмотрен в работе Е.С. Голубевой в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ относительно системы $\{|x|e^{inx}\}_{n\in Z}$. Это направление было развито в работах Б.Т.Билалова, Ф.А.Кулиевой, С.Р.Садыговой, З.В.Мамедовой. Ими рассмотрены общий вес степенного вида в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<+\infty$, относительно систем синусов и экспонент. Существенные результаты в этом направлении получены в работах А.Ш.Шукюрова. Он рассмотрел тригонометрические системы с произвольным вырождением и обобщил известные результаты на этот случай.

Еще одним объектом, рассмотренный в диссертационной работе, является вопрос о сходимостей преобразования Фурье-Стилтьеса. С этой целью сперва понятие статистической сходимости обобщается на непрерывный случай в разных направлениях, а затем эта точка зрения применяется к вопросу сходимости преобразования Фурье-Стилтьеса.

Объект и предмет исследования.

Пространства Лебега банаховозначных функций, банаховозначные классы Харди, абстрактные аналоги краевых задач Римана, пространства коэффициентов систем в линейных топологических пространствах, атомарные разложения классов Харди, базисы из многочленов Фабера в весовых пространствах Лебега, задачи Римана в весовых классах Смирнова, непрерывный аналог статистической сходимости и его приложения к преобразованиям Фурье - Стилтьеса.

Цель и задачи исследования.

Целью и задачи диссертационной работы являются изучение фреймовых свойств (базисные свойства, свойство быть атомарным разложением, фреймовость) систем элементов и приобретение новых методов суммирования и сходимостей в различных линейных топологических пространствах.

Методы исследования.

При получении основных результатов применяются методы функционального анализа, теории функций, методы

краевых задач теории аналитических функций, теории рядов по многочленам Фабера, теории сингулярных интегральных операторов, теорий базисов и фреймов, теории множеств с мерой.

Основные положения, выносимые на защиту. В работе получены следующие основные результаты.

-абстрактное обобщение двойных базисов, абстрактный аналог известной теоремы "$\frac{1}{4}$-Кадец";

-векторные классы Харди $H_p(X)$ и их основные свойства;

-понятие пространство коэффициентов систем элементов в линейных топологических пространствах: секвенциальный и общий случаи и его свойства;

- базисность половин вырождающихся систем экспонент в классах Харди, когда вырождения удовлетворяют условию Макенхоупта;

-атомарные разложения по вырождающимися системами экспонент классов Харди, когда вырождения не удовлетворяют условию Макенхоупта;

-вопросы разрешимости краевых задач Римана в весовых классах Смирнова;

-базисность систем из многочленов Фабера в весовых классах Смирнова, когда вес удовлетворяют условию Макенхоупта;

-базисность двойной системы из многочленов Фабера в лебеговых пространствах на ляпуновых или радоновых кривых;

-непрерывный аналог понятия статистической сходимости;

- понятие μ-strong Чезаро суммирования, его свойства и применения к преобразованиям Фурье.

Научная новизна исследования. В работе получены следующие основные результаты.

-дано абстрактное обобщение базисности двойных систем экспонент и получен абстрактный вариант известной теоремы "$\frac{1}{4}$-Кадец";

-исходя из абстрактного пространства $L_p(X)$ определены векторные классы Харди $H_p(X)$ и изучены их основные свойства;

-понятие пространство коэффициентов систем элементов определено в линейных топологических пространствах в двух случаях - секвенциальный и общий случаи, изучены его свойства;

- доказаны базисности половин вырождающихся систем экспонент в классах Харди, когда вырождения удовлетворяют условию Макенхоупта;

-изучены атомарные разложения по вырождающимися системами экспонент классов Харди, когда вырождения не удовлетворяют условию Макенхоупта;

-изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в весовых классах Смирнова;

-доказаны базисности систем из многочленов Фабера в весовых классах Смирнова, когда вес удовлетворяют условию Макенхоупта;

-найдены условия базисности двойной системы из многочленов Фабера в лебеговых пространствах на ляпуновых или радоновых кривых;

- найден непрерывный аналог понятия статистической сходимости и основные положения этой теории перенесены на этот случай;

- введено понятие μ-strong Чезаро суммирования, изучены его свойства и даны применения к преобразованиям Фурье.

-устанавливаются связи между атомарными разложениями двойных и одинарных систем связанные между

собою определенными соотношениями в лебеговых пространствах.

Теоретическая и практическая ценность исследования.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории аппроксимации, при обосновании метода Фурье для решения уравнений в частных производных, в теорий базисов и фреймов, в теории суммирования, в теории статистической сходимости, в теории краевых задач Римана и др. .

Апробация и применение.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Общеинститутском семинаре Института Математики и Механики (руководитель: член-корр. НАНА, профессор Мисир Марданов), на научном семинаре отдела «Негармонический анализ» (руководитель: член-корр. НАНА, профессор Билал Билалов) и на международных конференциях под названием: International conference Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications (2012, Мерсин), International conference on “Actual Problems of Mathematics and Informatics” (2013, г. Баку), IV Annual conference of the “Georgian Mathematical Union” (2014, Tbilisi and Batumi), Международная математическая конференция по “Теории функций” (2017, г. Уфа), “Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXIX” (2018, г. Москва), “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, Международная научная конференция (2018, г. Стерлитамак), Международная научная конференция “Современные проблемы математики и механики” (2019, г. Москва), 3-rd International conference on “Mathematical Advances and Applications” (2020, Istanbul), 4-th International conference on “Mathematical Advances and Application” (2021, Istanbul) и др.

Личный вклад автора.

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются личным вкладом автора.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 30 работах.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа.

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий объем диссертационной работы –369139 знаков (титульная страница – 372 знаков, содержание – 3432 знаков, введение – 90000 знаков, первая глава – 64000 знаков, вторая глава – 28000 знаков, третья глава –52000 знаков, четвертая глава–54000 знаков, пятая глава–76000 знаков, выводы –1335). Список используемой литературы состоит из 186 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов и списка литературы.

Во введение обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводятся краткая история касающихся вопросов, а также краткое содержание диссертационной работы.

В **главе I** рассматривается прямое разложение банахово пространства по подпространствам и его двойной базис, порожденный этим разложением. Метод краевых задач обобщается на рассматриваемый абстрактный случай и используя этот метод получается абстрактный аналог классической теоремы «$\frac{1}{4}$-Кадеца» о базисности Рисса возмущенной системы экспонент. Метод краевых задач применяется к базисности возмущенной двойной системы. В конце главы рассматриваются некоторые векторнозначные

лебеговы классы и классы Харди. Устанавливаются некоторые свойства векторнозначных функций из этих классов и векторнозначные аналоги формул Сохоцкого-Племеля для векторнозначных интегралов типа Коши. Рассматриваются векторнозначные краевые задачи Римана и изучаются их разрешимость. Затем этот подход применяется к абстрактным вопросам базисности абстрактной системы экспонент.

В параграфе **1.1** приводятся необходимые понятия и факты. Приведем некоторые стандартные обозначения. B-пространство − банахово пространство; H-пространство– гильбертово пространство; $\|\cdot\|_X$ − норма в X (если нет недоразумений, то иногда индекс будем опускать); I − единичный оператор.

Базисность двойной системы понимаем в следующем смысле.

Определение 1. *Двойную систему* $\{x_n^+; x_n^-\}_{n\in N}$ *назовем базисом в* X*, если* $\forall x \in X$, $\exists!\{\lambda_n^{\pm}\}_{n\in N} \subset C$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+ x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^- x_n^- .$$

Также будем пользоваться следующим понятием.

Система $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *называется равномерно-минимальной в* X*, если*

$$\exists \delta > 0 : \inf_{\forall u \in L[\{x_n\}_{n\neq k}]} \|x_k - u\|_X \geq \delta \|x_k\|_X , \forall k \in N . \qquad (5)$$

В **параграфе 1.2** предлагается один абстрактный метод установления базисности Рисса из двойных систем в гильбертовых пространствах. Рассматривается конкретный случай $\{e^{i(nt+\alpha(t)signn)}\}_{n\in Z}$, где $\alpha \in L_\infty$ − некоторая измеримая функция. В частности при $\alpha(t) \equiv \alpha t$ получается ранее известный окончательный результат относительно базисности Рисса системы $\{e^{i(n+\alpha signn)t}\}_{n\in Z}$, в L_2. Приведем некоторые из них.

Пусть B-пространство X имеет прямое разложение

$$X = X^{+} \dotplus X^{-}, \tag{6}$$

по подпространствам X^{+} и X^{-}. Пусть $T^{\pm} \in L(X)$ – некоторые автоморфизмы. Известно, что $\exists m > 0$:

$$\left\|x^{+}\right\| + \left\|x^{-}\right\| \le m\|x\|, \forall x \in X. \tag{7}$$

$\inf\{m:$ *удовлетворяюших* $(7)\}$ *обозначим через* $\theta(X^{+}; X^{-})$ *и назовем прямой нормой разложения (6).*

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* B*-пространство* X *имеет разложение* $X = X^{+} \dotplus X^{-}$, $\{x_n^{\pm}\}_{n\in N} \subset X^{\pm}$ *образует базис в* $X^{\pm}$ *и* $\theta(X^{+}; X^{-})$ *есть прямая норма разложения (6). Если* $\eta < \dfrac{1}{\theta(X^{+}; X^{-})}$, *то система* $\{T^{+}x_n^{+}; T^{-}x_n^{-}\}_{n\in N}$ *образует базис в* X, *где* $\eta = \max\{\|\Delta T^{+}\|; \|\Delta T^{-}\|\}$, $\Delta T^{\pm} = I - T^{\pm}$.

Конкретные случаи. Возьмем в качестве X пространство L_p, $1 < p < +\infty$, $X^{\pm} = H_p^{\pm}$, где $H_p^{\pm}$ – обычные классы Харди аналитических внутри и вне (исчезающих на бесконечности) функций, соответственно. Пусть $T^{\pm} f = A^{\pm}(t) \cdot f(t)$ – оператор умножения в L_p и $\theta(H_p^{+}; H_p^{-})$ прямая норма разложения $L_p = H_p^{+} \dotplus H_p^{-}$. Из Теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\max\left(\left\|1 - A^{+}(t)\right\|_{\infty}; \left\|1 - A^{-}(t)\right\|_{\infty}\right) < \frac{1}{\theta(H_p^{+}; H_p^{-})}.$$

Тогда, система

$$\{A^{+}(t)e^{\mathrm{int}}; A^{-}(t)e^{-ikt}\}_{n\ge 0; k\ge 1}, \tag{8}$$

образует изоморфный к $\left\{e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\in Z}$ *базис в* L_p, *где* $\|\cdot\|_\infty$ *– обычная норма в* $L_\infty(-\pi,\pi)$.

В частности, при $p=2$ ясно, что $\theta\left(H_2^+;H_2^-\right)=\sqrt{2}$ и в результате получаем

Следствие 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$\max\left(\left\|1-A^+(t)\right\|_\infty;\left\|1-A^-(t)\right\|_\infty\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Тогда система (8) образует базис Рисса в $L_2(-\pi,\pi)$.

Рассмотрим частный случай $A(t)\equiv e^{i\alpha(t)}$, $B(t)\equiv e^{-i\alpha(t)}$. В этом случае удается получить точный результат.

Утверждение 2. *Пусть* $\|\alpha\|_\infty<\frac{\pi}{4}$. *Тогда система экспонент* $\left\{e^{i(nt+\alpha(t)signn)}\right\}_{n\in Z}$ *образует базис Рисса в* L_2.

В случае $\alpha(t)=\alpha\ t$, где $\alpha\in R$ – действительный параметр, получаем ранее известный окончательный результат относительно базисности системы $\left\{e^{i(n+\alpha signn)t}\right\}_{n\in Z}$ в L_2.

В **параграфе 1.3** рассматриваются векторнозначные классы Лебега $L_p(X)$ и Харди $H_p(X)$, где X банахово пространство. Они являются обобщениями аналогичных пространств Лебега и Харди скалярного случая. Для класса Харди предлагаются два определения, доказываются их эквивалентность. Рассматриваются краевые задачи Римана в разных постановках. При определенных условиях доказываются их корректная разрешимость. Также рассматриваются вопросы базисов из подпространств в $L_p(X)$.

Пусть X некоторое B-пространство. Система из подпространств $\left\{X_n^+;X_k^-\right\}_{n,k\in N}\subset X$ называется базисом в X, если для $\forall x\in X$, $\exists!\left\{x_n^\pm\right\}_{n\in N}$, $x_n^\pm\in X_n^\pm$:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{+}+\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{-}.$$

Пусть X-сепарабельное B-пространство. Обозначим через $L_p(X)$ класс функций $\vartheta:[0,2\pi]\to X$, измеримых (сильно либо слабо, безразлично в силу сепарабельности X) и таких, что

$$\|\vartheta\|_p^p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\vartheta(t)\|_X^p\,dt<+\infty,\ 1\le p<+\infty,$$

где $\|\cdot\|_X-$норма в X. При таком определении нормы, $L_p(X)$ превращается в сепарабельное B-пространство. Функции из $L_p(X)$, совпадающие почти всюду (по мере Лебега) отождествляются. Обозначим через $L_p^{(k)}(X)$ подпространство пространства $L_p(X)$, порожденные функциями вида $e^{ikt}a,\ a\in X$, где $k\in Z-$целое число. Возьмем $\forall f\in L_p(X)$. Пусть

$$f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt\in X,\ \forall k\in Z.$$

Рассмотрим $P_k:L_p(X)\to L_p^{(k)}(X),\ k\in Z:\ P_kf=e^{ikt}f_k$. Нетрудно заметить, что имеет место

$$P_iP_j=\delta_{ij}P_j,\ \forall i,j\in Z,$$

где $\delta_{ij}-$символ Кронекера. Справедлива

Теорема 3. *Семейство проекторов* $\{P_n\}_{n\in Z}$ *образует сильный базис в* $L_p(X)$, *т.е.*

$$I=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n\Leftrightarrow L_p(X)=\dot{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}}+L_p^{(n)}(X).$$

Положим

$$L_p^{+}(X)\equiv\{f\in L_p(X):P_nf=0,\ \forall n<0\}.$$

$L_p^+(X)$ является подпространством пространства $L_p(X)$.
Обозначим через $P_r(\cdot)$ – ядро Пуассона для круга

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть X сепарабельное B-пространство с сепарабельным сопряженным X^* и $f\in L_p(X)$, $1<p<+\infty$. Тогда относительно функции $F(z)$, определенной выражением интеграла типа Коши*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-z},$$

имеют место формулы Сохоцкого-Племеля

$$F^{\pm}(\tau)=\pm\frac{1}{2}f(\tau)+[Sf](\tau),\ \text{п.в. } \tau\in\partial\omega.$$

Более того, если $f\in L_p^+(X)$, то имеют место

$$\lim_{r\to 1-0}\|[T_r(f)](t)-f(t)\|_p=0,\ \|T_r(f)\|_p\le M\|f\|_p,$$

где либо $T_r=P_r$ – оператор Пуассона

$$[P_r(f)](t)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(t-s)f(s)ds,$$

либо $T_r=\mathscr{K}_r$ – оператор Коши

$$[\mathscr{K}_r(f)](t)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-re^{it}},$$

$r:0\le r<1$ и M – независящая от f постоянная.

Аналогичным образом определяем класс $L_p^-(X)$:

$$L_p^-(X)\equiv\{f\in L_p(X):P_nf=0,\ \forall n\ge 0\}.$$

Через $H_p^+(X)$ $\left({}_{-1}H_p^-(X)\right)$ будем обозначать пространство Харди, определенное следующим соотношением

$$H_p^+(X)=\left\{F:\exists f\in L_p^+(X)\Rightarrow F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, z\in\omega\right\}$$

$$({}_{-1}H_p^-(X)=\left\{F:\exists f\in L_p^-(X)\Rightarrow F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, z\in C\setminus\omega\right\}).$$

Положим

$$H_p^{+,0}(X)\equiv\{F\in H_p^+(X):F(0)=0\},$$

и пусть $L_p^{+,0}(X)\equiv H_p^{+,0}(X)/_{\partial\omega}$. Обозначим

$$\hat{L}_p^{+,0}(X)\equiv\{g:\hat{g}(t)=g(-t)\in L_p^{+,0}(X)\}.$$

Обозначим через $\widetilde{H}_p^+(X)$ класс аналитических в ω X-значных функций f, для которых

$$\|f\|_{\widetilde{H}_p}^p\equiv\sup_{0<r<1}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|f\left(re^{it}\right)\right\|^p dt<+\infty.$$

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $X-$сепарабельное B-пространство с сепарабельным сопряженным пространством X^*. Тогда выше определенные пространства $H_p^+(X)$ и $\widetilde{H}_p^+(X)$ изометрически изоморфны.*

В этой главе рассматриваются краевые задачи Римана в разных постановках. Рассмотрим одну из них.

Задача сопряжения с операторным коэффициентом. Через $\mathscr{S}_p$ будем обозначать банахово пространство ограниченных операторов, действующих из $L_p(X)$ в $L_p(X)$, т.е. $\mathscr{S}_p\equiv L(L_p(X);L_p(X))$. Пусть $A,B\in\mathscr{S}_p(X)-$некоторые операторы. Возьмем $g\in L_p(X)$ и рассмотрим уравнение

$$AF^+(\tau)+BF^-(\tau)=g(\tau),\ \text{п.в.}\ \tau\in\partial\omega, \qquad (9)$$

где $F^{\pm} \in L_p^{\pm}(X)$, т.е. ищется пара $(F^{+};F^{-}) \in L_p^{+}(X) \times L_p^{-}(X)$, для которых имеет место соотношение (9). Справедливо прямое разложение

$$L_p(X) = L_p^{+}(X) \dot{+} L_p^{-}(X), \ 1 < p < +\infty \ . \tag{10}$$

Положим $\theta_X^{+,-} = \theta_X\left(L_p^{+};L_p^{-}\right)$. Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть B*-пространство* X *удовлетворяет условиям Теоремы 5, операторы* A *и* B *удовлетворяют неравенству* $\eta(A;B) < \left(\theta_X^{+,-}\right)^{-1}$, где $\eta(A;B) = \max\left\{\|I-A\|;\|I-B\|\right\}$. *Тогда уравнение (9) имеет и причем единственное решение при* $\forall g \in L_p(X)$, $1 < p < +\infty$. *Более того,* $\exists M > 0$:

$$\left\|F_g^{\pm}\right\|_p \le M\|g\|_p, \ \forall g \in L_p(X),$$

где $F_g^{\pm}$ *– соответствующие к* g *решения уравнения (9).*

Также справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть имеют место все условия Теоремы 6. Тогда система из подпространств* $\left\{AL_p^{(n)}(X);BL_p^{(-k)}(X)\right\}_{n\ge 0,\ k\ge 1}$ *образует базис в* $L_p(X)$.

Рассмотрим случай, когда X является H-пространством со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)$. В этом случае $L_2(X)$ тоже является H-пространством со скалярным произведением

$$(f;g)_{L_2(X)} = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t);g(t))dt, \ \forall f,g \in L_2(X). \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что подпространства $L_2^{+}(X)$ и $L_2^{-}(X)$ являются ортогональными, в результате чего $\theta_X^{+,-} = \sqrt{2}$, и значить справедливо

Следствие 3. *Пусть* X *сепарабельное* H*-пространство и операторы* A, B *удовлетворяют условию* $\eta_\infty(A;B) = \max\left\{\|I-A\|_\infty;\|I-B\|_\infty\right\} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда система $\left\{AL_p^{(n)}(X); BL_p^{(-k)}(X)\right\}_{n\geq 0,\ k\geq 1}$, *образует базис в* $L_2(X)$.

Вторая глава посвящена в целом понятию пространства коэффициентов.

В 2.1 приведены необходимые понятия и факты, используемые в этой главе. Приведем некоторые необходимые нам понятия. Под линейным топологическим пространством $(X;\tau)$ (сокращенно ЛТП) будем понимать линейное пространство X над полем F ($F \equiv R$ или $F \equiv \mathbb{C}$) с топологией τ, в котором линейные операции непрерывны и каждая точка в нем является замкнутым множеством.

Пусть $(X;\tau)$ некоторое ЛТП над полем K. Линейную оболочку множества $M \subset X$ обозначим через $L[M]$, а его замыкание по топологии τ через $\overline{M}$.

Будем пользоваться следующим понятием.

Определение 2. *Систему* $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ *назовем невырожденной, если* $x_n \neq 0$, $\forall n \in N$.

Параграф **2.2** посвящен изучению топологических свойств пространства коэффициентов, порожденного невырожденной системы в хаусдорфовых линейных топологических пространствах. Доказано, что произвольная невырожденная система в секвенциально полных линейных топологических пространствах порождает подобное полное линейное топологическое пространство коэффициентов с каноническим базисом. На языке коэффициентного оператора приведен критерий базисности систем в подобных пространствах.

Пусть $(X;\tau)$ секвенциально полное линейное топологическое пространство и $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ некоторая невырожденная система. Положим

$$\mathscr{K}_{\overline{x}} \equiv \left\{ \{\lambda_n\}_{n\in N} \subset F : \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ сходится в } X \right\}.$$

Очевидно, что относительно обычных операций покомпонентного сложения и умножения на скаляр, $\mathscr{K}_{\overline{x}}$ превращается в линейное пространство. Каждая окрестность нуля O_ε в X порождает соответствующую окрестность нуля $O_\varepsilon^{\mathscr{K}}$ в $\mathscr{K}_{\overline{x}}$:

$$O_\varepsilon^{\mathscr{K}} \equiv \left\{ \overline{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N} \in \mathscr{K}_{\overline{x}} : \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n \in O_\varepsilon, \forall m \in N \right\}.$$

Множество окрестностей $O_\varepsilon^{\mathscr{K}}$ нуля в $\mathscr{K}_{\overline{x}}$ порождает соответствующую топологию $\tau_{\mathscr{K}}$ в $\mathscr{K}_{\overline{x}}$.

Доказана следующая

Теорема 8. *Пространство $\mathscr{K}_{\overline{x}}$ порожденной в нем топологией $\tau_{\mathscr{K}}$ обладает свойствами: 1) оно секвенциально полное; 2) каждое одноточечное множество в нем замкнуто; 3) линейные операции секвенциально непрерывны в нем.*

Будем предполагать, что X является $F-$пространством (т.е. пространством Фреше) и рассмотрим оператор $T : \mathscr{K}_{\overline{x}} \to X$, определенный выражением

$$T\overline{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \overline{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n\in N} \in \mathscr{K}_{\overline{x}}.$$

Оператор $T : \mathscr{K}_{\overline{x}} \to X$ будем называть коэффициентным оператором системы $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$.

На языке пространства коэффициентов справедлив следующий критерий базисности.

Теорема 9. *Пусть* $(X;\tau)$ $F-$*пространство,* $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ *невырожденная система,* $\left(\mathscr{K}_{\overline{X}};\tau_{\mathscr{K}_{\overline{X}}}\right)$ *соответствующее ей пространство коэффициентов и* $T:\mathscr{K}_{\overline{X}}\to X$ *соответствующий коэффициентный оператор. Система* $\{x_n\}_{n\in N}$ *образует базис в* X *только тогда, когда выполнены следующие условия: 1) она полна в* X *; 2) она* ω*-линейно независима; 3)* $ImT=\overline{ImT}$.

В **2.3** понятие пространство коэффициентов систем определяется в линейных топологических пространствах в общем случае и аналогичные результаты получаются в этих пространствах.

Глава III посвящена атомарным разложениям пространств Лебега и классов Харди по вырождающимися систем из экспонент. В этой главе рассматриваются части системы экспонент с вырождающимися коэффициентами. Изучаются вопросы атомарного разложения лебеговых пространств и классов Харди по этим системам. Вычисляются индексы дефектов этих систем.

В 3.1 приводятся необходимые понятия и факты, которые пользуются при получении результатов этой главы.

Определение 3. *Последовательность* $\{f_k\}_{k\in N}\subset X$ *в* H*-пространстве* X *со скалярным произведением* $(\cdot\,;\cdot)$, *называется фреймом (или образует* H*-фрейм) если* $\exists A;B>0$:

$$A\|f\|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}|(f;f_k)|^2\le B\|f\|^2,\forall f\in X,$$

где $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot;\cdot)}$.

Непосредственным обобщением понятия фрейма в гильбертовом пространстве на банаховый случай является атомарное разложение. Определим его.

Определение 4. *Пусть* X B*-пространство и* $\mathscr{K}$ B*-пространство последовательностей из скаляров. Пусть*

$$\{f_k\}_{k\in N} \subset X,\ \{g_k\}_{k\in N} \subset X^*.$$

Тогда $\left(\{g_k\}_{k\in N}, \{f_k\}_{k\in N}\right)$ *является атомарным разложением* X *относительно* $\mathscr{K}$*, если выполнены :*

(i) $\{g_k(f)\}_{k\in N} \in \mathscr{K},\ \forall f \in X$ *;*

(ii) $\exists A, B > 0 : A\|f\|_X \le \left\|\{g_k(f)\}_{k\in N}\right\|_{\mathscr{K}} \le B\|f\|_X,\ \forall f \in X$ *;*

(iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(f) f_k,\ \forall f \in X$ *.*

Обратим внимание на то, что в гильбертовом случае в качестве пространства $\mathscr{K}$ участвует l_2 и свойства (*i*) и (*iii*) в Определение 4 являются следствиями свойства (*ii*).

В **параграфе 3.2** приводятся необходимые обозначения, понятия и некоторые факты из теории базисов и фреймов, используемые в этой главе. Рассматриваются части системы экспонент с вырождающимися коэффициентами, соответствующие положительным значением индекса. Доказывается, что если коэффициенты удовлетворяют условию Макенхоупта, то эти части образуют базисы в соответствующих классах Харди H_p^+ аналитических функций. Изучается фреймовое свойство (фреймовость, атомарное разложение) части, соответствующей положительным значениям индекса когда коэффициент, вообще говоря, не удовлетворяет условию Макенхоупта.

Сужения классов H_p^+ и ${}_mH_p^-$ на единичную окружность $\partial\omega$ обозначим через L_p^+ и ${}_mL_p^-$, соответственно.

Базисность. Рассмотрим систему $E_+^{(k)}(\rho) \equiv \left\{\rho(t)e^{\mathrm{int}}\right\}_{n\ge k}$. Будем предполагать, что вырождающийся коэффициент ρ имеет степенной вид

$$\rho(t) = \left(e^{it} - 1\right)^{\alpha_0} \prod_{k=1}^{r} \left(e^{it} - e^{it_k}\right)^{\alpha_k},$$

где $\{t_k\}_1^r \subset (-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ – различные точки и $\{\alpha_k\}_0^r \subset R$. Везде будем считать, что весовая функция $\rho(\cdot)$ периодически (с периодом 2π) продолжена на всю вещественную ось R.

Через $\mathscr{A}_p$ будем обозначать класс весов $\nu(t)$, удовлетворяющих условию Макенхоупта

$$\sup_{I\subset[-\pi,\pi]}\left(\frac{1}{|I|}\int_I \nu(t)dt\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I [\nu(t)]^{-\frac{1}{p-1}}dt\right)^{p-1} < +\infty,$$

где sup берется по всем интервалам $I \subset R$ и $|I|$ есть лебегово мера I. Отметим, что $|\rho|^{\frac{1}{p}} \in \mathscr{A}_p$ тогда и только тогда, когда имеет место

$$-\frac{1}{p} < \alpha_k < 1-\frac{1}{p},\ k=\overline{0,r}. \qquad (12)$$

Справедлива

Теорема 10. *Пусть выполнены неравенства (12). Тогда система $E_+^{(0)}(\rho)$ образует базис в L_p^+, $1<p<+\infty$.*

Дефектный случай. Будем рассматривать случай, когда $|\rho|^{\frac{1}{p}} \notin \mathscr{A}_p$. Пусть имеет место

$$1-\frac{1}{p} \le \alpha_0 < 2-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{p} < \alpha_k < 1-\frac{1}{p},\ k=\overline{1,r}.$$

Справедлива следующая

Теорема 11. *Пусть выполнены неравенства*

$$m-\frac{1}{p} \le \alpha_0 < m+\frac{1}{q},\ -\frac{1}{p} < \alpha_k < \frac{1}{q},\ k=\overline{1,r}.$$

Тогда система $E_+^{(0)}(\rho)$ имеет дефект, равный m в L_p^+. При этом система $E_+^{(k)}(\rho)$ полна и минимальна в L_p^+, но не является равномерно минимальной в нем, и следовательно, не образует базис.

Также доказана следующая

Теорема 12. *Система* $E_{+}^{(0)}(\rho)$ *является атомарным разложением в* L_p^{+}, $1 < p < +\infty$, *только тогда, когда вырождающийся коэффициент* ρ *удовлетворяет условию Макенхоупта (12).*

В **3.3** рассматривается другая часть системы из экспонент с вырождающимся коэффициентом. Изучаются фреймовые свойства (такие как полнота, минимальность, базисность, атомарная разложимость) этой системы в классах Харди ${}_{-1}H_p^{-}$ в случае, когда коэффициент может не удовлетворять условию Макенхоупта.

Базисность. Пусть $E_{\pm}^{(k)}(\rho) \equiv \{\rho(t)e^{\pm int}\}_{n \geq k}$. Совершенно аналогично предыдущему параграфу доказывается следующая

Теорема 13. *Пусть выполнены неравенства*

$$-\frac{1}{p} < \alpha_k < 1 - \frac{1}{p}, k = \overline{0, r}.$$

Если $\sum_{k=0}^{r} \alpha_k < 1$, *то система* $E_{-}^{(1)}(\rho)$ *образует базис в* ${}_{-1}L_p^{-}$, $1 < p < +\infty$.

Справедлива также следующая

Теорема 14. *Пусть имеют место неравенства*

$$\alpha_0 > -\frac{1}{p}, -\frac{1}{p} < \alpha_k < 1 - \frac{1}{p}, \ k = \overline{1, r}.$$

Тогда система $E_{-}^{(1)}(\rho)$ *полна и минимальна в* $\overline{span E_{-}^{(1)}(\rho)}$. *Кроме того, эта система является атомарным разложением* $\overline{span\left(E_{-}^{(1)}(\rho)\right)}$ *относительно пространства коэффициентов* $\mathscr{K}_{\rho}^{-}$ *только тогда, когда* $-\frac{1}{p} < \alpha_0 < 1 - \frac{1}{p}$.

Глава IV посвящена изучению базисов систем из обобщенных полиномов Фабера в весовых пространствах

Смирнова и Лебега. **В 4.1** приводятся некоторые необходимые сведения касающихся обобщенных полиномов Фабера.

Приведем определения обобщенных многочленов p-Фабера $F_{p,n}^{+}$ и $F_{p,n}^{-}$. Пусть D ограниченная область с границей Γ и односвязным дополнением $D^{-}=C\setminus\overline{D}$ ($\overline{D}$ – замыкание D). Обозначим через $w=\varphi(z)$ функцию, конформно и однолистно отображающая область D^{-} на $C\setminus\overline{O_1(0)}\equiv O_1^{-}(0)$: $\varphi(\infty)=\infty$, $\varphi'(\infty)=\gamma>0$. $\varphi(z)$ имеет в окрестности точки $z=\infty$ разложение Лорана

$$\varphi(z)=\gamma z+\gamma_0+\gamma_1 z^{-1}+\dots .$$

Берем однозначную ветвь функции $\sqrt[p]{\varphi'(z)}$ так, что $\sqrt[p]{\varphi'(\infty)}>0$. Главную часть разложения Лорана функции $[\varphi(z)]^n\sqrt[p]{\varphi'(z)}$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$ обозначим через $F_{p,n}^{+}$, т.е.

$$[\varphi(z)]^n\sqrt[p]{\varphi'(z)}\equiv F_{p,n}^{+}(z)+E_{p,n}^{+}(z),\ z\in D^{-},$$

где $E_{p,n}^{+}(\infty)=0$.

Аналогичным образом определяется многочлен p-Фабера $F_{p,n}^{-}$.

Как обычно, через $L_p(\Gamma;\omega)$ обозначаем весовое лебегово пространство функций с нормой $\|\cdot\|_{p,\omega}$:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma;\omega)}=\left(\int_{\Gamma}|f(\xi)|^p\,\omega(\xi)|d\xi|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $A(\xi)\equiv|A(\xi)|e^{i\alpha(\xi)}$, $B(\xi)\equiv|B(\xi)|e^{i\beta(\xi)}$ – комплексно-значные функции, заданные на кривой Γ. Будем предполагать, что имеют место следующие основные условия.

i) $|A|^{\pm1},|B|^{\pm1}\in L_\infty(\Gamma)$;

ii) $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ *– кусочно-непрерывные на* Γ *и пусть* $\{\xi_k, k=\overline{1,r}\}\subset\Gamma$ *– точки разрывов функции* $\theta(\xi)\equiv\beta(\xi)-\alpha(\xi)$.

Относительно кривой Γ требуем выполнения следующего условия.

iii) Γ *– либо кривая Ляпунова, либо Радона (т.е. является кривой ограниченным вырашением без точек заострений). Направление по* Γ *будем считать положительным, т.е. при движении по этому направлению область* D *остается слева. Пусть* $a\in\Gamma$ *является начальной (также и конечной) точкой кривой* Γ. *Будем считать, что* $\xi\in\Gamma$ *следует за точкой* $\tau\in\Gamma$, *т.е.* $\tau\prec\xi$, *если* ξ *следует за* τ *при движении по положительному направлению по* $\Gamma\setminus a$, *где* $a\in\Gamma$ *две слипшиеся точки* $a^+=a^-$, a^+ *– начало,* a^- *– конец кривой* Γ.

Класс кривых, удовлетворяющих условию iii) обозначим через $\mathscr{LR}$.

Итак, не ограничивая общности будем считать, что $a^+\prec\xi_1\prec\ldots\prec\xi_r\prec b=a^-$. Порожденные этим порядком односторонние пределы $\lim\limits_{\substack{\xi\to\xi_0\pm0\\ \xi\in\Gamma}} g(\xi)$ функции $g(\xi)$ в точке $\xi_0\in\Gamma$ обозначим через $g(\xi_0\pm0)$, соответственно. Скачки функции $\theta(\xi)$ в точках $\xi_k, k=\overline{1,r}$, обозначим через h_k: $h_k=\theta(\xi_k+0)-\theta(\xi_k-0)$, $k=\overline{1,r}$. Относительно скачки будем предполагать, что выполнено условие:

iv) $\left\{h_k-\dfrac{2\pi}{p}:k=\overline{0,r}\right\}\bigcap Z=\varnothing$, *где* $h_0=\theta(a+0)-\theta(a-0)$, $p\in(1,+\infty)$ *– некоторое число.*

Пусть $D^+\subset C$ – ограниченная область с границей $\Gamma=\partial D^+$, относительно которой имеет место условие i). Через

$E_p(D^+), 1 < p < \infty$, обозначим банахово пространство Смирнова аналитических в D^+ функций с нормой $\|\cdot\|_{E_p(D^+)}$:

$$\|f\|_{E_p(D^+)} =: \|f^+\|_{L_p(\Gamma)}, \forall f \in E_p(D^+), \qquad (13)$$

где $f^+ = f/_\Gamma -$ некасательные граничные значения функции f на Γ.

Исходя из нормы (13) определяется весовой класс Смирнова. Пусть $\rho \in L_1(\Gamma) -$ некоторая весовая функция. Определим весовой класс Смирнова $E_{p,\rho}(D^+)$:

$$E_{p,\rho}(D^+) \equiv \left\{ f \in E_1(D^+) : \|f^+\|_{L_{p,\rho}(\Gamma)} < +\infty \right\},$$

и положим

$$\|f\|_{E_{p,\rho}(D^+)} = \|f^+\|_{L_{p,\rho}(\Gamma)}.$$

Аналогично определяются классы Смирнова в неограниченной области.

В 4.2 рассматривается однородная задача Римана теории аналитических функций в весовых классах Смирнова и при определенных условиях на весовую функцию, на коэффициент задачи и на границу области строится общее решение этой задачи.

Рассмотрим следующую однородную задачу Римана в весовых классах $E_{p,\rho}(D^+) \times_m E_{p,\rho}(D^-)$:

$$A(\xi)F^+(\xi) + B(\xi)F^-(\xi) = 0, \text{ п.в. } \xi \in \Gamma. \qquad (14)$$

Под решением задачи (14) понимается пара аналитических функций $(F^+; F^-) \in E_{p,\rho}(D^+) \times_m E_{p,\rho}(D^-)$, некасательные граничные значения $F^\pm(\xi)$ которых п.в. на Γ удовлетворяют равенство (14). В безвесовом случае эта задача хорошо изучена и ее теория освещена в монографии И.И.Данилюка.

Пусть $S-$длина кривой Γ и $z=z(s), 0\le s\le S$, параметрическое представление Γ относительно длины дуги s. Положим

$$\Omega(s)\equiv\theta(z(s)), 0\le s\le S,$$

и пусть $h_k=z(s_k+0)-z(s_k-0)$, $k=\overline{1,r}; h_0=\Omega(+0)-\Omega(S-0)$. Рассмотрим кусочно-голоморфные функции

$$Z_{(1)}(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ln|D(s)|\frac{dz(s)}{z(s)-z}\right\},$$

$$\tilde{Z}(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Omega(s)\frac{dz(s)}{z(s)-z}\right\}.$$

Произведение этих функций обозначим через Z_Ω

$$Z_\Omega(z)\equiv Z_{(1)}(z)\tilde{Z}(z).$$

$Z_\Omega(\cdot)$ назовем каноническим решением однородной задачи (14), соответствующий аргументу $\Omega(\cdot)$.

Справедлива

Теорема 15. *Пусть относительно комплекснозначных функций $A(\xi), B(\xi)$ и кривой Γ выполнены условия i)-iii). Предположим, что относительно скачков $\{h_k\}$ и весовой функции $\rho(\xi)$ выполнены условия*

$$\frac{h_k}{2\pi}<1,\ k=\overline{0,r};$$

$\exists p_1; p_2\in(1,+\infty)$:

$$\int_0^S \sigma^{pp_1}(s)\rho^{p_1}(z(s))ds<+\infty,\ \int_0^S \sigma^{-qp_2}(s)\rho^{-\frac{q}{p}p_2}(z(s))ds<+\infty. \tag{15}$$

Тогда общее решение однородной задачи (14) в классах $E_{p,\rho}(D^+)\times_m E_{p,\rho}(D^-)$ имеет вид

$$F(z) \equiv Z_\Omega(z) P_m(z), \qquad (16)$$

где $Z_\Omega(\cdot)$ *канонические решение, а* $P_m(z)$ *произвольный полином степени* $k \le m$.

Рассмотрим некоторые частные случаи относительно весовой функции ρ.

Пример 1. Пусть вес $\rho(\cdot)$ имеет следующий степенной вид

$$\rho(z(s)) = \prod_{k=1}^{m} |s - t_k|^{\alpha_k} \ , \qquad (17)$$

где $\{t_k\}_1^m \subset (0, S)$ – различные точки, $\{\alpha_k\}_1^m \subset R$ – некоторые числа. Объединение множеств $\{s_k\}_0^r$ и $\{t_k\}_1^m$ обозначим через $\{\tau_k\}_1^l : \{\tau_k\}_1^l \equiv \{s_k\}_0^r \cup \{t_k\}_1^m$. Пусть $\chi_A(\cdot)$ – характеристическая функция множества A. Одноточечные множества $\{\tau_k\}, k = \overline{1,l}$ обозначим через $T_k : T_k \equiv \{\tau_k\}, k = \overline{1,l}$. Положим

$$\beta_k = -\frac{p}{2\pi} \sum_{i=1}^{r} h_i \chi_{T_k}(s_i) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{T_k}(t_i), \quad k = \overline{1,l} \ . \qquad (18)$$

Предположим, что выполнены неравенства

$$-1 < \beta_k < \frac{p}{q}, \ k = \overline{1,l} \ . \qquad (19)$$

Нетрудно показать, что при выполнении неравенств (19) имеют место соотношения (15) и в результате справедлива Теорема 15.

В 4.3 рассматривается неоднородная задача с правой частью из весового лебегово пространства и изучается ее разрешимость в весовых классах Смирнова при тех же предположениях.

Степенной вес. Рассмотрим неоднородную задачу Римана

$$F^{+}\left(z(s)\right)-D(s)F^{-}\left(z(s)\right)=g\left(z(s)\right), s\in(0,S), \quad (20)$$

где $g\in L_{p,\rho}(\Gamma)-$ заданная функция. Под решением задачи (20) понимается пара функций

$$\left(F^{+}(z);F^{-}(z)\right)\in E_{p,\rho}\left(D^{+}\right)\times_{m} E_{p,\rho}\left(D^{-}\right),$$

граничные значения $F^{\pm}$ на Γ которых п.в. удовлетворяют соотношению (20).

Справедлива следующая

Теорема 16. *Пусть комплекснозначные функции* $A(\xi), B(\xi)$ *и кривая* Γ *удовлетворяют условиям i)-iii). Возьмем вес* ρ *вида (17), и определим числа* $\{\beta_k\}_1^l$ *по выражениям (18). Пусть выполнены неравенства (19) и*

$$\alpha_k<\frac{q}{p}, k=\overline{1,m}\ .$$

Тогда общее решение задачи (20) в классах $E_{p,\rho}\left(D^{+}\right)$ $\times_{-1} E_{p,\rho}\left(D^{-}\right)$ *имеет вид*

$$F(z)=F_0(z)+F_1(z),$$

где $F_0(z)-$ *общее решение соответствующей однородной задачи,* $F_1(z)$ *выражается формулой*

$$F_1(z)\equiv\frac{Z_{\Omega}(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\xi)d\xi}{Z^{+}(\xi)(\xi-z)},$$

в которой $Z_{\Omega}(z)-$ *каноническое решение, а* $m\geq 0-$ *целое число.*

Общий вес. Рассматривается неоднородная задача Римана теории аналитических функций с кусочно-гельдеровым коэффициентом в весовых классах Смирнова с общим весом. Найдены достаточные условия на коэффициент задачи и на весовую функцию, для того чтобы рассмотренный интеграл типа Коши являлся частным решением этой задачи.

В 4.4 полученные результаты применяются к установлению базисности двойных систем из обобщенных

многочленов Фабера в весовых пространствах Лебега. В этом параграфе устанавливается базисность обобщенных многочленов Фабера в весовых пространствах Смирнова, когда вес и граничные значения конформно отображающей функции принадлежат определенным классам Макенхоупта.

Пусть $\rho:\Gamma\to R_+$ – некоторая весовая функция и

$$\varphi: D^- \to O_1^-(0): \varphi(\infty)=\infty,\ \varphi'(\infty)=\gamma>0,$$

и

$$\psi: D^+ \to O_1^-(0): \psi(0)=\infty, \lim_{z\to 0} z\psi(z)=\alpha>0,$$

конформные отображения областей $D^- = ext\,\Gamma$ и $D^+ = \operatorname{int}\Gamma$ на внешность $O_1^-(0)$ единичного круга. Обозначим через $z=\varphi_{-1}(w)$ ($\psi_{-1}(w)$) обратную к $w=\varphi(z)$ ($w=\psi(z)$) функцию. Положим

$$\rho_+(w)=\rho[\varphi_{-1}(w)];\ \rho_-(w)=\rho[\psi_{-1}(w)],\ w\in\partial\omega. \quad (21)$$

Доказана следующая

Теорема 17. *Пусть Γ регулярная кривая и $0\in\operatorname{int}\Gamma$. Если $\rho_\pm(\cdot)\in A_p(\partial\omega)$, $\rho(\cdot)\in A_p(\Gamma)$, $1<p<+\infty$, то системы из обобщенных многочленов p-Фабера $\{F_{p,n}^+\}_{n\in Z_+}$ и $\{F_{p,n}^-\}_{n\in N}$ образуют базисы в весовых пространствах Смирнова $E_{p,\rho}(D^+)$ и ${}_{-1}E_{p,\rho}(D^-)$, соответственно.*

Рассмотрим двойную систему из многочленов p-Фабера

$$\{A(\xi)F_{p,n}^+(\xi); B(\xi)F_{p,k}^-(\xi)\}_{n\geq 0,\,k\geq 1}, \quad (22)$$

с комплекснозначными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$.

Также доказана

Теорема 18. *Пусть кривая Γ принадлежит классу $\mathscr{LR}$, $0\in\operatorname{int}\Gamma$ и функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ удовлетворяют условиям i)-iii) и $\rho:\Gamma\to R_+$ – весовая функция. Пусть весовые функции $\rho_\pm(\cdot)$ на $\partial\omega$ определены выражениями (21). Если относительно весов $\rho(\cdot)$ и $\rho_\pm(\cdot)$ выполнены условия (15) и*

$$\rho_{\pm}(\cdot) \in A_p(\partial\omega);\ \rho(\cdot) \in A_p(\Gamma),\ 1 < p < +\infty,$$

то двойная система из обобщенных многочленов p *-Фабера (22) образует базис в* $L_{p;\rho}(\Gamma)$, $1 < p < +\infty$.

Положим

$$F_{p,n}(\xi) = \begin{cases} F^{+}_{p,n}(\xi), n \in Z_{+}, \\ \\ F^{-}_{p,n}(\xi),\ -n \in N, \end{cases}$$

и рассмотрим систему

$$\left\{ e^{i\alpha \arg \xi\, sign n}\, F_{p,n}(\xi) \right\}_{n \in Z}, \qquad (23)$$

где $\alpha \in R -$ действительный параметр. Из Теоремы 18 непосредственно получаем

Следствие 4. *Пусть кривая* Γ *принадлежит классу* $\mathscr{SR}$; $0 \in \operatorname{int} \Gamma$ *и весовые функции* $\rho(\cdot); \rho_{\pm}(\cdot)$ *удовлетворяют всем условиям Теоремы 18. Если имеет место неравенство* $-\dfrac{1}{2q} < \alpha < \dfrac{1}{2p}$, *то система (23) образует базис в* $L_{p;\rho}(\Gamma)$.

V Глава посвящена некоторым смежным вопросам теории статистической сходимости и аппроксимации в лебеговых пространствах функций.

В **параграфе 5.1** рассматривается измеримое пространство с мерой на действительной оси. Вводится понятие μ -статистического предела измеримой функции в точке. Вводится также соответствующее понятие статистической фундаментальности в точке и доказывается их эквивалентность. Это понятие обобщает аналогичного понятия статистической сходимости последовательности.

Следует отметить, что понятие статистической сходимости было введено Харди и Литтлвудом в связи с точечной сходимости рядов Фурье, точнее в связи с гипотезой Лузина и оно было названо почти сходимостью (almost

convergence). По этому поводу можно рассмотреть напр., монографию [12].

μ-статистическая сходимость. Пусть $\mathscr{B}$ σ-алгебра борелевых подмножеств сегмента $E \equiv [a, +\infty)$ и $(\mathscr{B}; \mu)$ измеримое пространство с σ-конечной мерой $\mu : \mu(E) = +\infty$. Рассмотрим $\mathscr{B}$ измеримую функцию $f : E \to R$. Меру множества $e \in \mathscr{B}$ будем обозначать через $|e|$, т.е. $|e| = \mu(e)$. Пусть $M \in \mathscr{B}$ некоторое множество.

Определение 5. *Будем говорить, что бесконечно удаленная точка ∞ является точкой μ-статистической (μ-stat) плотности для множества M, если*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|M \cap I_x|}{I_x} = 1, \text{ где } I_x \equiv [a, x].$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число и положим

$$A_\varepsilon^f \equiv \{x \in E : |f(x) - A| \geq \varepsilon\},$$

где $A \in R$ – некоторое число.

Определение 6. *Будем говорить, что f имеет μ-st (μ-статистический) предел A на бесконечности, если*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|A_\varepsilon^f \cap I_x|}{|I_x|} = 0, \ \forall \varepsilon > 0,$$

и этот предел будем обозначать как $\mu\text{-st} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

$\mathscr{B}$ измеримые функции, имеющие $\mu\text{-st} \lim$ на бесконечности, образуют линейное пространство, и это пространство обозначим через $\mathscr{B}_{st}$. Множество всех подмножеств E, для которых бесконечность является точкой μ-*stat* плотности, обозначим через E_{st}^∞.

---

[12] А.Зигмунд. Тригонометрические ряды. Москва, т. 2, 1965

μ-статистическая фундаментальность. Определим понятие μ-статистической фундаментальности на бесконечности.

Определение 7. *Будем говорить, что функция* $f : E \to R$ *является* μ-stat *фундаментальной на бесконечности, если для* $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|X_\varepsilon \cap I_x|}{|I_x|} = 0,$$

где $X_\varepsilon \equiv \{x \in E : |f(x) - f(x_\varepsilon)| \geq \varepsilon\}$.

Примем также следующее

Определение 8. *Функции* $f; g : E \to R$ *назовем* μ-stat *эквивалентными на бесконечности, если* $E_{f,g} \in E_{st}^{\infty}$, *где* $E_{f,g} = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$, *и это обозначим через* $f \overset{st}{\sim} g$.

Справедлива

Теорема 19. *Пусть* $\mu(E) = +\infty$. *Тогда для* $\mathscr{B}$*-измеримый функции* $f : E \to R$ *следующие свойства эквивалентны:*

a) $\exists \mu\text{-}st \lim_{x\to\infty} f(x)$;

b) f μ*-stat фундаментальна на бесконечности;*

v) $\exists g : f \overset{st}{\sim} g$ *и* $\exists \lim_{x\to\infty} g(x)$.

Исходя из этого понятия определяется понятие μ-stat непрерывности в точке x_0 и устанавливается факты, связанные этим понятием.

В **5.2** вводится понятие μ-сильно Чезаро суммируемости для локально интегрируемых функций на бесконечности. Рассматривается также понятие $\mu-$statistical сходимости на бесконечно удаленной точке и устанавливаются взаимоотношения между этими понятиями. Этот подход

применяется к изучению сходимости преобразование Фурье-Стильтеса.

Пусть $(I;\mathscr{B};\mu)$ измеримое пространство, $I=[a,+\infty)$, где $\mu:\mathscr{B}\to R_+$ – σ-конечная мера на I. Через $L_p(\mu), 0<p<+\infty$, как обычно будем обозначать пространство измеримых (в смысле $(\mathcal{B};\mu)$) функций $f:I\to R$, для которых $\|f\|_p<+\infty$, где

$$\|f\|_p=\begin{cases}\int\limits_I |f(t)|^p\,d\mu(t)\,, & 0<p<1,\\ \left(\int\limits_I |f(t)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<+\infty.\end{cases}$$

Положим $I_x=[a,x],\ \forall x\ge a$. Примем следующее

Определение 9. *Пусть* $|f|^p$, $0<p<+\infty$, *локально интегрируемая на* $[a,+\infty)$ *функция. Будем говорить, что функция* f *имеет* $\mu[p]$*-сильный предел по Чезаро на бесконечности, равный числу* A, *если*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mu(I_x)}\int\limits_{I_x}|f(t)-A|^p\,d\mu=0.$$

Этот предел обозначим через

$$\mu[p]\text{-}\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

Нетрудно заметить, что эта операция взятия предела является линейной.

Следует отметить, что в дискретном случае p-Чезаро суммируемость приобретает вид

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k-\xi|^p=0,\ 0<p<+\infty.$$

Следующая теорема является μ-аналогом дискретного случая

Теорема 20. *i) Пусть функция* f $\mu[p]$*-сильно Чезаро сходится к* A *для некоторого* $p\in(0,+\infty)$, *на бесконечности.*

Тогда $\exists\ \mu\text{-}st\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\ \mu\text{-}st\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A;$ *ii) Если* $\exists\ \mu\text{-}st\lim\limits_{x\to\infty} f = A$ *и* f μ*-п.в. ограничена, то* $\exists\ \mu[p]\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *и этот предел равен* A.

В **параграфе 5.3** предлагается один способ образования фреймов. А именно, рассматриваются двойные и одинарные системы функций, связанные между собою определенными соотношениями. Эти соотношения в некоторой степени обобщают аналогичные соотношения, которые имеют место между системами экспонент, синусов и косинусов. Устанавливаются связи между атомарными разложениями двойных и одинарных систем в лебеговых пространствах.

Через $\vec{y}$ будем обозначать последовательность $\vec{y} \equiv \{y_n\}_{n\in N}$. Пусть $L_p(a,b)$ есть обычное лебегово пространство функций на (a,b) с нормой

$$\|f\|_{L_p(a,b)} \equiv \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Везде в дальнейшем будем считать, что $q-$сопряженное к p число: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Будем рассматривать одинарные системы вида

$$x_n^{\pm}(t) \equiv \varphi_n(t) \pm \psi_n(t),\ \ n\in N\ ,$$

где $\varphi_n;\psi_n:[0,a]\to C-$комплекснозначные функции. С помощью функций φ_n и ψ_n будем определять новую систему на сегменте $[-a,a]$. Затем будем устанавливать связи между атомарными разложениями и фреймовостью этих систем.

Итак, образуем новую систему

$$\Phi_n(t) \equiv \begin{cases} \varphi_n(t), t\in[0,a], \\ \psi_n(-t), t\in[-a,0), \end{cases}$$

и положим

$$\Psi_n(t)=\Phi_n(-t),\ \forall t\in[-a,a].$$

Пусть $\{\vartheta_n^{\pm}\}\subset L_q(0,a)-$ некоторые системы. Аналогичным образом определяем

$$\Omega_k^{\pm}(t)\equiv\begin{cases}\vartheta_k^{\pm}(t), t\in(0,a),\\ \pm\vartheta_k^{\pm}(-t), t\in(-a,0),\end{cases}$$

и положим

$$h_k^{\pm}(t)\equiv\frac{1}{2}\left[\Omega_k^{+}(t)\pm\Omega_k^{-}(t)\right],\ \forall t\in(-a,a)\ .$$

Нетрудно заметить, что имеют место следующие соотношения

$$h_k^{+}(-t)=h_k^{-}(t),\ h_k^{-}(-t)=h_k^{+}(t),\ \forall t\in(-a,a)\ ,$$

которыми будем пользоваться при получении основных результатов.

Будем рассматривать двойную систему $\{\vec{\Phi};\vec{\Psi}\}$ и устанавливать связи между фреймовыми свойствами этой системы и одинарных систем $\{\vec{x}^{\pm}\}$ в лебеговых пространствах L_p.

Предположим, что $\left(\left(\vec{h}^{+};\vec{h}^{-}\right);\left(\vec{\Phi};\vec{\Psi}\right)\right)$ является атомарным разложением $L_p(-a,a)$ относительно $\mathscr{K}$. Положим

$$\vartheta_n^{\pm}(t)\equiv\frac{1}{2}\left(h_n^{+}(t)\pm h_n^{-}(t)\pm h_n^{+}(-t)+h_n^{-}(-t)\right). \qquad (24)$$

Справедлива следующая

Теорема 21. *Пусть* $\left(\left(\vec{h}^{+};\vec{h}^{-}\right);\left(\vec{\Phi};\vec{\Psi}\right)\right)$ *является атомарным разложением* $L_p(-a,a)$ *относительно* $\mathscr{K}$. *Тогда система* $\vec{\vartheta}^{\pm}$ *является* $\mathscr{K}$*-бесселевым в* $L_p(0,a)$ *и произвольная функция из* $L_p(0,a)$ *разлагается по паре* $\left(\vec{\vartheta}^{\pm};\vec{x}^{\pm}\right)$, *где* $\vec{\vartheta}^{\pm}$ *определяется выражением (24). Более того, если имеют место соотношения* $h_n^{\pm}(f)=\vartheta_n^{+}(f^{+})\pm\vartheta_n^{-}(f^{-}),\ \forall n\in N$, *то пара* $\left(\vec{\vartheta}^{\pm};\vec{x}^{\pm}\right)$ *является атомарным разложением* $L_p(0,a)$ *относительно* $\mathscr{K}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту чл.-корр. НАН Азерб., профессору Б.Т. Билалову за ценные советы, постоянное внимание к работе и оказание всесторонней поддержки при выполнении диссертационной работы.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию фреймовых свойств (базисные свойства, свойство быть атомарным разложением, фреймовость) систем элементов и приобретение новых методов суммирования и сходимостей в различных линейных топологических пространствах.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Дано абстрактное обобщение базисности двойных систем экспонент и получен абстрактный вариант известной теоремы "$\frac{1}{4}$ -Кадец";

2. Исходя из абстрактного пространства $L_p(X)$ определены векторные классы Харди $H_p(X)$ и изучены их основные свойства;

3. Понятие пространство коэффициентов систем элементов определено в линейных топологических пространствах в двух случаях - секвенциальный и общий случаи, изучены его свойства;

4. Доказаны базисности половин вырождающихся систем экспонент в классах Харди, когда вырождения удовлетворяют условию Макенхоупта;

5. Изучены атомарные разложения по вырождающимися системами экспонент классов Харди, когда вырождения не удовлетворяют условию Макенхоупта;

6. Изучены вопросы разрешимости краевых задач Римана в весовых классах Смирнова;

7. Доказаны базисности систем из многочленов Фабера в весовых классах Смирнова, когда вес удовлетворяют условию Макенхоупта;

8. Найдены условия базисности двойной системы из многочленов Фабера в лебеговых пространствах на ляпуновых или радоновых кривых;

9. Найден непрерывный аналог понятия статистической сходимости и основные положения этой теории перенесены на этот случай;

10. Ведено понятие μ-strong Чезаро суммирования, изучены его свойства и даны применения к преобразованиям Фурье;

11. Устанавливаются связи между атомарными разложениями двойных и одинарных систем связанные между собою определенными соотношениями в лебеговых пространствах.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Muradov, T.R., Sadigova, S.R. On basicity of double systems in Banach spaces.// Journal of Contemporary Applied Mathematics, dedicated to Abdeljalil Nachoui, Expert in inverse problems, -2012. v. 2, №1,-p. 8-14.
2. Sadigova, S.R. On frame properties of degenerate system of exponents in Hardy classes// -Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, -2013. v. 1, № 1, -p. 97-103
3. Sadigova, S.R., Kasumov, Z.A. On atomic decomposition for Hardy classes with respect to degenerate exponential systems //-Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2014. v. 40, №1, -p. 55-67
4. Sadigova, S.R. The general solution of the homogeneous Riemann problem in the weighted Smirnov classes // -Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2014. v. 40, №2, -p. 115–124
5. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R. On μ-statistical convergence // -Providence: Proceedings of the American Mathematical Society, -2015. v. 143, №9, -p. 3869–3878.

6. Sadigova, S.R., Nazarova, T.Y. Statistical type Lebesgue and Riesz theorems //-Ruse: International Journal of Mathematical Analysis, -2015. v. 9, No. 34, -p.1669 – 1683.
7. Najafov, T.I., Sadigova, S.R. On some Lebesgue and Hardy vector classes //-Ruse: Mathematica Aeterna, -2015. v. 5, №5, -p. 971 - 992.
8. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R., Frame properties of the part of a system of exponents with degenerate coefficient in Hardy classes // -Berlin: Georgian Mathematical Journal, -2017. v. 24, issue 3, -p. 325–338.
9. Guliyeva, F.A., Sadigova, S.R. Bases of the perturbed system of exponents in generalized weighted Lebesgue space with a general weight // -Heidelberg: Afrika Matematika, -2017. v. 28, issue 5–6, -p. 781–791.
10. Sadigova, S.R., Guliyeva, A.E. On the solvability of Riemann problem in the weighted Smirnov classes //-Cham: Analysis Mathematica, -2018. v. 44, issue 4, -p. 587-603.
11. Sadigova, S.R., Hasanli, R.R., Karacam C. On a space of μ -statistical continuous functions // -Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2018. v. 44, №1, -p. 70–80.
12. Sadigova, S.R., Mammadova, N.G., Mammadova, Z.V. Bases from generalized Faber polynomials in weighted Smirnov spaces // -Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, Issue Mathematics, -2018. v.38, No. № 4, -p. 124-133.
13. Guliyeva, F.A., Sadigova, S.R. On some properties of convolution in Morrey type spaces //-Baku: Azerbaijan Journal of Mathematics, -2018. v. 8, №1, -p. 140-150.
14. Sadigova, S.R. On the particular solution of the non-homogeneous Riemann problem in the weighted Smirnov classes with the general weight //-Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2020. v. 46, № 2, -p. 272–283.

15. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R., Seyidova, F.Sh. On the solvability of the homogeneous Riemann problem in the Morrey-Hardy classes //-Baku: The Reports of National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2020. v. LXXVI, №1-2, -p. 14-17.
16. Sadigova, S.R. μ-statistical convergence and the space of functions μ-stat continuous on the segment// - Ivano-Frankivsk: Carpathian Mathematical Publications, -2021. v. 13, № 2, -p. 433-451.
17. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R., Guliyeva, A.E. On Riemann problem in weighted Smirnov classes with general weight// -Tertu: Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica, -2021. v. 25, №1, -p. 33-56.
18. Sadigova, S.R. On Riemann problem in üeighted Smirnov classes with power weight //-Tempe: Rocky Mountain Journal of Mathematics,-2021. v. 51, № 3, -p. 1007–1026.
19. Sadigova, S.R., Guliyeva, A.E. Bases of the perturbed system of exponents in weighted Lebesgue space with a general weight //- Kragujevac: Kragujevac Journal of Mathematics, -2022. v. 46, №3, -p 477–486.
20. Bilalov, B.T., Guliyeva, F.A., Sadigova, S.R. On the space of coefficients in the intuitionistic fuzzy normed spaces // International conference “Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications”, -Mersin: -04-09 September, -2012, - p. 27.
21. Ahmedov, T.M., Sadigova, S.R. On Exponential Bases In $L_{p,\mu}(R)$// International conference on “Actual Problems of Mathematics and Informatics”, -Baku: -29-31 May, -2013, - p. 4.
22. Sadigova, S.R., Gasanova, T.X. On Frames of Double and Unary Systems in Lebesgue Spaces // Caucasian Mathematics conference CMC I, Tbilisi: -05-06 September, -2014, -p. 88-89.
23. Sadigova, S.R., Karacam, C. Hasanli, R.R. On μ-strong Cesaro summability at infinity and its application to the Fourier Stieltjes transforms // International Mathematical conference on “Function Theory”, dedicated to the 100th anniversary of corresponding member of the USSR A.F.Leontyev, -Ufa: -24– 27 May,- 2017, - p. 201.

24. Guliyeva, F.A., Sadigova, S.R. On some properties of convolution in Morrey type spaces // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Международная научная конференция, -Стерлитамак: -25 – 29 июня, -2018, -с. 292-294.
25. Гусейнли, А.А., Садыгова, С.Р. Базисы из обобщенных многочленов Фабера в весовых пространствах Смирнова и Лебега // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Международная научная конференция, -Стерлитамак: -25 – 29 июня, -2018, -с. 295-297.
26. Садыгова, С.Р., Касумов, З.А. Атомарные разложения из двойных и одинарных систем в лебеговых пространствах // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Международная научная конференция, -Стерлитамак: -25 – 29 июня, -2018, -с. 313-316.
27. Guliyeva, F.A., Sadigova, S.R. On approximation by shift operators in Morrey type spaces // Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посв. 80-летию академика В. А. Садовничего, -Москва: -13-15 мая, -2019, -с. 188-189.
28. Huseynli, A.A., Sadigova, S.R. Double bases from generalized Faber polynomials with complex-valued coefficients in weighted Lebesgue spaces with general weight // 3-rd International conference on “Mathematical Advances and Applications”, -Istanbul: -24-27 June, -2020, - p. 180.
29. Sadigova, S.R. On Riemann problem in weighted Smirnov classes with power weight // 9th International Online conference on "Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications MADEA 9", Bishkek: -21-25 June, -2021, -p. 68.
30. Bilalov, B.T., Sadigova, S.R. On solvability "in small" of higher order elliptic equations in grand-Sobolev spaces // 4th International conference on “Mathematical Advances and Applications” (ICOMAA2021), Istanbul: -26-29 May, -2021, -p. 6.

Защита диссертации состоится **«22» декабря 2023** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **13 ноября 2023** года.

Подписано в печать: 06.11.2023
Формат бумаги: 60х841/16
Объём: 78393
Тираж:70