AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

POPULYASİYANIN DİNAMİKASININ OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

İxtisas: 1214.01- Dinamik sistemlər və optimal idarəetmə

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Aygün İsvahan qızı Ağamalıyeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı-2024

Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin “Riyazi kibernetika” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Kamil Bayraməli oğlu Mənsimov

Rəsmi opponentlər:

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Misrəddin Allahverdi oğlu Sadıqov

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Fikrət Gülləli oğlu Feyziyev

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Rəşad Oqtay oğlu Məstəliyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi

______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Hamlet Fərman oğlu Quliyev**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Riyazi modellər müəyyən populyasiyaların dəyişməsi və inkişafını öyrənməyə kömək edir. Ekologiya və biologiyanın ən vacib məsələlərindən biri də bioloji resurslardan rasional istifadə olunmasıdır. Müxtəlif resurslardan səmərəli, başqa sözlə desək, müəyyən mənada optimal istifadə olunması məsələləri müxtəlif tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə gətirir.

Müasir dövrdə populyasiyaların dinamikasının optimal idarə olunması məsələləri riyazi ekologiya və biologiyanın ən vacib məsələlərindəndir. A.V.Bukinanın, O.İ.İlyinin, Y.A.Kuznetsovun, A.S.Platovun, A.Belyakovun, A.İ.Abakumovun, A.V.Arquçinsevin və başqalarının işlərində populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunmasına həsr olunmuş müxtəlif optimal idarəetmə məsələləri tədqiq edilmişdir. Onu da qeyd edək ki, populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunmasının keyfiyyət nəzəriyyəsinin işlənməsi baxılan məsələlərin konstruktiv həll üsulunu yaratmağa imkan verir ki, bu da prinsipcə baxılan məsələni həll etməyə kömək edir.

Bəzi populyasiyaların dinamikasını təsvir edən bir çox riyazi modellər adekvat və mürəkkəb olaraq öyrənilən prosesləri kifayət qədər dəqiq olaraq xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə, iki ölçülü inteqro-diferensial tənliklərlə və onların fərq analoqları ilə təsvir edirlər. Lakin bu tipli tənliklərlə təsvir olunan və populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunmasına həsr olunmuş optimal idarəetmə məsələlərinin keyfiyyət nəzəriyyəsi hələ çox az öyrənilmişdir.

Buna görə də populyasiyanın dinamikasının bəzi sinif optimal idarə olunması məsələlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin taplmasına həsr olunmuş dissertasiya işinin mövzusunun aktual hesab etmək olar. Dissertasiyada baxılan optimal idarəetmə məsələləri bir çox xüsusiyyətlərinə görə məlum işlərdə baxılan optimal idarəetmə məsələlərindən fərqlidirlər.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Təqdim olunan dissertasiya işi populyasiyanın dinamikası ikiölçülü birtərtibli inteqro-diferensial tənliklər sistemi və onların diskret analoqları ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Dissertasiya işinin predmeti baxılan bir sıra kəsilməz və diskret optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər almaqdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin məqsədi bəzi sinif populyasiyanın dinamikasının diskret və kəsilməz optimal idarə olunması məsələlərinin tədqiq olunması və baxılan optimal idarəetmə məsələlərində müxtəlif optimallıq şərtləri tapmaqdır.

Tədqiqat metodları. Tədqiqat işində istifadə edilən üsullar variasiya hesabının, diferensial və inteqro-diferensial tənliklər və onların fərq analoqlarının, optimal proseslərin riyazi aparatına əsaslanırlar.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Populyasiyanın dinamikasının təsvir edən inteqro-diferensial tənliklər və onların fərq analoqları ilə təsvir olunan kəsilməz və diskret optimal idarə məsələlərində optimallıq üçün zəruri şərtlər və bəzi hallarda kafi şərtlər tapılmışdır.

Koşi matrisinin və rezolventanın analoqunu daxil etmək üsulu ilə inteqro-diferensial tənliklər sistemi və onun diskret analoqu üçün həllin göstəriliş düsturu tapılmışdır.

Tədqiqatın elmi yeniliyi.

- İlk dəfə olaraq baxılan kəsilməz və diskret optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün maksimum prinsipi şəklində zəruri şərt, xətti halda isə həm zəruri, həm də kafi şərtlər tapılmışdır.
- Funksional bərabərsizlik olan halda optimallıq üçün yeni zəruri şərt tapılmışdır.
- Əlavə məhdudiyyətlər daxilində kəsilməz və diskret optimal idarəetmə məsələlərində xəttiləşdirilmiş maksimum şərti və Eyler tənliyinin analoqu formasında optimallıq şərtləri alınmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Amma alınmış nəticələr həm populyasiyanın dinamikasının optimal idarəetmə məsələlərinin keyfiyyət və konstruktiv nəzəriyyəsinin daha da işlənilməsində, həm də meydana çıxan uyğun konkret tətbiqi optimal idarəetmə məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işində alınmış nəticələr Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi kibernetika" kafedrasının seminarlarında, AMEA İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun "Mürəkkəb dinamik sistemlərdə idarəetmə" laboratoriyasının seminarında, Sumqayıt Dövlət Universitetinin "Diferensial tənliklər və optimallaşdırma" kafedrasının seminarında məruzə və müzakirə edilmişdir. Bundan başqa işin nəticələri prof. Ə.Ş.Həbibzadənin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı respublika elmi konfransında (Bakı, 2016) və Azərbaycan, Türkiyə və Ukraynanın birgə layihəsi olan "Riyazi analiz, diferensial tənliklər və onların tətbiqləri" (Madea-7) adlı VII beynəlxalq konfransında (Бакı, 2015), "Dinamik sistemlər, optimal idarəetmə və riyazi modelləşdirmə" adlı beynəlxalq konfransında (İrkutsk, 2019), "Control and Optimization with Industrial Applications" (COİA) adlı V və VIII beynəlxalq konfranslarda (Бакı, 2015, 2022) məruzə və müzakirə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhvəsi. Dissertasiya işində alınmış bütün nəticələr müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi jurnallarda 12 məqalə (4-ü xaricdə olmaqla), 2 beynəlxalq konfrans materialı və 4 tezis nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi kibernetika" kafedrası.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işinin ümumi həcmi 234766 işarədir (titul səhifəsi - 393 işarə, mündəricat - 4802 işarə, giriş - 41571 işarə, birinci fəsil - 24000 işarə, ikinci fəsil - 114000 işarə, üçüncü fəsil - 50000 işarə). İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı 75 addan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə dissertasiya işinin mövzusuna aid olan nəticələrin kiçik icmalı verilmiş, mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış və alınmış nəticələrin qısa xülasəsi verilmişdir.

Dissertasiya işinin **birinci fəsli** iki paraqrafdan ibarət olub iki sinif xətti tənliklər sistemi üçün qoyulmuş Koşi məsələsinin həllinin göstərilişinin alınmasına həsr olunmuşdur.

Paraqraf 1.1-də:

$$z_t(t,x) = A(t,x)z(t,x) + B(t,x)y(t,x) + f(t,x),$$
$$(t,x) \in D = [t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{1}$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} [C(t,x,s)z(t,s) + g(t,x,s)]ds, \quad (t,x)\in D, \tag{2}$$

$$z(t_0,x) = a(x), \ x \in [x_0,x_1] \tag{3}$$

məsələsinə baxılmışdır.

Burada $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x,s)$ verilmiş $(n\times n)$ ölçülü, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz matris funksiyalar, $f(t,x)$ və $g(t,x,s)$ verilmiş $n-$ölçülü kəsilməz vektor-funksiyalar, $a(x)$ verilmiş $n-$ölçülü kəsilməz başlanğıc vektor-funksiyadır.

İşdə baxılan (1)–(3) məsələsinin həllinin göstəriliş düsturu tapılmışdır.

Paraqraf 1.2-də (1)–(3) məsələsinin diskret analoquna baxılır:

$$z(t+1,x) = A(t,x)z(t,x) + B(t,x)y(t,x) + f(t,x),$$
$$t = t_0, t_0+1, ..., t_1-1; \quad x = x_0, x_0+1, ..., x_1, \tag{4}$$

$$y(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x_1} [C(t,x,s)z(t,s) + g(t,x,s)], \tag{5}$$

$$z(t_0,x) = a(x), \ \ x = x_0, x_0+1, ..., x_1. \tag{6}$$

Burada $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x,s)$ verilmiş $(n\times n)$ ölçülü, diskret matris-funksiyalar, $f(t,x)$, $g(t,x,s)$, $a(x)$ verilmiş $n-$

ölçülü diskret və məhdud vektor-funksiyalar, $z(t,x)$ isə $n-$ölçülü axtarılan vektor-funksiyadır.

Baxılan (4)–(6) məsələsinin həllinin göstərilişi tapılmış və (4) tənliyinin bir xüsusi halı öyrənilmişdir.

İkinci fəsil yeddi paraqrafdan ibarət olub əsasən optimallıq üçün zəruri şərtlərin tapılmasına həsr edilmişdir.

Bu fəsildə fərz olunur ki, populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunması məsələləri birtərtibli xüsusi törəməli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunurlar.

Paraqraf 2.1-də xətti hal öyrənilir.

Tutaq ki, $D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]-$verilmiş düzbucaqlı, $U\subset R^r$ verilmiş boş olmayan və məhdud çoxluq, $u(t,x)$ $x-$a nəzərən kəsilməz, $t-$yə nəzərən hissə-hissə kəsilməz $r-$ölçülü vektor-funksiya olub öz qiymətlərini verilmiş boş olmayan və məhdud U çoxluğundan alır, yəni

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\quad (t,x)\in D. \tag{7}$$

Belə idarəedici vektor-funksiyaları mümkün idarələr adlandıracağıq.

Fərz edək ki, idarə olunan proses xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi

$$z_t(t,x)=A(t,x)z(t,x)+\int_{x_0}^{x_1}B(t,x,s)z(t,s)ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}C(t,x,s,u(t,s))ds+f(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in D, \tag{8}$$

və

$$z(t_0,x)=a(x),\ \ x\in[x_0,x_1] \tag{9}$$

başlanğıc şərti ilə təsvir olunur.

Burada $A(t,x)$, $B(t,x)$ verilmiş $(n\times n)$ ölçülü, kəsilməz matris-funksiyalar, $C(t,x,s,u)$ və $f(t,x,u)-$isə verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz olan $n-$ölçülü vektor-funksiyalardır.

Fərz olunur ki, qoyulan hamarlıq şərtləri daxilində hər bir $u(t,x)$ mümkün idarəsinə (8)–(9) məsələsinin yeganə $t-$yə nəzərən hissə-hissə hamar, $x-$a nəzərən isə kəsilməz olan $z(t,x)$ həlli cavab verir

Tutaq ki, $T_i \in (t_0, t_1]$, $i=\overline{1,k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k \le t_1)$ verilmiş nöqtələrdir.

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{k} c_i'(x) z(T_i, x) dx \tag{10}$$

funksionalının (7)–(9) məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxaq. Burada $c_i(x)$, $i=\overline{1,k}$ verilmiş, kəsilməz olan $n-$ölçülü vektor-funksiyalardır. Qeyd edək ki, $(')$ ştrix vektorlar və matrislər üçün isə transponirə işarəsidir.

Əgər $u(t,x)$ mümkün idarəsi (10) funksionalına (7)–(9) məhdudiyyətləri daxilində minimum qiymət verirsə, onda $u(t,x)-$i optimal idarə, $(u(t,x), z(t,x))-$isə optimal proses adlandıracağıq.

İndi $(u(t,x), z(t,x))-$i mümkün proses hesab edərək

$$H(t,x,u(t,x),\psi(t,x)) = \psi'(t,x) f(t,x,u(t,x)) + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,s) C(t,s,x,u(t,x)) ds,$$

$$\Delta_{\bar{u}(t,x)} H[t,x,\psi] \equiv H(t,x,\bar{u}(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,u(t,x),\psi(t,x)),$$

işarələmələrini daxil edək. Burada $\psi(t,x)$ $n-$ölçülü vektor-funksiya olub Volterra tipli

$$\psi(t,x) = \int_t^{t_1} A'(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau + \int_t^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} B'(\tau,s,x)\psi(\tau,s)dsd\tau - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) c_i(x) \tag{11}$$

xətti inteqral tənliklər sisteminin həllidir. Belə ki, $\alpha_i(t)$, $i=\overline{1,k}$ $[t_0, T_i]$, $i=\overline{1,k}$ parçalarının xarakteristik funksiyalardır.

Artım üsulunun bir variantından istifadə edərək baxılan məsələdə Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat edilmişdir.

Teorem 1. Baxılan (7)–(10) optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} H[\theta, x, \psi] dx \le 0 \qquad (12)$$

bərabərsizliyinin ixtiyari kəsilməz $v(x) \in U$, $x \in [x_0, x_1]$ və $\theta \in [t_0, t_1)$ üçün ödənməsidir. Burada $\theta \in [t_0, t_1)$ $u(t,x)$ mümkün idarəsinin ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsidir.

Daha sonra göstərilmişdir ki, keyfiyyət funksionalı qeyri-xətti, kəsilməz diferensiallanan və qabarıq olan halda maksimum prinsipi optimallıq üçün kafi şərtdir.

Paraqrafın sonunda (7)–(10) məsələsi idarə oblastı qabarıq olan halda öyrənilmiş və göstərilmişdir ki, bu halda xəttiləşdirilmiş maksimum şərti optimallıq üçün zəruri şərtdir.

Parqaraf 2.2.-də fərz olunur ki, idarə olunan proses

$$z_t = f(t, x, z, y, u), \quad (t,x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \qquad (13)$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t,s), u(t,s)) ds, \quad (t,x) \in D \qquad (14)$$

qeyri-xətti tənliklər sistemi və

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, x_1] \qquad (15)$$

başlanğıc şərti ilə təsvir olunur.

Burada $f(t, x, z, y, u)$, $g((t, x, s, z, u)) -$ verilmiş $n-$ ölçülü vektor-funksiya olub arqumentlərinin küllüsünə nəzərən (z, y, u), $((z,u))-$ ya görə törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir, $a(x)$ verilmiş, ölçülən və məhdud vektor-funksiya, $u(t,x)$ $r-$ ölçülü ölçülən və məhdud idarəedici vektor-funksiya olub

$$u(t,x) \in U \subset R^r, \quad (t,x) \in D,$$

məhdudiyyətlərini ödəyir, U isə verilmiş boş olmayan qabarıq və məhdud çoxluqdur. Belə idarəedici vektor-funksiyaları mümkün idarələr adlandıracağıq.

Yuxarıda verilmiş (13)–(15) məsələsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində

$$I(u)=\int_{x_0}^{x_1}\phi(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x))dx \tag{16}$$

qeyri-xətti çoxnöqtəli funksionalı təyin edək. Burada $T_i\in(t_0,t_1]$, $i=\overline{1,k}$ $(t_0<T_1<T_2<\cdots<T_k\le t_1)$ verilmiş nöqtələr, $\phi(x,a_1,a_2,\ldots,a_k)$ isə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyadır.

Bu (16) funksionalının (13)–(15) məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Tutaq ki, $(u(t,x),z(t,x),y(t,x))$ müəyyən mümkün proses, $\psi(t,x)$ və $q(t,x)$ isə $n-$ölçülü vektor-funksiyalar olub

$$\psi(t,x)=\int_t^{t_1}H_z'(\tau,x,z(\tau,x),y(\tau,x),\psi(\tau,x),q(\tau,x),u(\tau,x))d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)\frac{\partial\phi(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x))}{\partial a_i}, \tag{17}$$

$$q(t,x)=H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),\psi(t,x),q(t,x),u(t,x)) \tag{18}$$

münasibətlərini ödəyirlər.
Burada

$$H(t,x,z(t,x),y(t,x),\psi(t,x),q(t,x),u(t,x))=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}q'(t,s)g(t,s,x,z(t,x),u(t,x))ds+\psi'(t,x)f(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)),$$

$\alpha_i(t)$ isə $[t_0,T_i]$ parçasının xarakteristik funksiyasıdır.

Daxil edilmiş işarələmənin və (17)–(18) qoşma sistemin köməyi ilə verilmiş keyfiyyət meyarının $u(t,x)$ və $\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x)$ mümkün idarələrinə uyğun artımı

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'(t,x,z(t,x),y(t,x),\psi(t,x),q(t,x),u(t,x))\Delta u(t,x)dxdt +$$

$$+\eta(u;\Delta u) \tag{19}$$

şəklində göstərilmişdir. Burada $\eta(u;\Delta u)$ ifadəsi aşkar şəkildə dissertasiyada verilmiş, qalıq həddidir.

Bu (19) artım düsturunun köməyi ilə aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 2. Qoyulan hamarlıq şərtləri daxilində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin (13)–(16) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'(t,x,z(t,x),y(t,x),\psi(t,x),q(t,x),u(t,x))(v(t,x)-u(t,x)) \le 0 \tag{20}$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v(t,x)\in U \subset R^r$, $(t,x)\in D$ üçün ödənməsidir. Bu (20) bərabərsizliyi baxılan məsələ üçün xəttiləşdirilmiş inteqral maksimum şərtinin analoqudur. Ondan nöqtəvi xəttiləşdirilmiş maksimum şərti alınmışdır.

Paraqraf 2.3-də aşağıdakı sərhəd (başlanğıc) idarəetmə məsələsinə baxılır.

Tutaq ki, Bolsa tipli

$$I(v) = \phi(a(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x,z(t_1,x))dx \tag{21}$$

funksionalının

$$z_t = f(t,x,z,y), \quad (t,x)\in D = [t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \tag{22}$$

$$z(t_0,x) = a(x), \quad x\in[x_0,x_1], \tag{23}$$

$$y(t,x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t,x,s,z(t,s))ds, \quad (t,x)\in D, \tag{24}$$

$$\dot{a} = F(x,a,v), \ x\in[x_0,x_1], \tag{25}$$

$$a(x_0) = a_0, \tag{26}$$

$$v(x)\in V \subset R^r, \quad x\in[x_0,x_1] \tag{27}$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunu tapmaq tələb olunur.

Burada $f(t,x,z,y)$, $(g(t,x,s,z))-$ verilmiş, $n-$ ölçülü vektor-funksiya olub arqumentlərinin küllüsünə nəzərən (z,y) $((z))-$ ə görə törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir, t_0, x_0, t_1, x_1 – verilmiş ədədlər, $F(x,a,v)$ verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən $a-$ ya görə törəmələri ilə birlikdə kəsilməz vektor-funksiyadır, a_0 – verilmiş sabit vektordur, $\phi(a)$ və $G(x,z)$ verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən uyğun olaraq a və $z-$ ə görə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalardır, $v(x)$ $r-$ ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsinə malik) idarəedici vektor-funksiya, V verilmiş, boş olmayan və məhdud çoxluqdur. Bu məhdudiyyətləri ödəyən hər bir $v(x)$ idarəedici vektor-funksiyasına mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz olunur ki, hər bir mümkün $v(x)$ idarəsinə (25)–(26) Koşi məsələsinin yeganə kəsilməz və hissə-hissə hamar $a(x)$ həlli uyğundur, (22)–(23) məsələsinin həlli isə klassik mənada başa düşülür.

Tutaq ki, $(v(x), a(x), z(t,x))$ müəyyən mümkün prosesdir, $\psi(x)$, $p(t,x)$, $q(t,x)-$ lər isə hələlik naməlum $n-$ ölçülü vektor-funksiyalardır.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək

$$H(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)) = p'(t,x) f(t,x,z(t,x),y(t,x)) +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} q'(t,s) g(t,s,x,z(t,x)) ds,$$

$$M(x,a(x),v(x),\psi(x)) = \psi'(x) F(x,a(x),v(x)).$$

İndi fərz edək ki, $\psi(x)$, $p(t,x)$ və $q(t,x)$ vektor-funksiyaları

$$\dot{\psi}(x) = -M_a(x,a(x),v(x),\psi(x)) - p(t_0,x), \tag{28}$$

$$\psi(x_1) = -\phi_a(a(x_1)), \tag{29}$$

$$p_t(t,x) = -H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x)), \tag{30}$$

$$p(t_1, x) = -G_z(x, z(t_1, x)),$$
$$q(t, x) = H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \qquad (31)$$

münasibətlərini ödəyirlər. Baxılan məsələdə əvvəlcə funksionalın artım düsturu qurulmuş, sonra isə iynəvari variasiyanın (Makşeyn variasiyası) köməyi ilə aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Teorem 3. Baxılan (21)–(27) optimal idarəetmə məsələsində $v(x)$ mümkün idarənin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\max_{v \in V} M(\xi, a(\xi), v, \psi(\xi)) = M(\xi, a(\xi), v(\xi), \psi(\xi)) \qquad (32)$$

münasibətinin ixtiyari $\xi \in [x_0, x_1)$ üçün ödənməsidir. Burada $\xi \in [x_0, x_1)$ $v(x)$ mümkün idarəsinin ixtiyari kəsilməzlik nöqtəsidir.

Sonra idarə oblastının qabarıqlığı şərti daxilində xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu isbat edilmişdir.

Paraqraf 2.4-də optimal idarəetmə məsələsi idarəedici funksiya inteqral şəkildə verilmiş başlanğıc şərtə daxil olan halda tədqiq edilmişdir. Müəyyən hamarlıq şərtləri daxilində artım üsulunun köməyi ilə optimallıq şərtləri isbat edilmişdir.

Paraqraf 2.5-də

$$z_t(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} K(t, x, s, z(t, s))ds + f(t, x, z(t, x), u(t, x)),$$
$$(t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \qquad (33)$$
$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, x_1], \qquad (34)$$
$$u(t, x) \in U \subset R^r, \ (t, x) \in D, \qquad (35)$$
$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \ldots, z(T_k, x))dx \to \min, \qquad (36)$$

optimal idarəetmə məsləsinə baxılmışdır.

Fərz edilir ki, $K(t, x, s, z)$, $f(t, x, z, u)$ verilmiş $n-$ölçülü vektor-funksiyalar olub arqumentlərinin küllüsünə nəzərən $z-$ə görə kəsilməz törəməyə malikdirlər, $\phi(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)-$ verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyadır, $u(t, x)$ $t-$yə nəzərən hər bir $x \in [x_0, x_1]$ üçün hissə-hissə kəsilməz, $x-$a nəzərən isə hər bir

$t \in [t_0, t_1]$ üçün kəsilməz olan $r-$ölçülü idarəedici vektor-funksiya, $U-$verilmiş, boş olmayan məhdud çoxluq, $t_0, x_0, t_1, x_1 -$verilmiş ədədlər, $T_i \in (t_0, t_1]$, $i = \overline{1,k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k \le t_1)$ verilmiş nöqtələrdir.

Göründüyü kimi keyfiyyət meyarı çoxnöqtəli funksionaldır. Baxılan məsələdə optimallıq üçün Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində zəruri şərti isbat etməyə imkan verən funksionalın artım düsturu qurulmuşdur.

İndi $(u(t,x), z(t,x))-$prosesini qeyd olunmuş mümkün proses hesab edərək Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoqunu daxil edək:

$$H(t, x, z(t,x), u(t,x), \psi(t,x)) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,s) K(t,s,x,z(t,x)) ds + \psi'(t,x) f(t,x,z(t,x),u(t,x)).$$

Burada $\psi(t,x)$ $n-$ ölçülü vektor-funksiya olub

$$\psi(t,x) = \int_t^{t_1} H_z'(\tau, x, z(\tau,x), u(\tau,x), \psi(\tau,x)) d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) \frac{\partial \phi(x, z(T_1,x), z(T_2,x), \ldots, z(T_k,x))}{\partial a_i} \qquad (37)$$

qoşma sisteminin həllidir, $\alpha_i(t)$ isə $[t_0, T_i]$ parçasının xarakteristik funksiyasıdır.

Teorem 4. Baxılan (33)–(36) məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\int_{x_0}^{x_1} [H(\theta, x, z(\theta,x), v(x), \psi(\theta,x)) - H(\theta, x, z(\theta,x), u(\theta,x), \psi(\theta,x))] dx \le 0 \qquad (38)$$

bərabərsizliyinin ixtiyari kəsilməz $v(x) \in U$, $x \in X$ və $\theta \in [t_0, t_1)$ üçün ödənməsidir.

Sonra bəzi əlavə hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu və Eyler tənliyinin analoqu isbat edilmişdir.

Paraqraf 2.6-da bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyətlər olan hal tədqiq edilmiş və optimallıq üçün maksimum prinsipi tipli zəruri şərt isbat olunmuşdur.

Tutaq ki,

$$S_0(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi_0\big(z(T_1, x), z(T_2, x), \ldots, z(T_k, x)\big)dx, \tag{39}$$

funksionalının

$$S_i(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi_i\big(z(T_1, x), z(T_2, x), \ldots, z(T_k, x)\big)dx \le 0, \quad i = \overline{1, p}, \tag{40}$$

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \tag{41}$$

$$z_t(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} K(t, x, s, z(t, s))ds + f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \ (t, x) \in D, \tag{42}$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, x_1] = X \tag{43}$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumu tapmaq tələb olunur.

Burada $\phi_i(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $i = \overline{0, p}$ – verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiya, $T_i \in (t_0, t_1]$, $i = \overline{1, k}$ $(t_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k \le t_1)$ verilmiş nöqtələr, $U \subset R^r$ – verilmiş boş olmayan və məhdud çoxluq, $a(x)$ verilmiş n – ölçülü kəsilməz vektor-funksiya, $K(t, x, s, z)$ və $f(t, x, z, u)$ verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən z – ə görə kəsilməz diferensiallanan n – ölçülü vektor-funksiyalar, $u(t, x)$ r – ölçülü, t – yə görə hər bir x üçün hissə-hissə kəsilməz, x – a görə isə hər bir t üçün kəsilməz idarəedici vektor-funksiyadır.

Əgər (42)-(43) məsələsinin $u(t, x)$ idarəedici funksiyasına cavab verən $z(t, x)$ həlli üçün (40) məhdudiyyətləri ödənərsə, onda belə idarəedici vektor-funksiyaya mümkün idarə deyəcəyik. Bu (39) funksionalına minimum verən $u(t, x)$ mümkün idarəsinə isə optimal idarə deyəcəyik.

Tutaq ki, $(u(t, x), z(t, x))$ baxılan optimal idarəetmə məsələsində mümkün prosesdir.

$$I(u)=\{i : S_i(u)=0, i=\overline{1,p}\},$$
$$J(u)=\{0\}\cup I(u),$$
$$H(t,x,z,u,\psi_i)=\int_{x_0}^{x_1}\psi_i'(t,s)K(t,s,x,z(t,x))ds+\psi_i'(t,x)f(t,x,z(t,x),u(t,x))$$

işarələmələrini daxil edək.

Burada $\psi_i(t,x)$ $i=\overline{0,p}-$lər $n-$ ölçülü vektor-funksiyalar olub

$$\psi_i(t,x)=-\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(t)\frac{\partial\phi_i'(z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x))}{\partial a_j}dx+$$
$$+\int_{t}^{t_1}\frac{\partial H'(\tau,x,z(\tau,x),u(\tau,x),\psi_i(\tau,x))}{\partial z}d\tau$$

tənliklər sisteminin həllidirlər, $\alpha_j(t)$ isə $[t_0,T_j]$, $j=\overline{1,k}$ parçasının xarakteristik funksiyasıdır.

Sadəlik üçün fərz edək ki,
$$J(u)=\{0,1,2,\cdots,m\}\ (m\le p).$$

Qoyulan məhdudiyyətlər daxilində aşağıdakı hökm isbat olunmuşdur.

Teorem 5. Baxılan (39)–(43) optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\min_{i\in J(u)}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{x_0}^{x_1}l_j\big[H(\theta_j,x,z(\theta_j,x),v_j(x),\psi_i(\theta_j,x))-$$
$$-H(\theta_j,x,z(\theta_j,x),u(\theta_j,x),\psi_i(\theta_j,x))\big]dx\le 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $l_j\ge 0$, $\theta_j\in[t_0,t_1)$, $(t_0\le\theta_1\le\theta_2\le\ldots\le\theta_{m+1}<t_1)$ və kəsilməz $v_j(x)\in U$, $x\in[x_0,x_1]$, $j=\overline{1,m+1}$ üçün ödənməsidir.

Paraqraf 2.7-də

$$I(u)=\int_{x_0}^{x_1}\phi(z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x))dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}F(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x))dxdt$$

funksionalının (13)–(15) şərtləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Fərz olunur ki, idarə oblastı U açıq çoxluqdur. Baxılan məsələdə funksionalın birinci və ikinci variasiyaları hesablanmış və onların vasitəsi ilə Eyler tənliyinin və Lejandr-Klebş şərtinin analoqları isbat edilmişdir.

Dissertasiyanın **üçüncü fəsli** populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunması məsələlərinin ikiölçülü diskret analoqlarının tədqiqinə həsr olunmuşdur.

Qeyd edək ki, son illər birölçülü, yəni adi fərq tənlikləri ilə təsvir olunan diskret optimal idarəetmə məsələlərində M.C.Mərdanov, T.Q.Məlikov, S.T. Məlik, K.T. Məlikov tərəfindən optimallıq üçün yeni və mühüm zəruri şərtlər alınmışdır.

Paraqraf 3.1-də

$$S(u)=\sum_{x=x_0}^{x_1} c'(x)z(t_1,x), \tag{44}$$

funksionalının

$$z(t+1,x)=A(t,x)z(t,x)+B(t,x)y(t,x)+f(t,x,u(t,x)),$$
$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \tag{45}$$

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \tag{46}$$

$$y(t,x)=\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[C(t,x,s)z(t,s)+D(t,x,s,u(t,s))\right], \tag{47}$$

$$u(t,x)\in U\subset R^r,\ \ t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \tag{48}$$

məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Burada $A(t,x), B(t,x), C(t,x,s)$ verilmiş $(n\times n)$ ölçülü diskret, məhdud matris funksiyalar, $f(t,x,u)$, $D(t,x,s,u)-$verilmiş diskret və məhdud $n-$ölçülü vektor funksiyalar, $a(x)-$verilmiş diskret və məhdud $n-$ölçülü başlanğıc vektor-funksiya, $U-$verilmiş boş olmayan və məhdud çoxluq, $u(t,x)$ $r-$ölçülü diskret idarəedici vektor-funksiya (mümkün idarə), $c(x)$ verilmiş diskret məhdud $n-$ölçülü vektor-funksiyadır.

Tutaq ki, $(u(t,x), z(t,x))$ müəyyən bir mümkün prosesdir.

$$H(t,x,u(t,x),\psi(t,x)) = \psi'(t,x) f(t,x,u(t,x)) +$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x_1} \psi'(t,s) B(t,s) D(t,s,x,u(t,x))$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasını və

$$\Delta_{\bar{u}(t,x)} H[t,x,u,\psi] = H(t,x,z(t,x),\bar{u}(t,x),\psi(t,x)) -$$
$$- H(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x))$$

işarələməsini daxil edək.

Burada $\psi = \psi(t,x)$ $n-$ölçülü vektor funksiya olub,

$$\psi(t-1,x) = A'(t,x)\psi(t,x) + \sum_{s=x_0}^{x_1} C'(t,s,x) B'(t,s)\psi(t,s), \tag{49}$$

$$\psi(t_1-1,x) = -c(x) \tag{50}$$

məsələsinin (qoşma sistem) həllidir.

Aşağıdakı hökm isbat edilmişdir.

Teorem 6. Baxılan (44)–(48) optimal idarəetmə məsələsində $u(t,x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H[t,x,\psi] \le 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v(t,x) \in U$, $t = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1;$ $x = x_0, x_0+1, \dots, x_1-$lər üçün ödənməsidir. Bu optimallıq şərti diskret maksimum şərtinin analoqudur.

Bu paraqrafın sonunda keyfiyyət funksionalının qeyri-xətti və qabarıq olması halı öyrənilmiş və göstərilmişdir ki, bu halda maksimum prinsipinin diskret analoqu optimallıq üçün kafidir.

Paraqraf 3.2-də

$$z(t+1,x) = f(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)), \tag{51}$$
$$t = t_0, t_0+1, \dots, t_1-1; \quad x = x_0, x_0+1, \dots, x_1,$$
$$z(t_0,x) = a(x), \quad x = x_0, x_0+1, \dots, x_1, \tag{52}$$
$$y(t,x) = \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t,x,s,z(t,s),u(t,s)), \tag{53}$$

$$t = t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1$$

şəklində qeyri–xətti fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Burada $f(t,x,z,y,u)$, $\left(g(t,x,s,z,u)\right)-$verilmiş $n-$ ölçülü vektor-funksiya olub hər bir (t,x) $\left((t,x,s)\right)$ üçün (z,y,u), $\left((z,u)\right)-$a görə kəsilməz törəmələrə malikdir, $t_0, x_0, t_1, x_1 -$verilmiş, $t_1 - t_0,\ x_1 - x_0$ fərqləri natural olan ədədlərdir, $a(x)-$verilmiş diskret $n-$ ölüçülü başlanğıc vektor funksiayadır, $u(t,x)$ $r-$ölçülü diskret idarəedici vektor-funksiya olub öz qiymətlərini boş olmayan və məhdud $U \subset R^r$ çoxluğundan alır, yəni

$$u(t,x) \in U \subset R^r,\ t = t_0, t_0 + 1, \ldots; t_1 - 1;\ x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1 \quad (54)$$

Optimal idarəetmə məsələsi

$$I(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1} \phi(x, z(t_1, x)), \quad (55)$$

funksionalının (51)–(54) məhdudiyyətləri daxilində minimum qiymətinin tapılmasından ibarətdir.

Burada $\phi(x,z)$ $x-$a nəzərən diskret, $z-$ə nəzərən isə xüsusi törəməsi ilə birlikdə kəsilməz olan verilmiş skalyar funksiyadır.

Tutaq ki, $\left(u(t,x), z(t,x)\right)$ müəyyən bir mümkün proses,

$$f(t,x,z(t,x),y(t,x),U) = \{\alpha : \alpha = f(t,x,z(t,x),y(t,x),v(t,x)), v(t,x) \in U,$$
$$t = t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 1;\ x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1\},$$
$$g(t,x,s,z(t,s),U) = \{\beta : \beta = g(t,x,s,z(t,s),v(t,s)), v(t,s) \in U,$$
$$t = t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 1;\ s = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1\}, \quad (56)$$

çoxluqları isə uyğun olaraq hər bir (t,x) və (t,x,s) üçün qabarıqdırlar.

Baxılan məsələ üçün artım üsulunun bir variantı işlənmiş və onun vasitəsi ilə diskret maksimum şərtinin analoqu isbat edilmidşir.

$$H(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x),p(t,x),q(t,x)) =$$
$$= p'(t,x) f(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x)) + \sum_{s=x_0}^{x_1} q'(t,s) g(t,s,x,z(t,x),u(t,x))$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoqunu daxil edək.

Burada $p(t,x)$ və $q(t,x)$ $n-$ ölçülü vektor-funksiyalar olub

$$p(t-1,x)=H_z(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

$$p(t_1-1,x)=-\phi_z(x,z(t_1,x)),$$

$$q(t,x)=H_y(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x),p(t,x),q(t,x)),$$

münasibətlərini ödəyirlər.

Teorem 7. Əgər (56) çoxluqları qabarıqdırlarsa, onda $u(t,x)$ mümkün idarəsinin (51)–(55) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Delta_{v(t,x)}H(t,x,z(t,x),y(t,x),u(t,x),p(t,x),q(t,x))\le 0 \qquad (57)$$

bərabərsizliyinin $v(t,x)\in U$, $t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;$ $x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1$ üçün ödənməsidir.

Sonra bu paraqrafda idarə oblastının qabarıq olduğu hal tədqiq olunmuş və xəttiləşdirilmiş maksimum şərtinin analoqu isbat edilmişdir.

İdarə oblastı açıq olan halda baxılan məsələ üçün Eyler tənliyinin analoqu isbat edilmişdir.

Paraqraf 3.3-də məsələnin verilənləri (parametrləri) üzərinə müxtəlif hamarlıq şərtləri qoymaqla sərhəd optimal idarəetmə məsələsinə baxılmış və bəzi optimallıq şərtləri isbat edilmişdir.

Tutaq ki, idarə olunan diskret proses

$$z(t+1,x)=f(t,x,z(t,x),y(t,x)),$$

$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1, \qquad (58)$$

fərq tənliklər sistemi və

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1 \qquad (59)$$

başlanğıc şərti ilə təsvir olunur, burada

$$y(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}g(t,x,s,z(t,s)), \qquad (60)$$

$$t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1;\quad x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1. \qquad (61)$$

Burada $f(t,x,z,y)$, $(g(t,x,s,z))$ verilmiş $n-$ ölçülü vektor-funksiya olub arqumentlərinin küllüsünə nəzərən (z,y) $(z)-$ ə görə xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir, $t_0, x_0, t_1, x_1 -$ verilmiş ədədlər olubŞ $t_1 - t_0$, $x_1 - x_0$ fərqləri tam ədədlərdir, $a(x)$ $n-$ ölçülü diskret vektor-funksiya olub

$$a(x+1) = F(x, a(x), u(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1 - 1, \tag{62}$$

$$a(x) = a_0 \tag{63}$$

məsələsinin həllidir.

Fərz olunur ki, $F(x, a, u)$ vektor-funksiyası arqumentlərinin küllüsünə nəzərən $a-$ya görə törəməsi $F_a(x, a, u)$ ilə birlikdə kəsilməzdir, a_0 – verilmiş sabit vektordur, $u(x)$ isə $r-$ölçülü diskret idarəedici vektor-funksiya olub öz qiymətlərini boş olmayan və məhdud $U \subset R^r$ çoxluğundan alır, yəni

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1 - 1. \tag{64}$$

Bu xassələrə malik olan hər bir $u(x)$ idarəedici vektor-funksiyasına mümkün idarə deyəcəyik.

Optimal idarəetmə məsələsi (58)-(63) məsələsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzəridə təyin olunmuş Bolsa tipli

$$S(u) = \phi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1} G(x, z(t_1, x)), \tag{65}$$

funksionalının minimumunun tapılmasından ibarətdir.

İndi $(u(x), a(x), z(t, x))-$i mümkün proses hesab edərək fərz edək ki,

$$\begin{gathered} F(x, a(x), U) = \{\alpha : \alpha = F(x, a(x), v(x)), \\ v(x) \in U \subset R^r, x = x_0, x_0 + 1, \ldots, x_1 - 1\} \end{gathered} \tag{66}$$

çoxluğu hər bir x üçün qabarıqdır.

$$H(x, a(x), u(x)\psi(x)) = \psi'(x) F(x, a(x), u(x))$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək.

Burada $\psi(x)$ $n-$ ölçülü vektor–funksiya olub

$$\psi(x-1) = \frac{\partial F'(x, a(x), u(x))}{\partial a} \psi(x) + p(t_0 - 1, x),$$

$$\psi(x_1 - 1) = -\frac{\partial \phi(a(x_1))}{\partial a},$$

məsələsinin həlli, $p(t,x)$ və $q(t,x)$ isə

$$p(t-1,x)=\frac{\partial f'(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial z}p(t,x)+\sum_{s=x}^{x_1}\frac{\partial g'(t,s,x,z(t,x))}{\partial z}q(t,s),$$

$$q(t,x)=\frac{\partial f'(t,x,z(t,x),y(t,x))}{\partial y}p(t,x),$$

$$p(t_1-1,x)=-\frac{\partial G(x,z(t_1,x))}{\partial z}.$$

məsələsinin həllidir.

Teorem 8. Əgər (66) çoxluğu qabarıqdırsa, onda $u(x)$ mümkün idarəsinin (58)–(65) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta_{v(x)}H(x,a(x),u(x),\psi(x))\le 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v(x)\in U$, $x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1$ mümkün idarəsi üçün ödənməsidir.

Paraqrafın sonrakı hissələrində əlavə hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün diskret maksimum şərtlərinin nəticəsi olmayan yeni optimallıq şərti (xəttiləşdirilmiş maksimum şərti) alınmışdır.

Teorem 9. Tutaq ki, (58)–(65) optimal idarəetmə məsələsində U çoxluğu qabarıqdır, $F(x,a,u)$ vektor-funksiyası isə $u-$ya görə kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdir. Onda $u(x)$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}H_u'(x,a(x),u(x),\psi(x))(v(x)-u(x))\le 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari $v(x)\in U$, $x=x_0,x_0+1,\dots,x_1-1$ üçün ödənməsidir.

Sonra idarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün Eyler tənliyinin analoqu şəklində zəruri şərt isbat edilmişdir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi tətbiqlərdə müəyyən şərtlər daxilində populyasiyanın dinamikasının modelləşdirən bəzi xətti inteqro-diferensial tənliklər və onların fərq analoqları üçün qoyulmuş Koşi məsələlərinin həllərinin göstərilişlərini tapmağa və uyğun (xətti və qeyri-xətti) optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr edilmişdir.

Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Birinci fəslin birinci paraqrafı populyasiyanın dinamikasını təsvir edən bir xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün qoyulmuş Koşi məsələsinin həllinin göstərilişinin tapılmasına həsr olunmuşdur.

Analoji göstəriliş baxılan kəsilməz Koşi məsələsinin diskret analoqu halında ikinci paraqrafda alınmışdır.

Hər iki halda bəzi xüsusi hallar öyrənilmişdir.

İkinci fəsildə xətti və qeyri-xətti ikiölçülü inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri öyrənilmişdir. Xətti halda, çoxnöqtəli keyfiyyət funksionalının xətti olması halında Pontryaginin maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat edilmişdir. Qeyri-xətti, lakin qabarıq keyfiyyət meyarı halında, Pontryaginin maksimum prinsipinin analoqunun kafi şərt olması isbat edilmişdir.

Qeyri-xətti optimal idarəetmə məsələləri halında optimallıq üçün Pontryaginin maksimum tipli optimallıq üçün zəruri şərt alınmış, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi, Eyler tənliyinin analoqu şəklində zəruri şərtlər alınmışdır.

Ayrıca olaraq, sərhəd optimal (başlanğıc şərtin vasitəsilə) idarəetmə məsələsinə baxılmış və artım üsulunun bir təkmilləşdirilmiş variantının köməyi ilə optimallıq üçün bir sıra birinci tərtib zəruri şərtlər isbat edilmişdir.

Bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyyətləri halında adi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bu tipli optimal idarəetmə məsələlərində alınmış zəruri şərtin analoqu olan, konstruktiv xarakter daşıyan və klassik Pontryagin maksimum prinsipinə ekvivalent olan optimallıq üçün zəruri şərt alınmışdır.

İşin üçüncü fəslində isə ikinci fəsildə baxılan kəsilməz optimal idarəetmə məsələlərinin diskret analoqları öyrənilmişdir.

Baxılan məsələlərdə aşkar və qeyri-aşkar xəttiləşdirilmə üsullarından istifadə edərək maksimum prinsipinin, xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipinin və Eyler tənliyinin analoqları şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

Xətti halda, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt isbat edilmişdir.

Sərhəd (başlanğıc şərtin vasitəsi ilə) idarə məsələsi ayrıca olaraq öyrənilmişdir. Müxtəlif optimallıq şərtləri isbat edilmişdir.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Агамалыева, А.И., Мансимов, К.Б. Об одной задаче управления динамикой популяции // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, -2016, №2, -с.83-92.
2. Агамалыева, А.И. Представления решения разностного аналога одного класса уравнений, описывающих динамику популяции // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ-мат. наук, -2016, №3, -с.64-68.
3. Агамалыева, А.И. Линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной задаче управления динамикой популяции // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ-мат. наук, -2016, №4, -с.46-52.
4. Агамалыева, А.И., Мансимов, К.Б. Об одной задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений // -Томск: Вестник Томского Гос.Ун-та. сер. управ. выч. техники и информатика, -2017, №39, -с. 4–10.
5. Агамалыева, А.И., Мансимов, К.Б. Необходимое условие оптимальности в одной дискретной задаче оптимального управления // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, -2018, №3, -с.20-28.
6. Агамалыева, А.И. Необходимое условие оптимальности первого и второго порядков в задаче оптимального управления динамикой популяции // -Баку: Журнал Бакинского Инжен. унив., серия матем. и комп. науки, -2020, №1, -с.40-48.
7. Агамалиева, А.И. Об одной начальной задаче управления динамикой популяции // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ-мат. наук, -2022, №1, -с.44-52.
8. Агамалиева, А.И. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции // -Пермь: Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика, -2022, Вып. №2(57), -с. 5–13.
9. Агамалиева, А.И. Необходимое и достаточное условие оптимальности в линейной задаче управления динамики // -Баку: Вестник БГУ, сер. физ-мат. наук, -2022, №1, -с.72-77.
10. Агамалиева, А.И. Аналог формулы Коши для однолинейного интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма // -Улан-Удэ: Вестник БГУ. Математика, информатика, -2022, №2, -с. 11-22.

11. Агамалиева, А. И. Исследование дискретного аналога одной граничной задачи оптимального управления // -Пермь: Прикладная математика и вопросы управления, -2022, № 3. -с. 9–25.
12. Agamaliyeva, A.I. Necessary and sufficient optimality condition in one discrete optimal control problem // -Baku: Informatics and Control Problems 42 Issue, -2022, -pp. 33-38.
13. Агамалыева, А.И. Необходимое условие оптимальности в одной задаче оптимального управления, описываемой разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения динамики популяции. // -Иркутск: Матер. междун. симпозиума «Динамические системы, оптимальное управление и математические моделирование», Иркутский гос. Ун-тет, -2019, -с. 182-186.
14. Agamaliyeva, A.I. Necessary optimality in a discrete problem of control of the initial condition // The 8th intern. conf. on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA), -Baku 2022, Vol II, -pp 39-41.
15. Agamaliyeva, A.I., Mansimov, K.B. Linearized principle of maximum in a problem of control of population dynamics // The 5th intern. conf. on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA), -Baku: -2015, -pp. 34-35.
16. Agamaliyeva, A.I. Representation of the solution of the Cauchy problem analogue for a class of linear difference equations // The 7th intern. conf. Azerbaijan, Turkey and Ukrainian on Mathematical analysis, differential equations and their applications, -Baku: -2015, -pp. 8-9.
17. Агамалыева, А.И., Мансимов, К.Б. Необходимое условие оптимальности в одной задаче управления динамикой популяции // “Funksional analiz və onun tətbiqləri” respublika elmi konf. mater. -Bakı: Bakı Universiteti, -22 iyun, -2016, -s. 67-69.
18. Агамалыева, А.И., Алиева, С.Т., Ахмедова, Ж.Б. Представления решения одной системы линейных неоднородных разностных уравнений типа Фредгольма. // -Иркутск: Матер. Междун. симп. «Динамические системы, оптимальное управление и математические моделирование», Иркутский гос. Ун-тет, -2019, -с. 108-110.

Dissertasiyanın müdafiəsi **20 sentyabr 2024-cü** il tarixində **saat 14^{00}** -da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyasıyaları Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **05 iyul 2024**-cü il tarixdə zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 21.06.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 100