АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ БИФУРКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ШТУРМА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Специальность: 1202.01 – Анализ и функциональный анализ

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Рада Алирза кызы Гусейнова**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2024

Работа выполнена в отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Научный руководитель: доктор математических наук, профессор **Зиятхан Сейфаддин оглы Алиев**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

Гамидулла Исрафил оглы Асланов

доктор математических наук, доцент

Джаваншир Джавад оглы Гасанов

доктор математических наук

Эльчин Джамал оглы Ибадов

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Председатель диссертационного совета:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

_____ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета: к.ф.–м.н., доцент

_____ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

член–корр. НАНА, д.ф.–м.н., профессор

_____ **Билал Тельман оглы Билалов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень обработки. Одним из основных разделов современного анализа является теория бифуркации нелинейных задач на собственные значения с индефинитным (знакопеременным) весом. Задачи такого типа для дифференциальных уравнений второго порядка возникают при моделировании динамики популяции, обитающей в сильно неоднородной среде, а также миграции-селекции в популяционной генетике. Для дифференциальных уравнений четвертого порядка задачи подобного типа возникают при описании бегущих волн в подвесном мосту, статическом прогибе упругой пластины в жидкости, обработке изображений, процессов фильтрации баротропного газа через пористую среду.

При исследовании бифуркации решений нелинейных задач на собственные значения существенную роль играет осцилляционные свойства собственных функций соответствующих линейных спектральных задач. Как известно, осцилляционные свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля были подробно изучены еще в 30-х годах XIX века Штурмом[1]. Эти свойства собственных функций линейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (а точнее для вполне регулярных систем Штурма четвертого порядка) при наличии потенциала детально исследованы в недавной работе З.С.Алиева[2]. Осцилляционные свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля с индефинитной весовой функцией

---

[1]Sturm, C. Sur une classe d'equations *a* derivee partielle//Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, – 1836. v.1, – p. 373–444

[2]Алиев, З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // – Москва: Матем. сб., – 2016. т. 207, № 12, – с. 3–29.

исследованы Айнсом[3] с помощью теоремы сравнения Штурма и формул Пиконе. Кроме того, в работах Г.А. Афроузи, и К.Дж. Брауна, В. Аллегретто, К.Дж. Брауна и С.С. Лина, Дж. Флекингера и М.Л. Лапидуса, П. Гесса и Т. Като доказано существование главных собственных значений (т.е. собственных значений, которые соответствуют положительным (или отрицательным) собственным функциям) спектральных задач для эллиптических уравнений в частных производных второго и четвертого порядков с знакопеременной весовой функцией. Отметим, что осцилляционные свойства собственных функций линейных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка до сих пор не исследованы.

Локальная и глобальная бифуркация решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных второго и четвертого порядков с знакопостояннной весовой функцией детально исследованы в работах П.Г. Рабиновича[4,5], Дж.Ф. Толанда, К.А. Стюарта, А. Берестицкого[6], Р. Чиаппинелли, И. Пржибицин, Б.П. Ринни, К. Шмитта и Х.Л. Смита, Дж. Чу, Д. О'Регана, Р. Ма и Б. Томпсона, А.С. Лазера и П.Дж. МакКеннана и др. Эти вопросы для дифференциальных уравнений второго порядка с знакопеременной весовой функцией исследованы П. Гессом и Т. Като, К.Дж. Брауном, С.С. Лином и А. Тертикасом, В. Аллегретто и А. Мингарелли, К.Дж. Брауном, Б. Ко и К. Брауном, Р.С. Кантреллом и К. Коснером, З.С. Алиевым и

---

[3]Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ОНТИ, – 1939, – 718 с.

[4]Rabinowitz, P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Function. Anal., – 1971. v.7, no.3, – p. 487–513.

[5]Rabinowitz, P.H. On bifurcation from infinity // J. Diff. Equat. – 1973. v.14, no. 3, – p. 462–475.

[6]Berestycki, H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems// J.Diff. Equat., – 1977. v. 26, no. 3, – p. 375–390.

Ш.М. Гасановой, З.С. Алиевым и Л.В. Насировой и др. Ими получены глобальные результаты о бифуркации решений, которые играют важную роль в популяционной генетике.

Бифуркация решений нелинейных задач на собственные значения для дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитной весовой функцией изучены в работах М. Дельгадо, А. Суареса и М.Ф. Фуртадо, Ж.П.П. да Силва, Р. Ма, К. Гао и Х. Ханьа, Э.Д. Сильва, Х.К. де Альбукерке и Т.Р. Кавальканте, Дж. Ван и Р. Ма. В этих работах доказано существование глобальных континуумов решений содержащихся в классах положительных и отрицательных функций. Так как до настоящей времени не изучены осцилляционные свойства собственных функций линейных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядков с индефинитной весовой функцией, то по этой причине не была исследована также локальная и глобальная бифуркация решений нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитной весовой функцией.

Таким образом, изучение осцилляционных свойств собственных функций линейных спектральных задач и исследование локальной и глобальной бифуркации решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (т.е. нелинейной системы Штурма) с знакопеременной весовой функцией является актуальным.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются линейные и нелинейные задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитной весовой функцией, а предметом исследования является осцилляционные свойства собственных функций линейных спектральных задач и глобальная бифуркация из нуля и от бесконечности множества

нетривиальных решений нелинейных задач на собственные значения.

Цель и задачи исследования. Главной целью и основной задачей настоящей диссертации является изучение осцилляционных свойств собственных функций и их производных линейных задач и исследование бифуркации решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитным весом.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются в основном методы обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций и функционального анализа, дифференциальной геометрии и топологии, спектральной теорий дифференциальных операторов, теории бифуркации, нелинейного функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту. Следующие основные положения выносятся для защиты диссертации:

– доказать существования неограниченно возрастающей и неограниченно убывающей последовательности положительных и отрицательных простых собственных значений, соответственно,

– изучить осцилляционные свойства собственных функций линейной спектральной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитной весовой функцией;

– изучить локальную и глобальную бифуркацию решений из нуля и от бесконечности нелинейных линеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с знакопеременным весом;

– изучить локальную и глобальную бифуркацию положительных и отрицательных решений из нуля и от бесконечности нелинейных нелинеаризируемых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных

уравнений четвертого порядка с знакопеременной весовой функцией.

Научная новизна исследования. Основными результатами данной диссертационной работы являются следующие:

– доказано существование двух неограниченно возрастающей и неограниченно убывающей последовательностей положительных и отрицательных простых собственных значений линейной системы Штурма четвертого порядка с индефинитной весовой функцией;

– изучены осцилляционные свойства собственных функций соответствующих как наименьшему положительному, также и наибольшему отрицательному собственным значениям системы Штурма четвертого порядка с индефинитной весовой функцией;

– показано существование четырех неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из точек линии тривиальных решений и $R \times \{\infty\}$, и содержащихся в классах функций, обладающих осцилляционными свойствами собственных функций и их производных соответствующих линейных задач;

– доказано существование четырех неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из отрезков линии тривиальных решений и $R \times \{\infty\}$, и содержащихся в классах положительных и отрицательных функций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, которые получены в диссертационной работе имеют в основном теоретический характер. Эти результаты могут быть применены при моделировании электрореологических жидкостей и других явлений, связанных с обработкой изображений и течением в пористой среде, статической деформации упругой пластины в жидкости.

Апробация и применение. Результаты полученные в данной диссертационной работе докладывались в ИММ МНО Азербайджана на семинарах отделов «Негармонический анализ»

(рук. чл.-корр. НАНА, проф. Б.Т. Билалов), «Дифференциальные уравнения» (рук. проф. А.Б. Алиев) и «Функциональный анализ» (рук. проф. Г.И. Асланов), на Международной конференции MADEA-7 – «Математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» (Баку, 2015), на Международном семинаре «Негармонический анализ и дифференциальные операторы» (Баку, 2016), на VIII Ежегодной Международной Конференции Грузинского Математического Общества (Батуми, Грузия, 2017), на Республиканской научной конференции «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», посвященной 110-летию со дня рождения академика Ибрагима Ибрагимова (Баку, БГУ, 2022).

Личный вклад автора заключается в формулировке цели исследования. Кроме того, все полученные результаты исследования принадлежат автору.

Публикации автора. Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в 5 научных статьях (3 из них WOS, 1 SCOPUS) в журналах, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией при Президенте Азербайджанской Республики и 4 материалах международных конференций (одна из них проведена за рубежом).

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на отделе «Негармонический анализ» Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности).

Общий объем диссертации – 212398 знаков (титульная страница – 373 знаков, оглавление – 2530 знаков, введение – 58268 знаков, первая глава – 48000 знаков, вторая глава – 52000 знаков, третья глава – 50000 знаков, заключение – 1227 знаков). Из 95 наименований состоит список используемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава состоящая из пяти параграфов посвящена изучению осцилляционных свойств спектральной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с индефинитной весовой функцией.

В 1.1 излагается постановка задачи.

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$(\tau(x)y''(x))'' = \lambda r(x)y(x),\ x \in (0,\ 1), \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in C -$спектральный параметр, функция $\tau(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную и является положительной на $[0, 1]$, весовая функция $r(x)$ является непрерывной и меняет знак на отрезке $[0, 1]$.

Задача на собственные значения (1)-(2) в случае $r(x) > 0,\ x \in [0,\ 1]$, была исследована С.Н. Янчевским[7]. Им доказано, что все собственные значения этой задачи являются положительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Кроме того, собственная функция $\vartheta_k(x)$, соответствующая k-му собственному значению μ_k, имеет в точности $k-1$ простых нулей в интервале $(0,\ 1)$.

Известно, что осцилляционные свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля с индефинитным весом детально исследованы в упомянутой работе Айнса[3]. Эти свойства для собственных функций спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов четвертого

---

[7]Janczewsky, S.N. Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order // Ann. Math., – 1928. v. 29, no. 2, – p. 521-542.

порядка не изучены.

Целью данной главы является изучение спектральных свойств краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с вполне регулярными граничными условиями и знакопеременной весовой функцией. Будет доказано, что эти спектральные задачи имеют две бесконечно возрастающую и бесконечно убывающую последовательности положительных и отрицательных собственных значений соответственно. При этом наименьшее положительное и наибольшее отрицательное собственные значения являются простыми, а соответствующие им собственные функции не имеют нулей в интервале $(0, 1)$.

В 1.2 излагаются результаты о критических точках гладких функционалов на C^1 – многообразиях.

1.3 посвящено доказательству существования бесконечного множества положительных и отрицательных собственных значений задачи (1), (2).

Пусть $I = (0, 1)$ и $W^{k,p,\tau}(I)$ – весовое пространство Соболева, состоящее из всех измеримых вещественных функций u, определенных на I и для которых

$$\|u\|_{k,p,\tau} = \left\{ \sum_{m=0}^{k-1} \int_I |u^{(m)}(x)|^p \, dx + \int_I \tau(x) |u^{(k)}(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Пусть $W_0^{1,p}(I)$ есть замыкание $C_0^\infty(I)$ в $W^{1,p}(I) = W^{1,p,1}(I)$.

Обозначим $X = W_0^{1,2}(I) \bigcap W_0^{2,2,\tau}(I)$ с нормой

$$\|u\|_X = \left\{ \int_I \tau(x) |u''(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

которая в силу весового неравенства Фридрихса эквивалентно норме $\|u\|_{2,2,\tau}$ пространства $W^{2,2,\tau}(I)$. Далее, через X^*, обозначим пространство, двойственное к пространству X.

Введем линейные операторы $L, H : X \to X^*$ следующим образом:

$$\langle L(u), \vartheta \rangle = \int_I \tau u'' \vartheta'' dx,$$

$$\langle H(u), \vartheta \rangle = \int_I \tau u \vartheta dx, \ \ u, \vartheta \in X.$$

Определим на X следующие функционалы:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_I \tau |u''|^2 dx,$$

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_I r |u|^2 dx.$$

Пусть

$$\mathrm{M} = \{u \in X : 2G(u) = 1\}.$$

Задача (1), (2) при $\lambda > 0$ может быть записана в следующей эквивалентной форме

$$L(u) = \lambda H(u), \, u \in \mathrm{M}. \tag{4}$$

Заметим, что (λ, u) является решением задачи (3) (или (4)) тогда и только тогда, когда u является критической точкой функционала F на множестве M.

Пусть $E-$ действительное банахово пространство, а $\Sigma-$ совокупность всех симметрических подмножеств $E \setminus \{0\}$, замкнутых в E (множество $Y \subset E$ называется симметричным, если $Y = -Y$). Следуя М.А. Красносельскому[8] непустое множество $Y \subset \Sigma$ называется множеством рода $k, k \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$, (обозначаемое через $\gamma(Y) = k$), если k является наименьшим целым числом со свойством, что существует нечетное непрерывное отображение из Y в $R^k \setminus \{0\}$. Если такого k не

---

[8]Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. – Москва; Ленинград: Гос. издательство техн.–теорет. лит., – 1956. – 392 с.

существует, то $\gamma(Y) = +\infty$, а если $Y = \varnothing$, то $\gamma(Y) = 0$.

Обозначим: $\Gamma_n = \{ K \subset M$: K симметрично, компактно и $\gamma(K) \geq n \}$.

Лемма 1. *Для любого* $k \in \mathrm{N}$ *имеет место соотношение:*

$$\Gamma_k \neq \varnothing.$$

Одним из основных результатов настоящей главы является следующая

Теорема 1. *Для каждого* $k \in \mathrm{N}$ число

$$\lambda_k^+ = \inf_{K \subset \Gamma_k} \max_{u \in K} 2F(u)$$

является критическим значением функционала F *на* M, *а точнее, существует такое* $u_k^+ \in K_k \in \Gamma_k$, *что* $\lambda_k^+ = 2F(u_k^+) = \sup_{u \in K_k} 2F(u)$ *и* u_k^+ *является собственной функцией задачи (1), (2), отвечающей положительному собственному значению* λ_k^+. *Кроме того,* $\lambda_k^+ \to +\infty$ *при* $k \to \infty$.

Следствие 1. *Имеет место соотношение:*

$$\lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \ \ldots \ \leq \lambda_k^+ \mapsto +\infty.$$

Следствие 2. *Задача (1), (2) имеет неограниченно убывающую последовательность отрицательных собственных значений* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, *такую, что* $\lambda_k^- \to -\infty$ *при* $k \to \infty$.

В параграфе 1.4 изучаются свойства главных собственных значений задачи (1), (2).

Теорема 2. *Собственное значение* λ_1^+ (λ_1^-) *является простым, и соответствующая ему собственная функция* $u_1^+(x)$ $(u_1^-(x))$ *не обращается в нуль в интервале* I.

В 1.5 рассматривается вполне регулярная система Штурма с индефинитной весовой функцией.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\ell(u) \equiv (\tau(x)u'')'' - (q(x)u')' = \lambda r(x)u,\ 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$u'(0)\cos\alpha - (\tau u'')(0)\sin\alpha = 0, \tag{6a}$$

$$u(0)\cos\beta + Tu(0)\sin\beta = 0, \tag{6b}$$

$$u'(1)\cos\gamma + (\tau u'')(1)\sin\gamma = 0, \tag{6c}$$

$$u(1)\cos\delta - Tu(1)\sin\delta = 0, \tag{6d}$$

где $q-$неотрицательная абсолютно непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, $\alpha, \beta, \gamma, \delta-$ действительные постоянные такие, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, \pi/2]$, за исключением случаев $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = \pi/2$ и $\alpha = \gamma = \beta = \delta = \pi/2$ при $q \equiv 0$.

Теорема 3. *Спектральная задача (5), (6) имеет две последовательности вещественных собственных значений*

$$0 < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le \ \ldots \ \le \lambda_k^+ \mapsto +\infty,\ 0 > \lambda_1^- \ge \lambda_2^+ \ge \ \ldots \ \ge \lambda_k^+ \mapsto -\infty,$$

и никаких других собственных значений не имеет. При этом, λ_1^+ *и* λ_1^- *являются простыми главными собственными значениями этой задачи, т. е. соответствующие им собственные функции* $u_1^+(x)$ *и* $u_1^-(x)$ *не имеют нулей в интервале* I.

Замечание 1. Справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^1 r(u_k^+)^2 dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 r(u_k^-)^2 dx < 0,\ k \in \mathrm{N}. \tag{7}$$

Вторая глава, состоящая из 6 параграфов, посвящена изучению глобальной бифуркации решений из нуля и от бесконечности нелинейных линеаризуемых систем Штурма с индефинитным весом.

В 2.1 дается постановка задачи и приводятся исторические замечания.

Рассмотрим следующую нелинейную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \ell(u) = \lambda r(x)u + g(x, u, u', u'', u''', \lambda),\ 0 < x < 1, \\ u \in BC, \end{cases} \tag{8}$$

где $BC-$множество функций удовлетворяющих граничным условиям (6), а коэффициенты в уравнении и граничных условиях удовлетворяют условиям, наложенным на них в главе I. Кроме того, вещественно-значная функция $g \in C([0,\,1]\times R^5)$ удовлетворяет условию:

$$g(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)=o(|\,u\,|+|\,s\,|+|\,\vartheta\,|+|\,w\,|) \quad \text{при}$$
$$|\,u\,|+|\,s\,|+|\,\vartheta\,|+|\,w\,|\to 0, \tag{9}$$

или

$$g(x,u,s,\vartheta,w,\lambda)=o(|\,u\,|+|\,s\,|+|\,\vartheta\,|+|\,w\,|) \quad \text{при}$$
$$|\,u\,|+|\,s\,|+|\,\vartheta\,|+|\,w\,|\to \infty, \tag{10}$$

равномерно по $x\in[0,\,1]$ и $\lambda\in\Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda\subset R$.

Глобальная бифуркация решений задачи (8) при $r(x)>0,\ x\in[0,\,1],$ детально исследована в работах З.С. Алиева[2] и З.С. Алиева, Н.А. Мустафаевой[9] при выполнении условии (9) и (10) соответственно

В 2.2 приводится необходимые сведения из теории бифуркации нелинейных задач на собственные значения.

В 2.3 приводятся классы функций $S_k^{\nu},\ k\in \mathrm{N},\ \nu\in\{+,-\}$, банахово пространства $E=C^3[0,\,1]\bigcap BC$ с обычной нормой $\|\,u\,\|_3=\|\,u\,\|_\infty+\|\,u'\,\|_\infty+\|\,u''\,\|_\infty+\|\,u'''\,\|_\infty$, где $\|\,u\,\|_\infty=\max\limits_{x\in[0,\,l]}|\,u(x)\,|$.

Из теоремы 1.1 работы З.С. Алиева[2] и теоремы 3 следует, что $u_1^+,\ u_1^-\in S_1=S_1^+\bigcup S_1^-$.

Замечание 2. Без ограничения общности можно предполагать, что $u_1^+,u_1^-\in S_1^+$ и $\|\,u_1^{\sigma}\,\|_3=1,\ \sigma\in\{+\,,\,-\}$.

В 2.4 изучается глобальная бифуркация решений из нуля

---

[9]Aliyev, Z. S., Mustafayeva, N.A. Bifurcation of solutions from infinity for certain nonlinear eigenvalue problems of fourth order ordinary differential equations // Elec. J. Diff. Equat., – 2018. v. 2018, no. 98, – p. 1–19

нелинейной задачи (8).

Обозначим через C замыкание множества нетривиальных решений задачи (8).

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 4. *Пусть выполняется условие (8). Тогда для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *существует континуум* $C_1^{\sigma,\nu}$ *решений задачи (8), который содержит* $(\lambda_1^{\sigma}, 0)$, *содержится в* $(R \times S_1^{\nu}) \bigcup \{(\lambda_1^{\sigma}, 0)\}$ *и неограничен в* $R \times E$.

В 2.5 построены классы функций $S_k^{\nu,\sigma}$, $k \in \mathrm{N}$, $\nu, \sigma \in \{+,-\}$, и изучены структуры континуумов решений задачи (8) при дополнительном условии.

Пусть выполняется следующее условие

$$u\,g(x,u,s,\vartheta,w,\lambda) \le 0, \ (x,u,s,\vartheta,w,\lambda) \in [0,1] \times R^5. \qquad (11)$$

Наряду с классами S_k^{ν}, $k \in \mathrm{N}$, $\nu \in \{+,-\}$, рассмотрим классы $S_k^{\sigma,\nu}$, $k \in \mathrm{N}$, $\sigma, \nu \in \{+,-\}$, которые определяются следующим образом:

$$S_k^{\nu,\sigma} = \{u \in S_k^{\nu} : \sigma \int_0^1 r u^2 dx > 0\}, k \in \mathrm{N}, \ \sigma, \nu \in \{+,-\}.$$

Из соотношения (7) следует, что $u_1^{+} \in S_1^{+,+}$, $u_1^{-} \in S_1^{-,+}$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия (9) и (11). Тогда для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *континуум* $C_1^{\sigma,\nu}$ *решений задачи (8) содержится в* $(R^{\sigma} \times S_1^{\sigma,\nu}) \bigcup \{(\lambda_1^{\sigma}, 0)\}$, *где* $R^{+} = (0, +\infty), R^{-} = (-\infty, 0)$.

В 2.6 изучается глобальная бифуркация из бесконечности решений задачи (8).

Замечание 3. Заметим, что (λ_1^{+}, ∞) и (λ_1^{-}, ∞) являются асимптотическими точками бифуркации задачи (8).

Пусть X_0 − множество собственных значений задачи (5), (6).

Имеют место следующие глобальные результаты для задачи (8) при выполнении условия (10).

Теорема 6. *Пусть выполняется условие (10). Тогда для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *множество* C *содержит неограниченную компоненту* $\widetilde{C}_1^{\sigma}$, *которая пересекает точку* $(\lambda_1^{\sigma},\infty)$. *Кроме того, если* $\Lambda \subset R$ *такой промежуток, что* $\Lambda \bigcap X_0 = \{\lambda_1^{\sigma}\}$, *а* M_1^{σ} *– окрестность точки* $(\lambda_1^{\sigma},\infty)$, *проекция которой на* R *лежит в* Λ *и чья проекция на* E *ограничена и не содержит* $0 \in E$, *то либо*

1^0. $\widetilde{C}_1^{\sigma} \setminus M_1^{\sigma}$ *является ограниченной в* $R \times E$; *в этом случае* $\widetilde{C}_1^{\sigma} \setminus M_1^{\sigma}$ *пересекает множество* $\{(\lambda,0):\lambda \in R\}$, *либо*

2^0. $\widetilde{C}_1^{\sigma} \setminus M_1^{\sigma}$ *является неограниченной в* $R \times E$, *при этом если* $\widetilde{C}_1^{\sigma} \setminus M_1^{\sigma}$ *имеет ограниченную проекцию на* R, *то* $\widetilde{C}_1^{\sigma} \setminus M_1^{\sigma}$ *пересекает точку* $(\lambda_{k'}^{\sigma'},\infty)$, *где* $\lambda_{k'}^{\sigma'} \in X_0$ *и* $(k',\sigma') \neq (1,\sigma)$.

Теорема 7. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *компонента* $\widetilde{C}_1^{\sigma}$ *можно разложить на два подкомпоненты* $\widetilde{C}_1^{\sigma,+}$, $\widetilde{C}_1^{\sigma,-}$ *и существует окрестность* $Q_1^{\sigma} \subset M_1^{\sigma}$ *точки* $(\lambda_1^{\sigma},\infty)$ *такая, что*

$$((\widetilde{C}_1^{\sigma,+} \bigcap Q_1^{\sigma}) \setminus \{(\lambda_1^{\sigma},\infty)\}) \subset R \times S_1^{+},$$
$$((\widetilde{C}_1^{\sigma,-} \bigcap Q_1^{\sigma}) \setminus \{(\lambda_1^{\sigma},\infty)\}) \subset R \times S_1^{-}.$$

Теорема 8. *Пусть выполняются условия (10) и (11). Тогда справедливы следующие соотношения*

$$((\widetilde{C}_1^{\sigma,+} \bigcap Q_1^{\sigma}) \setminus \{(\lambda_1^{\sigma},\infty)\}) \subset \hat{R}^{\sigma} \times S_1^{\sigma,+},$$
$$((\widetilde{C}_1^{\sigma,-} \bigcap Q_1^{\sigma}) \setminus \{(\lambda_1^{\sigma},\infty)\}) \subset \hat{R}^{\sigma} \times S_1^{\sigma,-}.$$

В главе 3, состоящей из четырех параграфов, рассматривается нелинеаризируемые задачи для системы Штурма с индефинитной весовой функцией. Изучаются структуры и поведения связных компонент множества решений, ответвляющихся из нуля и от бесконечности и содержащихся в классах положительных и отрицательных функций.

В 3.1 дается постановка задачи, где рассматривается нелинейная задача на собственные значения для вполне регулярной системы Штурма с индефинитным весом.

Рассмотрим следующую краевую задачу четвертого порядка

$$\begin{cases} \ell(u) = \lambda\, r(x)\, u + h(x, u, u', u'', u''', \lambda),\ 0 < x < 1, \\ u \in BC, \end{cases} \tag{12}$$

где коэффициенты в уравнении и граничных условиях удовлетворяют условиям наложенным на них в главе I. Кроме того, нелинейный член h представим в виде

$$h = f + g,$$

где функция $g \in C([0,\ 1] \times R^5; R)$ удовлетворяет условию (11), а также либо условию (9), либо условию (10), а функция $f \in C([0,\ 1] \times R^5; R)$ удовлетворяет условиям:

$$u\, f(x, u, s, \vartheta, w, \lambda) \le 0,\ \ (x, u, s, \vartheta, w, \lambda) \in [0,1] \times R^5; \tag{13}$$

существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \frac{f(x, u, s, \vartheta, w, \lambda)}{u} \right| \le M,\ \ (x, u, s, \vartheta, w, \lambda) \in [0,1] \times R^5. \tag{14}$$

Задача (12) при $r > 0$ и выполнении условий (9) и (14) рассмотрена в работе З.С.Алиева[1].

В 3.2 найдена оценка расстояния между главными собственными значениями основной и возмущенной линейных задач.

Наряду с задачей (5), (6) рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \ell(u) + \varphi(x) u = \lambda\, r(x) u,\ 0 < x < 1, \\ u \in BC, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\varphi(x) \in C[0,\ 1],\ \text{ и } \varphi(x) \ge 0, x \in [0,\ 1].$$

Лемма 2. *Для каждого* $\sigma \in \{+, -\}$ *справедливо следующее соотношение:*

$$|\tilde{\lambda}_1^{\sigma} - \lambda_1^{\sigma}| \le \frac{\sigma \tilde{M} \int_0^1 (u_1^{\sigma}(x))^2\, dx}{\int_0^1 r(x)(u_1^{\sigma}(x))^2\, dx}, \qquad (16)$$

где $\tilde{\lambda}_1^{+}$ и $\tilde{\lambda}_1^{-}$ – главные собственные значения задачи (15).

В 3.3 изучены структуры глобальных континуумов, исходящих из отрезков прямой тривиальных решений, задачи (12) при выполнении условий (9) и (14).

Лемма 3. *Для каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *и для каждого достаточно малого* $\zeta > 0$ *задача (12) имеет решение* $(\lambda_{\zeta}^{\nu}, u_{\zeta}^{\nu})$ *такое, что* $u_{\zeta}^{\nu} \in S_1^{\nu}$ *и* $\| u_{\zeta}^{\nu} \|_3 = \zeta$.

Следствие 3. *Для каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *множество точек бифуркации задачи (12) по множеству* $R \times S_1^{\nu}$ *является непустым.*

Лемма 4. *Если* $(\lambda, 0)$ *является точкой бифуркации задачи (12) по множеству* $R \times S_1^{\nu}$, *то* $\lambda \in J_1^{+} \bigcup J_1^{-}$, где

$$J_1^{+} = [\lambda_1^{+}, \lambda_1^{+} + d_1^{+}],$$

$$J_1^{-} = [\lambda_1^{-} - d_1^{-}, \lambda_1^{-}],$$

$$d_1^{\sigma} = \frac{\sigma \tilde{M} \int_0^1 (u_1^{\sigma}(x))^2\, dx}{\int_0^1 r(x)(u_1^{\sigma}(x))^2\, dx}, \ \sigma \in \{+,-\}.$$

Обозначим через D замыкание множества нетривиальных решений задачи (12).

Для каждого $\sigma \in \{+,-\}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ через $\hat{D}_1^{\sigma,\nu}$ обозначим объединение всех связных компонент $D_{1,\lambda}^{\sigma,\nu}$ множества D исходящих из точек бифуркации $(\lambda, 0) \in J_1^{\sigma} \times \{0\}$ по множеству $R \times S_1^{\nu}$. Кроме того, пусть $\tilde{D}_1^{\sigma,\nu} = \hat{D}_1^{\sigma,\nu} \bigcup (J_1^{\sigma} \times \{0\})$.

Имеет место следующая

Теорема 9. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *связная компонента* $\tilde{D}_1^{\sigma,\nu}$ *множества* D, *содержащая* $J_1^{\sigma} \times \{0\}$, *содержится в* $(R \times S_1^{\nu}) \bigcup (J_1^{\sigma} \times \{0\})$ *и является неограниченной в* $R \times E$.

Теорема 10. *Пусть* $g = 0$. *Тогда для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *связная компонента* $\tilde{D}_1^{\sigma,\nu}$ *множества* D, *содержащая* $J_1^{\sigma} \times \{0\}$, *содержится в* $(J_1^{\sigma} \times S_1^{\nu}) \bigcup (J_1^{\sigma} \times \{0\})$ *и является неограниченной в* $R \times E$.

Пусть теперь наряду с условиями (9) и (14) выполняются также условия (11) и (13). Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия (11) и (13). Если* $(\lambda, u) \in D_1^{\sigma,\nu}$, $\sigma \in \{+,-\}$, $\nu \in \{+,-\}$, *то* $\lambda \in R^{\sigma}$.

Лемма 6. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$, *каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *и для каждого достаточно малого* $\zeta > 0$ *задача (12) имеет решение* $(\lambda_{\zeta}^{\sigma,\nu}, u_{\zeta}^{\sigma,\nu})$ *такое, что*

$$u_{\zeta}^{\sigma,\nu} \in S_1^{\sigma,\nu} \quad и \quad \| u_{\zeta}^{\sigma,\nu} \|_3 = \zeta.$$

Следствие 4. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *множество точек бифуркации задачи (12) по множеству* $R \times S_1^{\sigma,\nu}$ *является непустым.*

Лемма 7. *Если* $(\lambda, 0)$ *является точкой бифуркации (12) по множеству* $R \times S_1^{\sigma,\nu}$, *то* $\lambda \in J_1^{\sigma}$.

Имеет место следующая

Теорема 11. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *и каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *связная компонента* $\tilde{D}_1^{\sigma,\nu}$ *множества* D, *содержащая* $J_1^{\sigma} \times \{0\}$, *содержится в* $(\tilde{R}^{\sigma} \times S_1^{\sigma,\nu}) \bigcup (J_1^{\sigma} \times \{0\})$ *и является неограниченной в* $R \times E$.

В 3.4 изучается глобальная бифуркация решений от бесконечности нелинейной задачи (12) как при выполнении

условий (10) и (14), также и при выполнении условий (10), (11) и (13), (14).

Пусть выполняются условия (10) и (14). Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 8. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$, *каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *и достаточно большого* $R_1 > 0$ *задача (12) имеет решение* $(\lambda_{R_1}^{\sigma,\nu}, u_{R_1}^{\sigma,\nu})$ *такое, что*

$$u_{R_1}^{\sigma,\nu} \in S_1^{\nu} \ \ и \ \ \| u_{R_1}^{\sigma,\nu} \|_3 = R_1.$$

Следствие 5. *Множество асимптотических точек бифуркации задачи (12) по множеству* $R \times S_1^{\nu}$ *является непустым. Кроме того, если* (λ, ∞) *является точкой бифуркации для (12) по множеству* $R \times S_1^{\nu}$, *то* $\lambda \in J_1^{+} \bigcup J_1^{-}$.

Для каждого $\sigma \in \{+,-\}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ определим множество $\overline{D}_1^{\sigma,\nu}$ как объединение всех компонент множества D, которые пересекают $J_1^{\sigma} \times \{\infty\}$ вдоль $R \times S_1^{\nu}$, и пусть $D_1^{\sigma,\nu} = \overline{D}_1^{\sigma,\nu} \bigcup (J_1^{\sigma} \times \{\infty\})$.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 12. *Пусть*

$$P_1^{\sigma} = \{(\lambda, u) \in R \times E : dist\{\lambda, J_1^{\sigma}\} \le \delta_1, \| u \|_3 > R_1\}, \sigma \in \{+,-\}.$$

Тогда либо 1⁰) $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *ограничено в* $R \times E$, *причем в этом случае* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *пересекает множество* $\{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}$, *либо 2⁰)* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *не ограничено в* $R \times E$, *при этом если* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *имеет ограниченную проекцию на* R, *то* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *пересекает* $J_{k'}^{\sigma'} \times \{\infty\}$ *при некотором* $(k', \sigma') \ne (1, \sigma)$, *где* $J_{k'}^{\sigma'} \times \{\infty\}$ – *промежуток бифуркации задачи (12) и* $\lambda_{k'}^{\sigma'} \in J_{k'}^{\sigma'}$.

Если дополнительно выполняется также условия (11) и (13), то справедливы следующие утверждения.

Лемма 9. *Для каждого* $\sigma \in \{+,-\}$ *каждого* $\nu \in \{+,-\}$ *и для каждого достаточно большого* $\widetilde{R}_1 > 0$ *задача (12) имеет решение* $(\lambda^{\sigma,\nu}_{\widetilde{R}_1}, u^{\sigma,\nu}_{\widetilde{R}_1})$ *такое, что*

$$u^{\sigma,\nu}_{\widetilde{R}_1} \in S_1^{\sigma,\nu} \ \ и \ \ \| u^{\sigma,\nu}_{\widetilde{R}_1} \|_3 = \widetilde{R}_1 .$$

Следствие 6. *Множество асимптотических точек бифуркации задачи (12) по множеству* $R \times S_1^{\sigma,\nu}$ *является непустым. Кроме того, если* (λ, ∞) *является точкой бифуркации для (12) по множеству* $R \times S_1^{\sigma,\nu}$, *то* $\lambda \in J_1^{\sigma}$.

Теорема 13. *Либо*

1⁰) $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *ограничено в* $R \times E$, *причем в этом случае* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *пересекает множество* $\{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}$, *либо*

2⁰) $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *не ограничено в* $R \times E$, *при этом если* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *имеет ограниченную проекцию на* R, *то* $D_1^{\sigma,\nu} \setminus P_1^{\sigma}$ *пересекает* $J_k^{\sigma} \times \{\infty\}$ *при некотором* $k \neq 1$, *где* $J_k^{\sigma} \times \{\infty\}$ – *промежуток бифуркации задачи (12) и* $\lambda_k^{\sigma} \in J_k^{\sigma}$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Зиятхану Алиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Заключение

В диссертационной работе изучены осцилляционные свойства собственных функций линейных задач на собственные значения и исследованы бифуркация решений из нуля и от бесконечности нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (а точнее для вполне регулярных систем Штурма четвертого порядка) с индефинитной весовой функцией.

В работе получены следующие основные результаты:

– доказано существование двух неограниченно возрастающей и неограниченно убывающей последовательностей положительных и отрицательных простых собственных значений линейной системы Штурма четвертого порядка с индефинитной весовой функцией;

– изучены осцилляционные свойства собственных функций соответствующих как наименьшему положительному, также и наибольшему отрицательному собственным значениям системы Штурма четвертого порядка с индефинитной весовой функцией;

– показано существование четырех неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из точек линии тривиальных решений и $R \times \{\infty\}$, и содержащихся в классах функций, обладающих осцилляционными свойствами главных собственных функций соответствующих линейных задач;

– доказано существование четырех неограниченных континуумов решений, ответвляющихся из отрезков линии тривиальных решений и $R \times \{\infty\}$, и содержащихся в классах положительных и отрицательных функций.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Huseynova, R.A. Global bifurcation of solutions of the half-linea-rizable eigenvalue problems of fourth order // Abstracts of Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International conference MADEA-7 of Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications, – Baku: 08-13 September -2015, – p. 71–72.
2. Huseynova, R.A. Global bifurcation from principal eigenvalues for some Sturmian system with sign-changing weight // International Workshop on ”Non-harmonic Analysis and Differential Operators”, – Baku: –26-27 May -2016, – p.50
3. Aliyev, Z.S. Huseynova, R.A. On fourth-order eigenvalue problems with indefinite weight // Trans. of Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, – 2016. v. 36, №4, – p. 37–46.
4. Huseynova, R.A. Global bifurcation from principal eigenvalues for nonlinear fourth order eigenvalue problem with indefinite weight // Proc. of Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., – 2016. v. 42, №2, – p. 202–211.
5. Aliyev, Z.S. Huseynova, R.A. Bifurcation in nonlinearizable eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order with indefinite weight // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat., – 2017. № 92, – p. 1–12.
6. Aliyev, Z.S. Huseynova, R.A. Global bifurcation in some non-linearizable eigenvalue problems with indefinite weight // Abstracts of VIII Annual International conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi: -4-8 September –2017, – p. 51-52.
7. Aliev, Z.S., Huseynova, R.A. Global bifurcation from infinity in some nonlinearizable eigenvalue problems with indefinite weight // Proc. of Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., – 2018, v. 44, №1, – p. 123–134.
8. Huseynova, R.A. Global Bifurcation from zero and infinity in nonlinear beam equation with indefinite weight //- Baku: Caspian J. Appl. Math., Ecol., Econ., –2017, № 2, – p.74–84.

9. Aliev, Z.S. Huseynova, R.A. Global bifurcation from infinity in some fourth order nonlinear eigenvalue problems with indefinite weight // International conference “Modern Problems of Mathematics and Mechanics ” dedicated to the 110th anniversary of Ibrahim Ibrahimov, – Baku: –29 June -01 July -2022, – p. 38–40.

Защита диссертации состоится **29 марта 2024** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **23 февраля 2024** года.

Подписано в печать: 19.02.2024
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 37460
Тираж: 70