

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

BƏZİ QEYRİ-XƏTTİ MƏXSUSİ QIYMƏT MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLƏRİNİN BİRTƏRƏFLİ QLOBAL BİFURKASIYASI

İxtisas: 1202.01 – Analiz və funksional analiz

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Leyla Vidadi qızı Nəsirova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Ziyatxan Seyfəddin oğlu Əliyev

Rəsmi opponentlər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Hidayət Məhəmməd oğlu Hüseynov

riyaziyyat elmlər doktoru, professor

Elnur Həsən oğlu Xəlilov

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

Elçin Camal oğlu İbadov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri:

AMEA-nın müxbir üzvü, f-r.e.d., professor

_____ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:

f.r.e.n.

_____ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, f-r.e.d., professor

_____ **Bilal Telman oğlu Bilalov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi: Dissertasiya işi indefinit çəki funksiyalarına malik qeyri-xətti Şturm-Liuvil məsələlərinin həllərinin sıfırdan və sonsuzluqdan birtərəfli bifurkasiyasının öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Dəyişən işarəli çəki funksiyasına malik Şturm-Liuvil tənliyi üçün qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələləri son zamanlar daha intensiv öyrənilməyə başlanılmışdır, çünki bu məsələlər populyasiya genetikasında seleksiya–miqrasiya modellərindən yaranır, burada çəki funksiyası ətraf mühitin populyasiyanın genləri üzərində seçici qüvvəsini ifadə edir. Qeyd edək ki, populyasiya genetikası biologiyanın populyasiyanın genetik strukturunu və təkamülünü öyrənən mühüm bölmələrindən biridir. Populyasiya genetikasının ekologiya, demoqrafiya, epidemiologiya, filogeniya və molekulyar təkamül ilə sıx əlaqələri var. Populyasiya genetikası əsasən insan genetikasında və tibbdə, həmçinin heyvan və bitkilərin seleksiyasında istifadə edilir.

Definit çəki funksiyalarına malik qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin sıfırdan birtərəfli qlobal bifurkasiyası P.Q. Rabinoviç, A.Berestitski, K.Şmidt və H.L. Smit, İ. Prijibitsin, B.P. Rinni, Z.S.Əliyev, Q. Day və R. Ma, Z.S. Əliyev və G.M. Məmmədova tərəfindən ətraflı öyrənilmişdir. Bu müəlliflər həllərin $R \times C^1$ -də trivial həllər əyrisinin nöqtələri və parçalarından (xətti Şturm-Liuvil məsələsinin məxsusi ədədlərinə uyğun) budaqlanan və adi osillyasiya xassələrinə malik funksiyalar sinfində yerləşən iki sinif qeyri-məhdud kontinuumlarını varlığını isbat etmişlər.

Qeyd edək ki, C.F. Toland, K.A. Stuart, P.Q. Rabinoviç, E.N. Danser, İ. Prijibitsin, B.P. Rinni, Q. Day və R. Ma öz işlərində işarəsi dəyişməyən çəki funksiyasına malik Şturm-Liuvil tənliyi üçün qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin həllinin sonsuzluqdan qlobal bifurkasiyasını öyrənmişlər. Onlar trivial olmayan həllərin $R \times \{\infty\}$ -un xətti Şturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədlərinə uyğun nöqtələri və parçalarından budaqlanan və adi nodal xassələrə malik

funksiyalar siniflərində yerləşən iki kontinuumlar ailəsinin varlığını müəyyən etmişlər. Definit çəki funksiyasına malik dördüncü tərtib qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələləri üçün Z.S.Əliyev, Z.S.Əliyev və N.A.Mustafayeva tərəfindən alınmışdır. Qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda göstərilən işlərdə tədqiq olunan qeyri-xətti məsələlərin həllərinin bifurkasiyasını öyrənərkən xətti məsələlərin ossilyasiya xassələri mühüm rol oynayır.

Dəyişən işarəli çəki funksiyasına malik xətti Şturm-Liuvill məsələsi keçən əsrin əvvəllərində E.L. Aynsın¹ kitabında öyrənilmişdir, belə ki, orada isbat edilmişdir ki, bu məsələnin spektri sadə məxsusi ədədlərin iki müsbət sonsuz artan və mənfi sonsuz azalan ardıcılığından ibarətdir. Bundan əlavə, o müəyyən etmişdir ki, həm müsbət, həm də mənfi məxsusi ədədlərə uyğun gələn məxsusi funksiyalar Şturmun adi ossilyasiya xassələrinə malikdirlər. Bu xassələrdən başqa, V. Alleqretto və A.Minqarelli, P.A.Bindingq, və P.J.Braun, P.A.Bindingq və X.Folkmer, indefinit çəki funksiyasına malik Şturm-Liuvill məsələlərinin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları üçün asimptotik düsturlar almışlar. P. Qess və T. Kato, Q.A. Afrouzi və K.C. Braun, V. Alleqretto və A.Minqarelli, A. Berestitskiy, C. Nirenberq və S.P.S. Varadxan, K.C. Braun və A. Tertikas, C. Flekinger və M.L. Lapidus, Yu. Lu və E.Yaniqada, Z.S.Əliyev və S.M.Həsənova, Z.S. Əliyev və R.A. Hüseynova, R. Ma, S. Qao və X. Xan tərəfindən indefinit çəki funksiyalarına malik ikinci tərtib xüsusi törəməli elliptik tip tənliklər və dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün xətti məxsusi qiymət məsələlərinin müsbət və mənfi baş məxsusi ədədlərinin (yəni oblastda müsbət olan məxsusi funksiyalara uyğun məxsusi ədədlər) varlığı müəyyən edilmişdir.

Dəyişən işarəli çəki funksiyalı ikinci tərtib xüsusi törəməli elliptik tip tənliklər üçün xəttiləşdirilə bilən qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin həllərinin global bifurkasiyası P. Qess və

¹Ince, E.L. Ordinary differential equations / E.L.Ince. – London: Longmans, Green, – 1927. – 558 p.

T. Kato, K.C. Braun, K.C. Braun və A. Tertikas, K.C.Braun və Yu. Çjan, R. Kontrell və K. Kosner, M. Delgado və A. Suares, B. Ko və K.C. Braun, Yu.Su, C. Vey və C. Şi, K.Umezu, Z.S.Əliyev və Ş.M. Həsənova tərəfindən öyrənilmişdir. Onlar tərəfindən həllərin müsbət funksiyalar siniflərində bifurkasiyası haqqında qlobal nəticələr alınmışdır. Dəyişən işarəli çəki funksiyalı dördüncü tərtib qeyri-xətti Şturm-Liuvil məsələlərinin həllərinin müsbət və mənfi funksiyalar siniflərində qlobal bifurkasiyası Z.S. Əliyev və R.A. Hüseynovanın, R. Ma, S. Qao və X. Xanın işlərində öyrənilmişdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, indefinit çəki funksiyalı qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin müsbət funksiyalar sinifində qlobal bifurkasiyası yalnız A. Boskaq və F.Zanolinin, v M. Fenkl və C. Lopes-Qomesin işlərində tədqiq edilmişdir.

Beləliklə, dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələləri üçün həllərin sıfırdan və sonsuzluqdan birtərəfli qlobal bifurkasiyasının öyrənilməsi aktualdır.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Hazırkı dissertasiyanın obyektini dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələləri, predmeti isə baxılan qeyri-xətti məsələlərin həllərinin sıfırdan və sonsuzluqdan birtərəfli qlobal bifurkasiyasıdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.

Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəzifəsi dəyişən işarəli çəki funksiyalara malik qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sıfırdan və sonsuzluqdan birtərəfli qlobal bifurkasiyasının öyrənilməsi.

Tədqiqatın metodları. İşdə adi diferensial tənliklər, adi diferensial tənliklərin spektral nəzəriyyəsi, qeyri-xətti funksional analiz və bifurkasiya nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilir.

Müdafiyyə çıxarılan əsas müddəalar:

– indefinit çəki funksiyalarına malik xəttilləşdirilmiş Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sıfırdan budaqlanan birtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturunu və davranışını öyrənmək;

– dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik Şturm-Liuvill tənliyi üçün xəttilləşdirilməyən məxsusi qiymət məsələlərinin trival həllər ayrısına nəzərən bifurkasiya nöqtələrinin strukturunu öyrənmək və

həllərinin birtərəfli qlobal bifurkasiyasını tədqiq etmək;

– indefinit çəkili asimptotik xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sonsuzluqdan budaqlanan birtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturunu və davranışını öyrənmək;

– dəyişən işarəli çəkilərə malik xəttiləşdirilə bilinməyən Şturm-Liuvill məsələlərinin asimptotik bifurkasiya nöqtələrinin strukturunu öyrənmək və həllərinin sonsuzluqdan qlobal bifurkasiyasını tədqiq etmək.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

– indefinit çəki funksiyalarına malik xəttiləşdirilmiş Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sıfırdan budaqlanan birtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturu və davranışı tamamilə öyrənilmişdir;

– dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik xəttiləşdirilməyən Şturm-Liuvill məsələlərinin trivial həllər əyrisinə nəzərən bifurkasiya nöqtələrinin strukturu öyrənilmiş və həllərinin birtərəfli qlobal bifurkasiyası tədqiq edilmişdir;

– indefinit çəkili asimptotik xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sonsuzluqdan budaqlanan birtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturu və davranışı öyrənilmişdir;

– dəyişən işarəli çəkilərə malik xəttiləşdirilə bilinməyən Şturm-Liuvill məsələlərinin asimptotik bifurkasiya nöqtələrinin strukturu öyrənilmiş və həllərinin sonsuzluqdan qlobal bifurkasiyası tədqiq edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İşdə alınmış nəticələr əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Bu nəticələr yüksək tərtibli adi diferensial tənliklər üçün qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin öyrənilməsi, populyasiya qenetikasında populyasiya və miqrasiya-seleksiya dinamikasının modelləşdirilməsi zamanı istifadə edilə bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işində alınmış nəticələr Sumqayıt Dövlət Universitetinin «Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi» kafedrasının seminarında (rəhbər: f.r.e.n., dos. N.T. Qurbanov), Bakı Dövlət Universitetinin «Riyazi analiz» kafedrasının seminarında (rəhbər: prof. R.A. Əliyev), Riyaziyyat və Mexanika

İnstitutunun «Funksional analiz» (rəhbər: prof. H.İ. Aslanov) və «Diferensial tənliklər» (rəhbər: prof. Ə.B.Əliyev) şöbələrinin seminarlarında, eləcə də Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94 illik yubileyinə həsr edilmiş «Riyaziyyat və mexanikanın aktual məsələləri» adlı Respublika elmi konfransında (BDU, Bakı, 2017), Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illiyinə həsr edilmiş Beynəlxalq elmi konfransda (SDU, Sumqayıt, 2017), akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş «Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri» adlı Beynəlxalq konfransda (RMİ, Bakı, 2017), RMİ-nin 60 illiyinə həsr edilmiş «Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri» adlı Beynəlxalq konfransda (RMİ, Bakı 2019), «Riyaziyyatın fundamental məsələləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi» adlı Respublika elmi konfransında (SDU, Sumqayıt, 2020), Voronej qış riyaziyyat məktəbinin keçirdiyi «Funksiyalar nəzəriyyəsinin müasir metodları və əlaqəli məsələlər» adlı Beynəlxalq konfransda (Voronej, Rusiya, 2021), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 99 illik yubileyinə həsr edilmiş «Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri» adlı Respublika elmi konfransında (BDU, Bakı, 2022) məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhvəsi tədqiqatın məqsədini formalaşdırmaqdadır. Bundan əlavə bütün tədqiqat nəticələri müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK-ın tövsiyə etdiyi nəşrlərdə 5 məqalə (2-WoS, 2-Scopus), konfrans materialı - 7 (4-beynəlxalq konfrans, onlardan 1-i xaricdə, 3-respublikada keçirilmişdir) nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Sumqayıt Dövlət Universitetinin “Riyazi analiz və funksiyalar nəzəriyyəsi” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi – 201055 işarədir (titul səhifəsi – 377 işarə, mündəricat – 2062 işarə, giriş – 49577 işarə, birinci fəsil – 88000 işarə, ikinci fəsil – 60000 işarə, nəticə -1039 işarə). İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı 67 adda ədəbiyyatdan ibarətdir.

DİSSERTASIYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticə və istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

6 paraqraftan ibarət olan I fəsildə indefinit çəki funksiyalarına malik xəttiləşdirilmiş və xəttiləşdirilməmiş Şturm-Liuvill məsələlərin həllərinin sıfırdan birtərəfli qlobal bifurkasiyası tədqiq edilir. Həllərin trivial həllər əyrisinin nöqtələrindən və parçalarından budaqlanan və Şturmun adi osilyasiya xassələrinə malik funksiyalar sinfində yerləşən dörd kontinumlar ailəsinin varlığı isbat edilmişdir.

1.1-də məsələnin qoyuluşu verilir və bu fəslin məqsədi şərh olunur.

Aşağıda qeyri-xətti Şturm-Liuvill məsələsinə baxaq:

$$\ell(u) \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda\rho(x)u + h(x, u, u', \lambda), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\alpha_0 u(0) - \beta_0 u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0, \quad (3)$$

burada $\lambda \in R$ spektral parametr, $p(x)$ $[0, 1]$ -də müsbət kəsilməz diferensiallanan funksiya, $q(x)$ $[0, 1]$ -də mənfi olmayan kəsilməz funksiya, $\rho(x)$ $[0, 1]$ -də işarəsi dəyişən kəsilməz funksiya, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ elə həqiqi sabitlərdir ki,

$$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0, \quad |\alpha_1| + |\beta_1| > 0 \quad \text{və} \quad \alpha_0\beta_0 \geq 0, \quad \alpha_1\beta_1 \geq 0,$$

şərtlərini ödəyirlər. Bundan başqa, h funksiyası $h = f + g$ şəklində göstərilə bilər, belə ki, burada f və g funksiyaları $[0, 1] \times R^2 \times R$ -də həqiqi və kəsilməzdirlər və aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

$$u f(x, u, s, \lambda) \leq 0, \quad u g(x, u, s, \lambda) \leq 0, \quad (x, u, s, \lambda) \in [0, 1] \times R^2 \times R; \quad (4)$$

Elə $M > 0$ və $\chi > 0$ sabitləri (χ kifayət qədər kiçik ola bilər) var ki,

$$|f(x, u, s, \lambda)/u| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad (u, s) \in R^2,$$

$$|u| + |s| \leq \chi, \quad u \neq 0, \quad \lambda \in R; \quad (5)$$

hər bir məhdud $\Lambda \subset R$ aralığı üçün $x \in [0, 1]$ və $\lambda \in \Lambda$ nəzərən

müntəzəm olaraq

$$(u, s) = (0, 0) \text{ nöqtəsinin ətrafında } g(x, u, s, \lambda) = o(|u| + |s|). \quad (6)$$

Əgər

$$p \equiv 1 \text{ və } g(x, u, s, \lambda) = \lambda \rho(x)[u - m(u)],$$

olarsa, burada

$$m(u) = u(1-u)[h_0(1-u) + (1-h_0)u],$$

h_0 isə müəyyən sabitdir, onda (1) tənliyi bir-ölçülü reaksiya-diffuziya tənliyini ifadə edir, $[0, 1]$ parçası fərdlərin yaşayış yerinə uyğundur, $\beta_0 = \beta_1 = 0$ olduqda (2) və (3) sərhəd şərtləri heç bir fərdin yaşayış sərhədini keçmədiyini bildirir. Bundan əlavə, $\rho(x)$ çəki funksiyası ya ətraf mühitin genlər üzərində seçici qüvvəsini, ya da x məkanında növlərin daxili artım sürətini ifadə edir, həqiqi λ parametri isə diffuziya əmsalının tərs kəmiyyətinə uyğundur.

(5) və (6) şərtləri ödənilməyindən trivial həllər əyrisindən bifurkasiyaya baxılır. $\rho(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, olduqda (1)-(3) qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələsinin həllərinin qlobal bifurkasiyası (5) və (6) (şərti daxilində (4) və $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $i = 0, 1$ şərtləri ödənilmədikdə) Z.S. Əliyevin, A. Berestitskinin, G. Dai və R. Manın, I. Prjibitsinin, P. Rabinoviçin, B.P. Rinninin, L. Şmidt və H.L. Smitin işlərində baxılmışdır. Bu işlərdə $R \times C^1$ -də trivial olmayan həllərin trivial həllər əyrisinin nöqtələrindən və parçalarından budaqlanan və adi osillyasiya xassələrinə malik funksiya siniflərində yerləşən iki qeyri-məhdud kontinumlar ailəsinin varlığı göstərilmişdir. Dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələləri üçün oxşar nəticələr Z.S. Əliyev tərəfindən alınmışdır.

Bu fəslin məqsədi trivial həllər əyrisi üzərində bifurkasiya nöqtələrinin və parçalarının yerləşmə qaydasını və (1)-(3) məsələsinin trivial olmayan həllərinin qlobal kontinumlarının strukturlarını öyrənməkdir.

1.2-də (1)-(3) məsələsinin həllərinin qlobal bifurkasiyasının öyrənilməsində fundamental rol oynayan $S_{k, \sigma}^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma, \nu \in \{+, -\}$,

sınıfları qurulur.

(1)-(3) məsələsindən $h \equiv 0$ olduqda alınan

$$\begin{cases} \ell(u)(x) = \lambda \rho(x)u(x), 0 < x < 1, \\ y \in B.C., \end{cases} \quad (7)$$

xətti məsələsinə baxaq, burada $B.C.$ ilə (2) və (3) sərhəd şərtlərini ödəyən funksiyalar çoxluğu işarə edilmişdir.

(7) məsələsinin məxsusi ədədlərinin və məxsusi funksiyalarının xassələri E.İ. Aynsın¹ kitabında tədqiq edilmişdir və xüsusi halda aşağıdakı nəticə alınmışdır.

Teorem 1. (7) xətti spektral məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir, sadədir və onlar uyğun olaraq iki mənfi qeyri-məhdud azalan və müsbət qeyri-məhdud artan $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ və $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ ardıcılıqlarından ibarətdir, belə ki,

$$\dots < \lambda_k^- < \dots < \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \dots < \lambda_k^+ < \dots .$$

Bundan əlavə, hər bir $k \in \mathbb{N}$ üçün λ_k^- və λ_k^+ məxsusi ədədlərinə uyğun $u_k^-(x)$ və $u_k^+(x)$ məxsusi funksiyalarının $(0, 1)$ intervalında düz $k - 1$ sayda sadə sıfır mövcuddur.

Qeyd 1. $C[0, 1]$ kəsilməz funksiyalar sinfi $L^1[0, 1]$ -də hər yerdə sıx olduğundan teorem 1-in hökmü $q \in L^1[0, 1]$ olduqda da doğrudur.

Lemma 1. Hər bir $k \in \mathbb{N}$ üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho(x)(u_k^+(x))^2 dx &> 0, \\ \int_0^1 \rho(x)(u_k^-(x))^2 dx &< 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Tutaq ki,

$$E = C^1[0, 1] \cap B.C.$$

adi

$$\|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

normalı Banax fəzasıdır, burada

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |u(x)|.$$

Bundan sonra nəzərə alacağıq ki, σ (uyğun olaraq ν) ya $+$, ya da $-$ işarəsini ifadə edəcək; $-\sigma$ (uyğun olaraq $-\nu$) isə σ -ya əks işarəni (uyğun olaraq ν -yə əks işarəni) ifadə edəcək.

Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün $S_{k,\sigma}^\nu$ ilə aşağıdakı şərtləri ödəyən $u \in E$ funksiyalar çoxluğunu işarə edək:

(a) $u(x)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında yalnız sadə sıfırlara malikdir və onun $(0, 1)$ intervalında düz $k-1$ sayda sıfırı var;

$$(b) \int_0^1 \rho(x) u^2(x) dx > 0;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \nu \operatorname{sgn} u(x) = 1.$$

Tutaq ki,

$$S_{k,\sigma} = S_{k,\sigma}^- \cup S_{k,\sigma}^+, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Teorem 1-ə və lemma 1-ə əsasən $S_{k,\sigma}^-$, $S_{k,\sigma}^+$ və $S_{k,\sigma}$, $k \in \mathbb{N}$, çoxluqları boş deyillər. Bu çoxluqlarının təriflərindən çıxır ki, onlar E -də açıq altçoxluqlardır. Bundan başqa, əgər $(k, \sigma, \nu) \neq (k, \sigma, \nu)$, olarsa, onda

$$S_{k,\sigma}^\nu \cap S_{k',\sigma'}^{\nu'} = \emptyset$$

olar.

Lemma 2. Əgər $u \in \partial S_{k,\sigma}^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, olarsa, onda ya

(a) elə bir $\xi \in [0, 1]$ nöqtəsi var ki, $u(\xi) = u'(\xi) = 0$, ya da

$$(b) \int_0^1 \rho(x) u^2(x) dx = 0.$$

1.3 yarım fəslində (1)-(3) məsələsi tamam kəsilməz operatorlar (daha dəqiq desək inteqral operatorlar) iştirak edən qeyri-xətti operator tənliyə gətirilir. Bu tənliyə xəttləşdirilə bilən qeyri-

xətti məxsusi qiymət məsələlərinin qlobal bifurkasiyası haqqında P. Rabinoviçin² və E.Danserin³ məlum nəticələrini tətbiq etmək olar.

1.4-də $f \equiv 0$ olduqda (1)-(3) məsələsinin həllərinin birtərəfli qlobal bifurkasiyası tədqiq edilir.

Tutaq ki,

$$R^+ = (0, +\infty) \text{ və } R^- = (-\infty, 0).$$

Aşağıdakı teorem doğrudur

Teorem 2. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$ və hər bir σ üçün (1)-(3) məsələsinin $f \equiv 0$ olduqda həllərinin elə $C_{k,\sigma}^+$ və $C_{k,\sigma}^-$ kontinuumları var ki, onlar $(\lambda_k^\sigma, 0)$ nöqtəsini özlərində saxlayırlar, uyğun olaraq*

$$(R^\sigma \times S_{k,\sigma}^+) \cup \{(\lambda_k^\sigma, 0)\} \text{ və } (R^\sigma \times S_{k,\sigma}^-) \cup \{(\lambda_k^\sigma, 0)\}$$

çoxluqlarında yerləşirlər və $R^\sigma \times E$ -də qeyri-məhdudurlar.

Teoremi isbat etmək üçün aşağıdakı təkliflərdən istifadə edilir.

Lemma 3. *Tutaq ki, $(\lambda, u) \in R \times E$ (1)-(3) məsələsinin trivial olmayan həllidir. Onda*

$$\lambda \int_0^1 \rho(x) y^2(x) dx \neq 0.$$

Lemma 4. *Əgər $(\lambda, u) \in R \times E$ (1)-(3) məsələsinin $u \in \partial S_{k,\sigma}^v$ şərtini ödəyən həllidirsə, onda $u \equiv 0$.*

1.5 yarımfaslində indefinit çəkili xətti Ştrum-Liuvill məsələsinin bəzi həyəcənlanmalarının məxsusi ədədlərinin xassələri öyrənilir.

(7) məsələsi ilə yanaşı aşağıdakı xətti məxsusi qiymət məsələsinə baxaq:

$$\begin{cases} \ell(u)(x) + \psi(x)u(x) = \lambda \rho(x)u(x), & x \in (0, 1), \\ u \in B.C., \end{cases} \quad (9)$$

²Rabinowitz, P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Function. Anal., – 1971. v.7, no.3, – p. 487–513.

³Dancer, E.N. On the structure of solutions of nonlinear eigenvalue

problems // Ind. Univ. Math. J., – 1974. v.23, no.11, – p. 1069–1076.
burada

$$\psi \in C[0, 1] \quad \text{və} \quad \psi(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1].$$

E.İ. Aynsin¹ kitabındakı nəticəyə əsasən (9) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidirlər, sadədirlər və onlar iki mənfi qeyri-məhdud azalan və müsbət qeyri-məhdud artan $\{\lambda_{k,\psi}^-\}_{k=1}^\infty$ və $\{\lambda_{k,\psi}^+\}_{k=1}^\infty$ ardıcılıqlardan ibarətdirlər, belə ki,

$$\dots < \lambda_{k,\psi}^- < \dots < \lambda_{2,\psi}^- < \lambda_{1,\psi}^- < 0 < \lambda_{1,\psi}^+ < \lambda_{2,\psi}^+ < \dots < \lambda_{k,\psi}^+ < \dots$$

Biz

$$M_\psi = \sup_{x \in [0,1]} \psi(x)$$

işarələməsi aparaq. Sonra λ_{k,M_ψ}^+ və λ_{k,M_ψ}^- , $k \in \mathbb{N}$, ilə uyğun olaraq

$$\begin{cases} \ell(u)(x) + M_\psi u(x) = \lambda \rho(x) u(x), & x \in (0, 1), \\ u \in B.C. \end{cases} \quad (10)$$

xətti məsələsinin k -cı müsbət və mənfi məxsusi ədədlərini işarə edək.

(1)-(3) məsələsinin həllərinin qlobal bifurkasiyasını öyrənmək üçün bizə aşağıdakı hökmlər lazım olacaq.

Lemma 5. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$ üçün*

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &\leq \lambda_{k,\psi}^+ \leq \lambda_{k,M_\psi}^+, \\ \lambda_{k,M_\psi}^- &\leq \lambda_{k,\psi}^- \leq \lambda_k^- \end{aligned} \quad (11)$$

münasibətləri doğrudur.

Lemma 6. *Aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:*

$$\lambda_{1,\psi}^+ - \lambda_1^+ \leq \frac{M_\psi \int_0^1 (u_1^+(x))^2 dx}{\int_0^1 \rho(x) (u_1^+(x))^2 dx},$$

$$\lambda_{1,\psi}^+ - \lambda_1^+ \leq - \frac{M_\psi \int_0^1 (u_1^-(x))^2 dx}{\int_0^1 \rho(x) (u_1^-(x))^2 dx}.$$

Qeyd 2. Qeyd 1-ə əsasən lemma 5 və lemma 6-nın hökmləri $\psi \in L^1[0, 1]$ olduqda da doğrudurlar.

1.6-da f funksiyası eyniliklə sıfıra bərabər olmadığı halda (1)-(3) məsələsinin həllərinin sıfırdan birtərəfli qlobal bifurkasiyası tədqiq edilir. Bu halda, (1)-(3) məsələsinin həllərinin trivial həllər əyrisinin parçalarından bifurkasiyası öyrənilir. Xatırladaq ki, əgər parçada ən azı bir bifurkasiya nöqtəsi varsa, onda bu parça bifurkasiya parçası adlanır.

Tutaq ki, $(\lambda, 0)$ nöqtəsi (1)-(3) məsələsinin bifurkasiya nöqtəsidir və elə

$$\{(\lambda_{n,k,\sigma}^v, u_{n,k,\sigma}^v)\}_{n=1}^\infty \subset (C \cap (R^\sigma \times S_{k,\sigma}^v))$$

ardıcılığı var ki, $n \rightarrow +\infty$ olduqda

$$\lambda_{n,k,\sigma}^v \rightarrow \lambda, \|u_{n,k,\sigma}^v\|_1 \rightarrow 0.$$

Onda $(\lambda, 0)$ nöqtəsi (1)-(3) qeyri-xətti məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^v$ çoxluğu üzrə bifurkasiya nöqtəsi adlanır.

Aşağıdakı işarələnmələri aparaq:

$$d_1^\sigma = \frac{M \int_0^1 (u_1^\sigma(x))^2 dx}{\int_0^1 \rho(x) (u_1^\sigma(x))^2 dx},$$

$$I_1^+ = [\lambda_1^+, \lambda_1^+ + d_1^+], \quad I_1^- = [\lambda_1^- - d_1^-, \lambda_1^-],$$

$$I_1^+(\delta) = [\lambda_1^+ - \delta, \lambda_1^+ + d_1^+ + \delta], \quad I_1^-(\delta) = [\lambda_1^- - d_1^- - \delta, \lambda_1^- + \delta],$$

$$I_k^+ = [\lambda_k^+, \lambda_{k,M}^+], \quad I_k^- = [\lambda_{k,M}^-, \lambda_k^-],$$

$$I_k^+(\delta) = [\lambda_k^+ - \delta, \lambda_{k,M}^+ + \delta], \quad I_k^-(\delta) = [\lambda_{k,M}^- - \delta, \lambda_k^- + \delta], \quad k \geq 2,$$

burada δ – hər hansı müsbət ədəddir.

Lemma 7. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ , hər bir ν və hər bir kifayət qədər kiçik $r \in (0, \chi)$ üçün (1)-(3) məsələsinin elə bir $(\lambda_{k,\sigma,r}^\nu, u_{k,\sigma,r}^\nu)$ həlli və elə $\delta_{k,\sigma}^\nu > 0$ ədədi var ki,*

$$\lambda_{k,\sigma,r}^\nu \in I_k^\sigma(\delta_{k,\sigma}^\nu), \quad \|u_{k,\sigma,r}^\nu\|_1 = r \quad \text{və} \quad u_{k,\sigma,r}^\nu \in S_{k,\sigma}^\nu.$$

Nəticə 1. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün (1)-(3) məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə bifurkasiya nöqtələri çoxluğu boş deyil.*

Lemma 8. *Tutaq ki, $(\lambda, 0)$ nöqtəsi (1)-(3) məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə bifurkasiya nöqtəsidir. Onda $\lambda \in I_k^\sigma$.*

Tutaq ki, D çoxluğu (1)-(3) məsələsinin trivial olmayan həlləri çoxluğunun $R \times E$ -də qapanmasıdır. Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün $\tilde{D}_{k,\sigma}^\nu$ ilə D -nin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə $(\lambda, 0) \in I_k^\sigma \times \{0\}$ bifurkasiya nöqtələrindən budaqlanan bütün $D_{k,\sigma,\lambda}^\nu$ əlaqəlilik komponentlərinin birləşməsini işarə etmək. Qeyd etmək ki,

$$D_{k,\sigma}^\nu = \tilde{D}_{k,\sigma}^\nu \cup (I_k^\sigma \times \{0\})$$

çoxluğu $R \times E$ -də əlaqəli altçoxluğudur, lakin $\tilde{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu $R \times E$ -də əlaqəli olmaya bilər.

Bu fəsilin əsas nəticəsi aşağıdakından ibarətdir.

Teorem 3. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$ və hər bir σ üçün $D_{k,\sigma}^+$ və $D_{k,\sigma}^-$ uyğun olaraq*

$$(R^\sigma \times S_{k,\sigma}^+) \cup (I_k^\sigma \times \{0\}) \text{ u } (R^\sigma \times S_{k,\sigma}^-) \cup (I_k^\sigma \times \{0\})$$

çoxluqlarında yerləşirlər və $R \times E$ -də qeyri-məhdudurlar.

II fəsilə dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik sonsuzluqda xəttləşdirilən və xəttləşdirilməyən qeyri-xətti Şturm-Liu vill məsələlərinin birtərəfli qlobal bifurkasiyası öyrənilir. Məsələlərin həllərinin $R \times \{\infty\}$ -un nöqtə və parçalarından budaqlanan və bu nöqtə və parçaların ətraflarında $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^v$ çoxluqlarına daxil olan dörd sinif qeyri-məhdud kontinuumlarının varlığı isbat edilir.

2.1-də indefinit çəki funksiyasına malik qeyri-xətti Şturm-Liu vill məsələlərində sonsuzluqdan bifurkasiya məsələsinin qoyuluşu şərh edilir. Burada (1)-(3) qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələsinin tədqiqi davam etdirilir, belə ki, $[0, 1] \times R^2 \times R$ -də kəsilməz həqiqi qiymətli f və g funksiyaları (4) şərti ilə yanaşı aşağıdakı şərtləri ödəyirlər: elə $M > 0$ sabiti var ki,

$$\left| \frac{f(x, u, s, \lambda)}{u} \right| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad (u, s) \in R^2, \quad u \neq 0, \quad \lambda \in R; \quad (12)$$

hər bir məhdud $\Lambda \subset R$ aralığı üçün $x \in [0, 1]$ və $\lambda \in \Lambda$ -ya nəzərən müntəzəm olaraq $(u, s) = \infty$ nöqtəsinin ətrafında

$$g(x, u, s, \lambda) = o(|u| + |s|). \quad (13)$$

2.2-də $f \equiv 0$ olduqda (1)-(3) məsələsinin həllərinin sonsuzluqdan birtərəfli qlobal bifurkasiyası məsələsi tədqiq edilir.

Qeyd 3. $\{(\lambda, \infty) : \lambda \in R\}$ sonsuz nöqtələri $R \times E$ fəzasına əlavə edib alınan çoxluqda uyğun topologiyani müəyyən edək. Onda hər bir $\lambda \in R$ üçün (λ, ∞) nöqtəsi $R \times E$ fəzasının elementi olacaq.

\hat{D} ilə (1)-(3) məsələsinin trivial olmayan həlləri çoxluğunu işarə edək. Bu fəslin əsas nəticələrindən biri aşağıdakı teoremdir.

Teorem 4. *Tutaq ki, $f \equiv 0$. Onda hər bir $k \in \mathbb{N}$ və hər bir σ üçün \hat{D} çoxluğunun elə $\hat{C}_{k,\sigma}^+$ və $\hat{C}_{k,\sigma}^-$ komponentləri və $(\lambda_k^\sigma, \infty)$ nöqtəsinin elə $\hat{Q}_{k,\sigma}$ ətrafı var ki,*

$$(a) \hat{C}_{k,\sigma}^+ \cap Q_{k,\sigma} \subset R^\sigma \times S_{k,\sigma}^+ \text{ və } \hat{C}_{k,\sigma}^- \cap Q_{k,\sigma} \subset R^\sigma \times S_{k,\sigma}^-;$$

(b) aşağıdakı hökmlərdən biri doğrudur:

(b1) $\hat{C}_{k,\sigma}^v \setminus Q_{k,\sigma}$ çoxluğu hər hansı $(k', v') \neq (k, v)$ üçün $(\lambda_{k'}^\sigma, \infty)$ nöqtəsinin $R^\sigma \times S_{k',\sigma}^v$ çoxluğu üzrə kəsir;

(b2) $\hat{C}_{k,\sigma}^v \setminus Q_{k,\sigma}$ çoxluğu R_0 əyrisini hər hansı $\lambda \in R$ üçün kəsir;

(b3) $\hat{C}_{k,\sigma}^v \setminus Q_{k,\sigma}$ çoxluğunun R_0 -a proyeksiyası qeyri-məhduddur, burada $R_0 = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R\}$.

2.3-də (1)-(3) məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^v$ çoxluğu üzrə asimptotik bifurkasiya nöqtələrinin varlığı isbat edilir.

Lemma 9. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$ hər bir σ , hər bir v və istənilən kifayət qədər böyük $R > 0$ ədədi üçün (1)-(3) məsələsinin elə $(\lambda_{k,\sigma,R}^v, u_{k,\sigma,R}^v)$ həlli var ki,*

$$\lambda_{k,\sigma,R}^v \in R^\sigma, u_{k,\sigma,R}^v \in S_{k,\sigma}^v \text{ və } \|u_{k,\sigma,R}^v\|_1 = R.$$

Tutaq ki, τ_0 qeyd olunmuş kifayət qədər kiçik müsbət ədəddir.

Nəticə 2. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ , hər bir v üçün elə kifayət qədər böyük müsbət $R_{k,\sigma}^v$ ədədi var ki, istənilən $R \geq R_{k,\sigma}^v$ ədədi üçün (1)-(3) məsələsinin elə (λ, u) , həlli var ki, aşağıdakı şərtləri ödəyir:*

$$\lambda \in I_k^\sigma(\tau_0), u \in S_{k,\sigma}^\nu \quad \text{və} \quad \|u\|_1 = R.$$

Xatırladaq ki, əgər istənilən kifayət qədər kiçik $r > 0$ ədədi üçün (1)-(3) məsələsinin elə $(\lambda_{k,\sigma,r}^\nu, u_{k,\sigma,r}^\nu)$ həlli varsa ki,

$$|\lambda_{k,\sigma,r}^\nu - \lambda_k^\sigma| < r, \quad \|u_{k,\sigma,r}^\nu\|_1 > \frac{1}{r} \quad \text{və} \quad \lambda_{k,\sigma,r}^\nu \in S_{k,\sigma}^\nu$$

münasibətlərini ödəsin, onda (λ, ∞) , $\lambda \in R^\sigma$, nöqtəsinə bu məsələnin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə asimptotik bifurkasiya nöqtəsi deyilir.

Lemma 9 və nəticə 2-yə əsasən aşağıdakı nəticə doğrudur.

Nəticə 3. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün (1)-(3) məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə asimptotik bifurkasiya nöqtələri çoxluğu boş deyil. Bundan əlavə, əgər $(\lambda, 0)$ nöqtəsi (1)-(3) məsələsinin $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə asimptotik bifurkasiya nöqtəsidirsə, onda $\lambda \in I_k^\sigma$.*

2.4-də f eyniliklə sıfır olmadığı halda (1)-(3) məsələsinin asimptotik bifurkasiya nöqtələrindən budaqlanan birtərəfli qlobal kontiniumların strukturu öyrənilir.

Tutaq ki, bər bir σ üçün

$$R_0^\sigma = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R^\sigma\}$$

və

$$R_\infty^\sigma = \{(\lambda, 0) : \lambda \in R^\sigma\}.$$

Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün $\hat{D}_{k,\sigma}^{\nu,*}$ ilə \hat{D} -nin $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ parçasından $R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə budaqlanan bütün komponentlərinin birləşməsini işarə edək. Bundan başqa, tutaq ki,

$$\hat{D}_{k,\sigma}^\nu = \hat{D}_{k,\sigma}^{\nu,*} \cup (I_k^\sigma \times \{\infty\}).$$

Bu fəslin əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 5. *Hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün $\hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu $R^\sigma \times E$ -də yerləşir və bu çoxluq üçün aşağıdakı hökmlərdən biri doğrudur:*

(a) *elə $(k', \nu') \neq (k, \nu)$ var ki, $\hat{D}_{k',\sigma}^\nu$ çoxluğu $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ parçasını $R^\sigma \times S_{k',\sigma}^\nu$ çoxluğu üzrə kəsir;*

(b) *elə $\lambda \in R^\sigma$ var ki, $\hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu R_0^σ əyrisini $(\lambda, 0)$ nöqtəsində kəsir;*

(c) *$\hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğunun R_0^σ -a $pr_{R_0^\sigma} \hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ proyeksiyası qeyri-məhduddur.*

2.5 yarımfəslində (1)-(3) qeyri-xətti məsələsinin həllərinin global bifurkasiyası (4), (6), (12) və (13) şərtləri daxilində tədqiq edilir, belə ki, bu halda teorem 3 və teorem 5 aşağıdakı kimi gücləndirilir.

Teorem 6. *Tutaq ki, (4), (6), (12) və (13) şərtləri ödənilir. Onda hər bir $k \in \mathbb{N}$, hər bir σ və hər bir ν üçün $\hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu $(R^\sigma \times S_{k,\sigma}^\nu) \cup (I_k^\sigma \times \{\infty\})$ -də yerləşir və ona görə də teorem 5-in (a) alternativini ödənilmir. Bundan əlavə, $\hat{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu R_0^σ -ı hər hansı $(\lambda, 0) \in R^\sigma$ nöqtəsində kəsərsə, onda $\lambda \in I_k^\sigma$, əgər $\tilde{D}_{k,\sigma}^\nu$ çoxluğu R_∞^σ -ı hər hansı $(\lambda, \infty) \in R^\sigma$ nöqtəsində kəsərsə, onda $\lambda \in I_k^\sigma$ olur.*

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində indefinit çəki funksiyalarına malik qeyri-xətti Şturm-Liuvil məsələlərinə baxılır. Qeyd edək ki, bu tip qeyri-xətti məsələlər populyasiya genetikasında seleksiya-miqrasiyanın modelləşdirilməsi zamanı yaranır. Burada bu qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin həllərinin sıfırdan və sonsuzluqdan birtərəfli bifurkasiyası tədqiq edilir.

İşdə aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

– indefinit çəki funksiyalarına malik xəttləşdirilmiş Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sıfırdan budaqlanan bərtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturu və davranışı tamamilə öyrənilmişdir;

– dəyişən işarəli çəki funksiyalarına malik xəttləşdirilməyən Şturm-Liuvill məsələlərinin trivial həllər əyrisinə nəzərən bifurkasiya nöqtələrinin strukturu öyrənilmiş və həllərinin birtərəfli qlobal bifurkasiyası tədqiq edilmişdir;

– indefinit çəkili asimptotik xətti Şturm-Liuvill məsələlərinin həllərinin sonsuzluqdan budaqlanan birtərəfli qlobal kontinuumlarının strukturu və davranışı öyrənilmişdir;

– dəyişən işarəli çəkilərə malik xəttləşdirilə bilinməyən Şturm-Liuvill məsələlərinin asimptotik bifurkasiya nöqtələrinin strukturu öyrənilmiş və həllərinin qlobal bifurkasiyası tədqiq edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Nəsirova, L.V. İndefinit çəkili Sturm-Liuvill məsələsinin məxsusi ədədlərinin həyəcanlanmaları // “Riyaziyyatın fundamental problemləri və intellektual texnologiyaların təhsildə tətbiqi” adlı Respublika elmi konfransının materialları, – Sumqayıt: – 2020, – s. 51-52.
2. Алиев, З.С., Ашурова, Л.В. О бифуркации решений нелинейной задачи Штурма-Лиувилля с индефинитным весом // Материалы международной научной конференции посвященной 55-летию юбилею Сумгаитского Государственного Университета, – Сумгаит: – 2017, – s. 56-57.
3. Насирова, Л.В. Глобальная бифуркация решений нелинеаризуемой задачи Штурма-Лиувилля с индефинитным весом // Azərbaycan xalqının Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri” adlı respublika elmi konfransı, Bakı: – 2017, – s. 160–162.
4. Насирова, Л.В. Глобальная бифуркация решений из бесконечности нелинейной задачи Штурма-Лиувилля с индефинитной весовой функцией // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы», – Воронеж, Россия: 2021, – с. 224–226.
5. Насирова, Л.В. Структура и поведение глобальных континуумов решений нелинеаризуемой задачи Штурма-Лиувилля // Azərbaycan Xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 99-cu ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" Respublika elmi konfransının materialları, – Bakı: – 2022, – s. 318–319.
6. Aliev, Z.S., Nasirova (Ashurova) L.V. Bifurcation of positive and negative solutions of nonlinearizable Sturm-Liouville problems with indefinite weight // Miskolc Math. Notes, – 2020. v. 21, no. 1, – p. 19–29.

7. Aliyev, Z.S., Nasirova L.V. Bifurcation from zero or infinity in nonlinearizable Sturm–Liouville problems with indefinite weight // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equat., – 2021. no. 55, – p. 1–16.
8. Ashurova, L.V. Global bifurcation of solutions for the problem of population modeling // Caspian J. Appl. Math., Ecol. Econ., – 2017. v. 5, no. 1, – p. 65–71.
9. Nasirova, L.V. Some global results for nonlinearizable Sturm–Liouville problem with indefinite weight // Akademik Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri” Beynəlxalq konfransın materialları, – Bakı: – 2017, – s. 33–34.
10. Nasirova, L.V. Global bifurcation of solutions of nonlinear Sturm–Liouville problems with indefinite weight // AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60-illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın Müasir Problemləri" Beynəlxalq konfransın materialları, – Bakı: – 2019, – s. 409–411.
11. Nasirova, L.V. Global bifurcation from intervals of solutions of nonlinear Sturm–Liouville problems with indefinite weight // Bakı: Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math., – 2019. v. 39, no. 4, – p. 148–154.
12. Nasirova, L.V. Global bifurcation from intervals in nonlinear Sturm–Liouville problem with indefinite weight function // Bakı: Proc.Inst. Math. Mech., Nat. Acad. Sci. Azerb., – 2021. v. 47, no. 2, – p. 346–356

Məsələnin qoyuluşuna və daim diqqətə görə müəllif elmi rəhbəri professor Ziyatxan Əliyevə öz dərin minnətdarlığını bildirir.

Dissertasiyanın müdafiəsi **03 may 2024-cü il** tarixində saat **14⁰⁰**-da Elm və Təhsil Nazirliyinin Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı ş., B. Vahabzadə küç., 9

Dissertasiya ilə Elm və Təhsil Nazirliyinin Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür..

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Elm və Təhsil Nazirliyinin Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **29 mart 2024-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 19.02.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 35352
Tiraj: 30